

パラメータ付きの多項式スペクトル分解

篠原 直行

NAOYUKI SHINOHARA*

CREST JST / 立教大学

CREST JST / RIKKYO UNIVERSITY

Abstract

パラメータを付きの多項式スペクトル分解を解くために特殊な多項式集合の shape 基底を計算することが考えられる. 本論文では, パラメータ付きの場合のグレブナー基底を計算する Nebeshima 手法を用いた, shape 基底を計算するための 3 種類の方法を提案し, その有効性の検証結果を報告する.

1 はじめに

科学や工学の分野では, パラメータを変数として残すことによって, 解析や設計の性能をパラメータを直接操作することによって容易に観察できることが望まれており, そのような要求を満たす手法として代数学的手法が提案されている.

多項式スペクトル分解は信号処理や線形動的システムの解析設計において有効な基本的数学ツールであり, 多項式スペクトル分解を解くための多くのアプローチが提案されている. ただ, それらのほとんどは高速な浮動小数点演算に適用したものであり, パラメータを陽に扱うことに適していない. しかし, Kanno, Yokoyama, Anai, Hara [1] による, 多項式スペクトル分解とグレブナー基底の興味深い関係を利用した代数学的手法はパラメータ付きの場合の多項式スペクトル分解を解くことを可能にした.

Kanno, Yokoyama, Anai, Hara のアプローチでは, パラメータ付きの場合の多項式スペクトル分解を解くために, 後述の補題 2.2 の連立代数方程式からえられるイデアルの shape 基底を計算する必要がある. この論文では, スペクトル因子の次数を n としたときに, 実際にどの程度大きな n に対してまで shape 基底を計算することができるかということに注目し, そのために三つの解法を提案しその有効性を検証した. 具体的には, まずパラメータ付きの場合のグレブナー基底の計算に Nabeshima のアプローチ [3] を適用し, それを基本的なツールとして, saturation technique を用いた二つの手法と, パラメータ付きの場合の一変数多項式の最大公約因子を利用する手法である.

これらの検証は後述の (4) に現れる $a_0, a_2, \dots, a_{2n-2}$ 全てをパラメータとした場合の多項式スペクトル分解に対するものであり, それに比べて実際的な問題は $a_i(p_1, p_2) \in K[p_1, p_2]$ のようにパラメータの個数は 1 個か 2 個の場合が多い. 従って, その検証にかかる時間的・空間的計算コストは実際の問題より大きいと考えられ, この検証で得られた結果は実際的な問題を解く際のキーポイントを与える.

この論文の構成は以下のとおり. 第 2 節では [1] のアプローチについて簡単に述べる. すなわち, 最初にパラメータ付きでない場合の多項式スペクトル分解とその解法について説明し, その後でパラメータ付きの場合について説明する. 第 3 節では, パラメータ付きの場合のグレブナー基底の概念, つまり “包括的グレブナー基底系” について述べる. 第 4 節ではパラメータ付きの多項式スペクトル分解を解くための三種類の手法について提案する. 第 5 節ではそれら三種類の手法による結果を述べ, 第 6 節で考察と今後の研究課題についてまとめる.

*shnhr@tvs.rikkyo.ne.jp

ここでこの論文で使われる記号について説明する.

K : 体.

L : K の代数的閉包.

$pp(X)$: 変数集合 X の項の集合.

$\prec_X$: $pp(X)$ における項順序.

$\prec_{X_1, \dots, X_\ell}$: $\prec_{X_1}, \dots, \prec_{X_\ell}$ による $X_1 \prec \dots \prec X_\ell$ なる $pp(X_1 \cup \dots \cup X_\ell)$ 上の消去順序.

$lpp_X(f)$: $\prec_X$ に対する頭項.

$lc_X(f)$: $\prec_X$ に対する頭係数.

$\mathbb{V}(\{f_1, \dots, f_k\}) := \{\alpha \in L^m \mid f_1(\alpha) = \dots = f_k(\alpha) = 0, f_i \in K[X], \#X = m\}$.

$\sigma: K[P][X] \rightarrow L[X]$ なる特化準同型写像. 但し, P をパラメータの集合, X を変数の集合とする.

$GB(F, \prec)$: 有限多項式集合 F の項順序 $\prec$ によるグレブナー基底.

$RGB(F, \prec)$: 有限多項式集合 F の項順序 $\prec$ による簡約グレブナー基底.

$CGS(F, \prec)$: パラメトリックな有限多項式集合 F の項順序 $\prec$ による“包括的グレブナー基底系”.

$A = \{a_0, \dots, a_{2(n-1)}\}$.

$B = \{b_0, \dots, b_{n-1}\}$.

2 パラメータつきの多項式スペクトル分解

この節では多項式スペクトル分解の議論に必要な定義や既存の結果などを紹介し, Kanno, Yokoyama, Anai, Hara のアプローチ [1] によるパラメータつきの多項式スペクトル分解の解法を簡単に説明する.

2.1 パラメータを含まない場合の多項式スペクトル分解

議論を簡略化するために, まずパラメータがない場合の多項式スペクトル分解から説明する. 従ってパラメータなしの場合の議論においては, $A = \{a_0, a_2, \dots, a_{2n-2}\}$ は実数の集合とする.

下の実係数多項式 $f(x)$ は虚軸上に根を持たないとする:

$$f(x) = x^{2n} + a_{2n-2}x^{2n-2} + \dots + a_2x^2 + a_0 \in \mathbb{R}[x]. \quad (1)$$

この仮定は, 制御系問題においては自然に与えられる. $f(x)$ が偶関数であることから, α が $f(x)$ の根であるならば $-\alpha$ も $f(x)$ の根である. また, $f(x)$ は虚軸上に根を持たないことから, $f(x)$ の n 個の根は複素左半平面に属し, 他の根は複素右半平面に属することがわかる.

定義 2.1 (多項式スペクトル分解) (1) の多項式 $f(x)$ の多項式スペクトル分解とは次の因数分解をいう:

$$f(x) = (-1)^n g(x)g(-x). \quad (2)$$

ただし,

$$g(x) = x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1x + b_0 \in \mathbb{R}[x] \quad (3)$$

の根はすべて複素左半平面に含まれるものとする. また, このような $g(x)$ を $f(x)$ の“スペクトル因子”と呼ぶ.

次に, 多項式スペクトル分解を未定係数法で解くことについて考える. つまり, 変数 x に関する (2) の右辺と左辺の係数比較から得られる $b_0, \dots, b_{n-1}$ に関する連立代数方程式を解く. この連立代数方程式から得られる多項式集合は次の補題に示される性質を持つ:

補題 2.2 ([1], Lemma 5.) (1) と (3) で与えられた $f(x)$ と $g(x)$ に対して, $b_0, \dots, b_{n-1}$ を変数とする. このとき (2) の右辺と左辺の x による係数比較から下記の連立代数方程式を得る:

$$\begin{aligned}
 & (-1)b_{n-1}^2 + 2b_{n-2} - a_{2(n-1)} = 0, \\
 & \vdots \\
 & (-1)^k b_{n-k}^2 + \sum_{\substack{1 \leq i \leq 2k-1, \\ i \neq k}} (-1)^i b_{n-i} b_{n-2k+i} + 2b_{n-2k} - a_{2(n-k)} = 0 \quad \text{for } 2k \leq n, \\
 & \vdots \\
 & (-1)^k b_{n-k}^2 + \sum_{\substack{2k-n \leq i \leq n, \\ i \neq k}} (-1)^i b_{n-i} b_{n-2k+i} - a_{2(n-k)} = 0 \quad \text{for } 2k > n, \\
 & \vdots \\
 & (-1)^n b_0^2 - a_0 = 0.
 \end{aligned} \tag{4}$$

このとき, この連立代数方程式から得られる多項式集合を $\mathcal{G}$ とすると, $\mathcal{G}$ 自身は $b_{n-1} \succ \dots \succ b_0$ なる全次数逆辞書式順序による $\langle \mathcal{G} \rangle$ に対する簡約グレブナー基底になっている.

定義 2.3 補題 2.2 の $\langle \mathcal{G} \rangle$ を “スペクトル分解のイデアル” と呼ぶ.

ここで, グレブナー基底の計算による多項式スペクトル分解の解法を簡単に説明する.

定義 2.4 スペクトル分解のイデアル $\mathcal{G}$ を法とした b_{n-1} 倍写像に対して, それを行列で表現したものを $M_{b_{n-1}}$ とし, さらに $M_{b_{n-1}}$ の特性多項式を S_f とする. また,

$$S_f = \prod_{\alpha_i \neq \alpha_j \ (i \neq j)} (x - \alpha_i)^{e_i} \in \mathbb{C}[x],$$

に対して

$$T_f = \prod_{e_i=1} (x - \alpha_i)^{e_i}$$

を S_f の “simple part” と呼ぶ.

[1] の Lemma 4 により, T_f の最大実根と次の定理の shape 基底を求めることで $f(x)$ のスペクトル因子 $g(x)$ を得ることができる:

定理 2.5 ([1], Theorem 11.) 任意の $\{b_0, \dots, b_{n-2}\} \succ b_{n-1}$ なる消去順序に対して, イデアル $\langle \mathcal{G} \cup \{T_f(b_{n-1})\} \rangle$ は shape 基底 $\mathcal{S}$ を持つ:

$$\mathcal{S} = \{T_f(b_{n-1}), b_{n-2} - h_{n-2}(b_{n-1}), \dots, b_0 - h_0(b_{n-1})\}. \tag{5}$$

但し, h_i は T_f より次数の低い一変数多項式である. さらにイデアル $\langle \mathcal{G} \cup \{T_f(b_{n-1})\} \rangle$ は f のスペクトル因子をもたらす零点をもつ.

つまり, α を $T_f(b_{n-1})$ の最大実根としたときに,

$$g(x) = x^n + \alpha x^{n-1} + h_{n-2}(\alpha) x^{n-2} + \dots + h_1(\alpha) x + h_0(\alpha)$$

が $f(x)$ のスペクトル因子である.

この論文ではこの shape 基底を計算することを目指とし, T_f の最大実根の計算についてはふれない. パラメータを含まない場合の shape 基底の計算手順を下に整理する.

パラメータつきでない場合の shape 基底の計算

(NonPara-Step 0) : $\mathcal{G}$ を法としたときの b_{n-1} 倍写像を表す行列 $M_{b_{n-1}}$ を求める.

(NonPara-Step 1) : $M_{b_{n-1}}$ の特性方程式 S_f を計算する.

(NonPara-Step 2) : S_f の simple part T_f を計算する.

(NonPara-Step 3) : $RGB(\{T_f\} \cup \mathcal{G}, \prec_B)$ を計算する. 但し, $\prec_B$ は $B \setminus \{b_{n-1}\} \succ b_{n-1}$ なる消去順序とする.

2.2 パラメータを含む場合の多項式スペクトル分解 (shape 基底の計算)

この論文のメインテーマはパラメータつき, つまり $f(x)$ の係数 a_i を実数ではなくパラメータとした場合の shape 基底 S の計算方法についてである. パラメータつきの場合も, パラメータなしの場合とほぼ同様の手順で計算できることが [1] の 2.5 節で示されている:

パラメータつきの場合の shape 基底の計算

(Para-Step 1) : Suzuki-Sato の手法 [5] により, “包括的グレブナー基底系” の最初の “断片” を計算することで特性方程式 S_f を得る.

(Para-Step 2) : 各断片における S_f の simple part T_f を計算する.

(Para-Step 3) : 各断片において $\{T_f\} \cup \mathcal{G}$ に対して包括的グレブナー基底系を計算する.

“包括的グレブナー基底系 (CGS)” と “断片” はパラメータつきの場合のグレブナー基底に関係するもので, これについては第 3 節で説明する.

$n = 3, 4$ のときは, パラメータなしの場合と違って, $\mathcal{G}$ を法としたときの b_{n-1} 倍写像行列 $M_{b_{n-1}}$ を計算することなく S_f を計算できる. その方法は CGS の計算アルゴリズムである Suzuki-Sato の手法によって $\mathcal{G}$ に対する一部の CGS を計算することである.

3 包括的グレブナー基底系 (CGS)

(Para-Step 1) から (Para-Step 3) において, パラメータつきのグレブナー基底の計算が必要となる. パラメータつきのグレブナー基底の概念の一つに “包括的グレブナー基底系 (CGS)” が挙げられ, この節では CGS の定義とその例を紹介する. また本論文では CGS の計算方法に, Suzuki-Sato [5] の手法を改良した Nabeshima の手法 [3] を用いており, それについては [5] と [3] を参照.

定義 3.1 (“包括的グレブナー基底系 (CGS)”) X を変数の集合, P をパラメータの集合とし, $m = \#P$ とする. さらに, F を $K[X][P]$ の部分集合とし, $S \subset L^m$ を代数構成的集合, $\succ$ を項順序とする. 組の有限集合

$$\mathcal{F} = \{(Eq_1, Not_1, G_1), \dots, (Eq_\ell, Not_\ell, G_\ell)\} \quad (6)$$

が $\langle F \rangle$ の $\succ$ に関する S 上の包括的グレブナー基底系 (CGS) であるとは以下を満たすときにいう.

1. $Eq_1, \dots, Eq_\ell, Not_1, \dots, Not_\ell \subset K[P]$, また $G_1, \dots, G_\ell \subset K[P][X]$.
2. $\mathbb{V}(Eq_1) \setminus \mathbb{V}(Not_1), \dots, \mathbb{V}(Eq_\ell) \setminus \mathbb{V}(Not_\ell)$ は L^m の構成的部分集合, $G_1, \dots, G_\ell$ は $K[X][P]$ の有限部分集合.
3. $S \subset \bigcup_{i=1}^{\ell} \{\mathbb{V}(Eq_i) \setminus \mathbb{V}(Not_i)\}$.
4. 各 $i = 1, \dots, \ell$ と各 $a \in \mathbb{V}(Eq_i) \setminus \mathbb{V}(Not_i)$ に対して $\sigma_a(G_i)$ が $\langle \sigma_a(F) \rangle$ の $L[X]$ 上での $\succ$ に関するグレブナー基底をなす.

特に L^m 上 $\langle F \rangle$ の包括的グレブナー基底系を単に $\langle F \rangle$ の $\succ$ に関する包括的グレブナー基底系と呼ぶ。また、各代数構成的集合 $\mathbb{V}(Eq_i) \setminus \mathbb{V}(Not_i)$ をパラメータ空間 L^m の“細胞”と呼び、各組 (Eq_i, Not_i, G_i) を“断片”と呼ぶ。

簡単にいえば、包括的グレブナー基底系とはパラメータ空間を各細胞に分割して得られるグレブナー基底の family である。集合 (6) の各組の左二つの集合 Eq_i, Not_i がその場合分けを表すもので、 Eq_i は “= 0” を意味し、 Not_i は “ $\neq 0$ ” を意味する集合である。

例 3.2 $A = \{a_0, a_2\}$ をパラメータの集合、 $B = \{b_0\}$ を変数の集合とする。多項式集合 $F = \{a_0 b_0, a_2 b_0^2\} \subset \mathbb{Q}[A, B]$ の包括的グレブナー基底系 CGS は次のような集合であらわされる。

$$CGS = \{(\emptyset, \{a_0 a_2\}, \{b_0\}), (\{a_0\}, \{a_2\}, \{b_0^2\}), (\{a_2\}, \{a_0\}, \{b_0\}), (\{a_0, a_2\}, \emptyset, \{0\})\}.$$

例えば、二番目の断片 $(\{a_0\}, \{a_2\}, \{b_0^2\})$ は、 $a_0 \neq 0, a_2 = 0$ のとき F のグレブナー基底は $\{b_0^2\}$ を意味する。

4 パラメータつきの場合の shape 基底の計算

この節ではパラメータつきの場合の多項式スペクトル分解を解くために必要な shape 基底 S の有効な計算方法について議論する。

パラメータつきの場合も S_f の simple part T_f を計算する必要がある。その計算方法として、この論文では “saturation technique” を用いた手法と “パラメータつきの場合の GCD 演算” を用いた手法について議論する。また、saturation technique を用いた手法については、直接 shape 基底を求める方法と先に T_f を求めてから shape 基底を計算する二つの方法を用意した。

4.1 Satration technique による計算 1 (Sat 1)

β を T_f の任意の根とすると

$$S_f(\beta) = 0, S'_f(\beta) \neq 0$$

でなければならない。従って、 $S_f \in \langle G \rangle$ であることから、 $S'_f \neq 0$ のときの G のグレブナー基底を計算すればよいことになる。

このように、ある多項式 $f \in K[X]$ が 0 でないという条件のもとで、多項式集合 $F \subset K[X]$ のグレブナー基底を求める方法で saturation technique ([4], p178) とよばれるものがある。そのアルゴリズムは次のとおりである：

Algorithm 4.1 (Satration technique) Input 多項式 $f \in K[X]$, 有限集合 $F \subset K[X]$,

Output $G : f \neq 0$ のときの F の $\prec_X$ に関するグレブナー基底。

begin

z を $z \notin X$ なる新たな変数とし、 $\prec_{X,z}$ を $\prec_X$ による $X \prec z$ なる消去順序とする。

$F \cup \{fz - 1\}$ に対する $\prec_{X,z}$ によるグレブナー基底 G_0 を計算する。

$G = G_0 \cap K[X]$ を返す。

end

まず、saturation technique を使い、(Para-Step 2) と (Para-Step 3) 同時に計算する方法から説明する。それは $S'_f \neq 0$ のときの G に対する CGS を計算することであり、 T_f は各断片におけるグレブナー基底に含まれている。

[Sat 1]

(Para-Step 1) : Suzuki-Sato の手法により, “包括的グレブナー基底系” の最初の “断片” を計算することで特性方程式 S_f を得る.

(Sat1-Step 1) : $\prec_{A,B,\{y\}}$ は $A \prec \prec b_{n-1} \prec \prec B \setminus \{b_{n-1}\} \prec \prec y$ なる消去順序とする. Nabeshima の手法により $CGS(\mathcal{G} \cup \{S'_f(b_{n-1})y - 1\}, \prec_{A,B,\{y\}})$ を計算し, 各断片で y を含む多項式を除去する.

4.1.1 Satration technique による計算 2 (Sat 2)

今度は saturation technique を使った, [Sat 1] と同様の手法である計算手順 [Sat 2] について説明する. [Sat 1] との違いは, T_f とそれに対応する断片を先に計算し, その各断片に対して shape 基底を計算するところである. 従って計算手順は以下のとおりである.

[Sat 2]

(Para-Step 1) : Suzuki-Sato の手法により, “包括的グレブナー基底系” の最初の “断片” を計算することで特性方程式 S_f を得る.

(Sat2-Step 1) : Nabeshima の手法により $CGS(\{S_f(b_{n-1}), S'_f(b_{n-1})y - 1\}, \prec_{A,\{b_{n-1}\},\{y\}})$ を計算し, 各断片で y を含む多項式を除去することで $\{(Eq_0, Not_0, T_{f,0}), \dots, (Eq_k, Not_k, T_{f,k})\}$ を得る.

(Sat2-Step 2) : $\prec_{A,B}$ は $A \prec \prec b_{n-1} \prec \prec B \setminus \{b_{n-1}\}$ なる消去順序とする. 各 $(Eq_i, Not_i, T_{f,i})$ に対して, Nabeshima の手法により $CGS(\mathcal{G} \cup \{T_{f,i}\}, \prec_{A,B})$ を計算する.

4.1.2 “パラメータつきの場合の GCD 演算” による計算 (ParaGCD)

P をパラメータの集合, x を変数とし, $f_1, f_2 \in K[P, x]$ とする. $\{f_1, f_2\} \subset K[P, x]$ の $L[x]$ 上の GCD の family を CGS であらわすことができる. なぜならば, $CGS(\{f_1, f_2\}) = \{(Eq, Not, G)\}$ と書いて, $\alpha \in \mathbb{V}(Eq) \setminus \mathbb{V}(Not)$ に対して $\sigma_\alpha(G)$ は $\sigma_\alpha(\{f_1, f_2\})$ の $L[x]$ 上のグレブナー基底である. また, $L[x]$ は単項イデアル整域であるため $\sigma_\alpha(\langle f_1, f_2 \rangle)$ の生成元 g が存在し, それは $\sigma_\alpha(G)$ の $L[x]$ 上の簡約グレブナー基底 G' から得られる. つまり $\{g\} = G'$ である.

実際に Nabeshima の手法で, “消去多項式” を最小次数のもので選べば

$$CGS(\{f_1, f_2\}, \prec_{P \cup \{r\}, \{x\}}) = \{(Eq_i, Not_i, \{g_i\})\}$$

の形に書ける.

ただ, ここで注意しなければならないことが一つある. それは, Nabeshima の手法で $CGS(f_1, f_2)$ を計算すると, f_1 と f_2 が互いに素となる断片, つまり $(Eq, Not, \{1\})$ となる断片が含まれない場合である.

そこで, ここに互いに素となる条件の計算方法について説明する. 必要なのは f_1, f_2 が共通根を持たない条件, つまりそれは f_1 と f_2 の終結式の値 $res(f_1, f_2) \in K[P]$ が 0 でない条件である. Nabeshima の手法ではパラメータのみを含む多項式多項式 $h \in K[P]$ が 0 ではないという条件下で CGS を可能なので, $res(f_1, f_2) \neq 0$ の条件下で CGS の計算を実行すればよい.

以上より Nabeshima の手法と終結式の計算を組み合わせることで全ての場合の断片を計算できることがわかる.

次に “パラメータつきの場合の GCD 演算” を使った T_f の計算方法についてであるが, パラメータのない場合で GCD 演算を使って T_f を計算する方法から説明する. まず

$$U(x) = \gcd\left(S_f(x), \frac{d}{dx}S_f(x)\right), \quad V(x) = \gcd\left(U(x), \frac{d}{dx}U(x)\right)$$

とする. また $S_f = \prod (x - \alpha_i) \prod_{e_j=2} (x - \alpha_j)^{e_j} \prod_{e_k \geq 3} (x - \alpha_k)^{e_k}$ と書けて,

$$U = \prod_{e_j=2} (x - \alpha_j)^{e_j-1} \prod_{e_k \geq 3} (x - \alpha_k)^{e_k-1}, \quad V = \prod_{e_k \geq 3} (x - \alpha_k)^{e_k-2}$$

が成り立つ. 従って

$$\frac{S_f \cdot V}{U^2} = \frac{\prod (x - \alpha_i) \prod_{e_j=2} (x - \alpha_j)^{e_j} \prod_{e_k \geq 3} (x - \alpha_k)^{e_k} \prod_{e_k \geq 3} (x - \alpha_k)^{e_k-2}}{\prod_{e_j=2} (x - \alpha_j)^{2(e_j-1)} \prod_{e_k \geq 3} (x - \alpha_k)^{2(e_k-1)}} = \prod (x - \alpha_i) = T_f$$

が成り立つ. 従って T_f の計算は GCD 演算のみで計算できることがわかり, パラメータつきの場合は CGS を使って計算できることがわかる.

注意すべきは $V = 1$ の条件のみなので計算過程は以下のようなになる.

[ParaGCD]

(Para-Step 1) : Suzuki-Sato の手法により, $CGS(\mathcal{G}, \prec_{A,B})$ を計算し S_f を得る.

(ParaGCD-Step 1) : Nabeshima の手法により

$$GCD_{S_f, S'_f} = CGS(\{S_f, S'_f\}, \prec_{A, \{b_{n-1}\}}) = \{(Eq_{U_i}, Not_{U_i}, \{U_i\})\}_i$$

を計算.

(ParaGCD-Step 2) : 各条件 $\mathbb{V}(Eq_{U_i}) \setminus \mathbb{V}(Not_{U_i})$ のもとで

$$GCD_{U_i, U'_i} = CGS(\{U_i, U'_i\}, \prec_{A, \{b_{n-1}\}}) = \{(Eq_{V_{i,j}}, Not_{V_{i,j}}, \{V_{i,j}\})\}_{i,j}$$

を計算. さらに $\gamma_i = res(U_i, U'_i) \in K[A, r]$ に対して, $\mathbb{V}(Eq_{U_i}) \setminus \mathbb{V}(Not_{U_i} \cdot \gamma_i)$ のもとで同様の計算を行い, $V_i = 1$ の断片を GCD_{U_i, U'_i} に付け足す.

(ParaGCD-Step 3) : 各組 (i, j) に対する細胞での $T_{f_{i,j}} = S_f \cdot V_{i,j} / U_i^2$ を計算.

(ParaGCD-Step 4) : 各組 (i, j) に対する細胞での $CGS(\{T_{f_{i,j}}\} \cup \mathcal{G}, \prec_{A,B}) = \{Eq_{i,j,k}, Not_{i,j,k}, \{S_{i,j,k}\}\}$ を計算.

4.2 三つの手法の違い

これらの方法の違いは実装の複雑さと計算コストの大きさである. [Sat 1] は実装は最もシンプルであるが計算コストは最も大きく, [ParaGCD] はその逆であり, [Sat 2] は実装も計算もその中間に位置する. 実装については上述のステップの数を比べれば明らかで, 計算コストの大きさの違いは項順序によるものであり, その原因は消去順序のブロックの数と変数の個数である. (経験的に, 変数の個数よりもブロックの個数のほうがその影響が大きいことがわかっている.)

所見 4.2 *Shape* 基底を求めるには, $\prec_B$ は $b_{n-1} \prec B \setminus \{b_{n-1}\}$ なる消去順序でなければならない. 従って $\prec_B$ は $b_{n-1} \prec b_{n-2} \prec \dots \prec b_0$ なる辞書式順序でもよい. *Shape* 基底の計算において, この二種類の項順序 $\prec_B$ で実験をしてみたところ大差はないことがわかった. したがって $\prec_B$ のブロック数は 1 とみなしてもよいといえる.

よって, [ParaGCD] で使われている項順序は $\prec_{A, \{b_{n-1}\}}$ と $\prec_{A,B}$ でともにブロックの個数は 2 である. [Sat 2] の場合は $\prec_{A, \{b_{n-1}\}, \{y\}}$ と $\prec_{A,B}$ でブロックの数は 3 と 2 である. [Sat 1] が最も計算コストが大きいと考えられるのは, 項順序が $\prec_{A,B, \{y\}}$ でブロックの数が 3 であるのと [Sat 2] に比べて変数が多いからである.

5 数値実験の結果

多項式スペクトル分解 (2) の解 $g(x)$ の次数を n とし, $n = 3$ と 4 の場合で数値実験を行った. 実験環境は Xeon 2.66 GHz, メモリ 25 Gb である.

5.1 $n = 3$ のとき

最も計算コストの大きい [Sat 1] と最も小さい [ParaGCD] で数値実験を行ったところ, 双方ともに 全ての場合分けに対応する shape 基底を数秒で計算することができた.

5.2 $n = 4$ のとき

[Sat 1] で計算をしたところ, 計算できたのは (Sat1-Step 1) における最初の断片のみで, それ以外の断片はメモリ不足で計算できなかった.

[Sat 2] の計算結果は, (Sat2-Step 1) においていくつかの断片を計算することができた. しかしメモリ不足のため計算できない断片も存在するしたため, (Sat2-Step 1) の計算を達成することはできなかった.

[ParaGCD] ではすべての場合分けに対応する shape 基底を約 47 時間で計算することができた.

6 まとめ

$n = 3$ のときの計算コストは非常に小さく, どの三つの手法でも計算ができることがわかったが, $n = 4$ になると計算は飛躍的に難しくなることがわかり, その原因は変数とパラメータがともに一つずつ増えることにある. 従って $n = 5$ 以上の場合については, 非常に多くのメモリと時間が必要とされると予想される.

$n = 4$ のときの比較実験によって, 三つの手法のうち最も効果的なのはパラメータつきの場合の GCD を使った手法であることがわかった. また, パラメータつきの shape 基底の計算で重要なのは包括的グレブナー基底系を計算するときの消去順序のブロックの個数であることがわかった.

パラメータの部分だけに weight をつける, つまり $\{a_0, a_2, a_4\}$ のときは $\{3, 2, 1\}$, $\{a_0, a_2, a_4, a_6\}$ の場合は $\{4, 3, 2, 1\}$ とするのが有効であり, この weight を付けることによって計算時間は約 $1/4$ になった. この理由は,

$$x^{2n} + a_{2(n-1)}x^{2(n-1)} + a_2x^2 + a_0 = 0$$

の解と係数の関係からわかる.

今回は

$$f(x) = x^{2n} + a_{2(n-1)}x^{2(n-1)} + \dots + a_2x^2 + a_0 \in \mathbb{Z}[A, x]$$

に対しての実験であるが, 実際的な問題は, 例えば

$$f(x) = x^{2n} + a_{2(n-1)}(p_1, p_2)x^{2(n-1)} + \dots + a_2(p_1, p_2)x^2 + a_0(p_1, p_2) \in \mathbb{Z}[p_1, p_2, x], \quad a_i \in K[p_1, p_2]$$

のようにパラメータを 2, 3 個しか含まない多項式スペクトル分解を解くものである. この論文の結果は実際的な問題を解くにあたってそのキーポイントを与えるものであり, 上の例のようにパラメータが 2, 3 個しか含まない場合に, より大きな n に shape 基底系を計算できるかが今後の課題となる.

参 考 文 献

- [1] M. Kanno, K. Yokoyama, H. Anai and S. Hara, "Parametric optimization in control using the sum of roots for parametric polynomial spectral factorization", Proceedings of the 2007 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, ACM-Press, pp211-218, 2007.
- [2] D. Kapur, "Using Gröbner bases to reason about geometry problems", J. Symbolic Computation 2 (4), pp.399-408, 1986.
- [3] K. Nabeshima, "A speed-up algorithm for computing Comprehensive Gröbner systems", Proceedings of the International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, ACM-Press, pp.299-306, 2007.
- [4] 野呂正行, 横山和弘, グレブナー基底の計算 (基礎編), 東京大学出版, 2003.
- [5] A. Suzuki, and Y. Sato, "A simple algorithm to compute Comprehensive Gröbner Bases using Gröbner bases", International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, ACM-Press, pp326-331, 2006.