

擬 Fourier 変換の性質

鳥取大学教育学部 栗林幸男 (Yukio Kuribayashi)

§1. はじめに

我々は[8]において $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ 上で定義される関数 (複素数値とする。以下同様) $f(x, y)$ の擬 Fourier 変換 (pseudo-Fourier Transform) $\mathcal{P}\mathcal{F}(f, E_k)$ を定義し基本的な性質を示した。ひきつづいて[9]において (多項式) $\times e^x$ の形の関数の擬 Fourier 変換について述べた。それらの要点は次のとおりである。

(1) Schwartz 超関数 (distribution) の理論で知られている Fourier 変換の公式

$$\mathcal{F}(1) = 2\pi\delta, \quad \mathcal{F}(\delta) = 1, \quad \mathcal{F}(H) = \pi\delta - i.f.p.\frac{1}{x}$$

を超準解析を用いて証明した。

(2) Fourier 変換に関する次の形式的な公式を証明した。

$$\mathcal{F}(1 * 1) = \mathcal{F}(1)\mathcal{F}(1) = \delta^2.$$

(3) 関数 $f(x) = e^x$ の擬 Fourier 変換を $\mathcal{P}\mathcal{F}(e^t, E_2)$ とすると

$$\mathcal{P}\mathcal{F}(e^t, E_2)(x, y) = \left(\frac{\pi}{y}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4y} + \frac{1}{4y} - \frac{ix}{4y}\right)$$

であることを示した。

(4) $f_n(x) = x^n$, $g_n(x) = x^n e^x$, $n = 0, 1, 2, \dots$, の擬 Fourier 変換を求めた。

本論文の目的は次に示す二つである。

(A) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ 上で定義された関数 $f(x, y)$ の超関数 (hyperfunction) の意味での Fourier 変換 $\mathcal{F}(f)$ と擬 Fourier 変換 $\mathcal{P}\mathcal{F}(f, E_2)$ を比較すると両者の差は無限小であることを示す。

(B) (4) の結果を発展させる。

§2 準備

最初に超実数、超複素数および一般関数の定義をする。

2.1 定義 (1) 集合 $\mathbb{R}^+$ および F をそれぞれ

$$\mathbb{R}^+ = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}, \quad F = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}^+\}$$

とする。 F は有限交差性をもつ。 F を含む超フィルターのひとつを $\mathcal{F}_0$ とする。

K を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ または $\text{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ とする。ここで $\text{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ は実変数の複素数値関数全体の集合とする。

$a(y), b(y) \in \prod_{y \in \mathbb{R}^+} K$ に対し $\{y \in \mathbb{R}^+ \mid a(y) = b(y)\} \in \mathcal{F}_0$ が成立するとき $a(y) \sim b(y)$ と定める。このとき関係 $\sim$ は同値関係である。集合 *K を次のように定義する。

$${}^*K = \prod_{y \in \mathbb{R}^+} K / \sim.$$

$a(y)$ の同値類を $[a(y)]$ と書く。 ${}^*\mathbb{R}$ の元を超実数, ${}^*\mathbb{C}$ の元を超複素数と言う。加法, 減法, 乗法および除法を通常の方法で定義すると ${}^*\mathbb{R}, {}^*\mathbb{C}$ はいずれも可換体となる。しかも ${}^*\mathbb{R}$ は ${}^*\mathbb{C}$ の部分集合と考えられる。

$[f_y] \in {}^*\text{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), [x(y)] \in {}^*\mathbb{R}$ のとき ${}^*f([x(y)]) = [f_y(x(y))]$ によって *f を定義する。 *f を一般関数と言う。

本論文では $[x(y)] \in {}^*\mathbb{R}$ を $x(y) = x \in \mathbb{R}$ の場合, すなわち標準的な実数の場合に制限し, 記号は $[x(y)] = [x] = x$ のように用いる。

${}^*f([x]) = [f_y(x)]$ であるが我々は $f_y(x) = f(x, y)$ のように書く。また $[f(x, y)]$ の代りに代表元 $f(x, y)$ を用いて話を進めることにする。

特に $x(y) = y \quad y \in \mathbb{R}^+$, とすると $[x(y)] = [y]$ は正の無限小超実数である。このことを y は正の無限小であるという。

(2) $\mathcal{F}_0$ を (1) で定義した超フィルターとする。集合 $\mathcal{F}^2$ を次のように定義する。

$$\mathcal{F}^2 = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+) \mid \{y_1 \in \mathbb{R}^+ \mid \{y_2 \in \mathbb{R}^+ \mid (y_1, y_2) \in A\} \in \mathcal{F}_0\} \in \mathcal{F}_0\}.$$

我々は [7] において次の命題を証明した。

2.2 命題 $\mathcal{F}^2$ は超フィルターである。

本論文では測度、積分は Lebesgue の意味で用い、集合 L' を次のように定める。

$$L' = \{f \mid f \text{ は } (-\infty, \infty) \text{ で定義され, } |f| \text{ は可積分}\}.$$

また $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ 上で定義された関数 $f(x, y)$ は $y \in \mathbb{R}^+$ を固定するたびに可積分であると仮定する。

2.3 定義 集合 $\Omega^k, k=1, 2, \dots$, を

$$\Omega^k = \{f \mid \{(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \mid f(x, y) e^{-y|x|^k} \in L'\} \in \mathcal{F}^2\}$$

と定める。

記号 Ω^k は [8], [9] においても用いたが、本論文では定義をこのように修正した。

次の命題は明らかである。

2.4 命題 $L' \subset \Omega^1 \subset \Omega^2 \subset \dots \subset \Omega^k \subset \dots$.

2.5 定義 $f \in \Omega^k, E_k(x, y) = e^{-y|x|^k}, k=1, 2, \dots$, とし

$$A_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \mid f(x, y) E_k(x, y) \in L'\}$$

とおくと $A_0 \in \mathcal{F}_0^2$ をみたすものとする。

擬 Fourier 変換 $\mathcal{PF}(f, E_k)$ および擬 Fourier 逆変換 $\mathcal{PF}^{-1}(f, E_k)$ を次のように定義する。

$$\mathcal{PF}(f, E_k)(x, y, k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t, k) e^{-y|t|^k} e^{-ixt} dt \quad (k, y) \in A_0,$$

$$= 0 \quad (k, y) \notin A_0,$$

$$\mathcal{PF}^{-1}(f, E_k)(x, y, k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t, k) e^{-y|t|^k} e^{ixt} dt \quad (k, y) \in A_0,$$

$$= 0 \quad (k, y) \notin A_0.$$

このとき

$$\mathcal{PF}(f, E_k)(x, y, k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t, k) e^{-y|t|^k} e^{-ixt} dt \quad \text{a.e.}$$

のようを書く。 $\mathcal{PF}^{-1}(f, E_k)(x, y, k)$ の場合も同様である。

§3 空間 Ω^1 における擬 Fourier 変換

ここでは論旨を明確にするために [8] で述べた結果のいくつか (3.1 および 3.2) をあげておく。

3.1 例 (1) $f(x, y) = 1 \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ とする。 $f \in \Omega^1$ が成立する。 擬 Fourier 変換を $\mathcal{PF}(1, E_1)$ と書くと次のように表される。

$$\begin{aligned}
 \mathcal{PF}(1, E_1)(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y|t|} e^{-ixt} dt \\
 &= 2\pi \cdot \frac{y}{\pi(x^2 + y^2)} \\
 &= 2\pi \delta(x, y).
 \end{aligned}$$

これは Schwartz 超関数論における Fourier 変換の公式

$$\mathcal{F}(1) = 2\pi \delta$$

を超準解析を用いて表現したものと考えられる。

(2) $H(x)$ を Heaviside 関数, すなわち $H(x) = 1 \quad x \geq 0$,
 $H(x) = 0 \quad x < 0$, とする。 $H \in \Omega^1$ が成立する。

$$\begin{aligned}
 \mathcal{PF}(H, E_1)(x, y) &= \int_0^{\infty} e^{-yt} e^{-ixt} dt \\
 &= \frac{y}{x^2 + y^2} - i \frac{x}{x^2 + y^2} \\
 &= \pi \delta(x, y) - i \Omega(x, y).
 \end{aligned}$$

これは Schwartz 超関数論における Fourier 変換の公式

$$\mathcal{F}(H) = \pi \delta - i \text{p.f.} \frac{1}{x}$$

の超準解析を用いた表現と考えられる。

3.2 $f(x) \in \Omega^1$ とし A_0 は定義 2.5 における集合とする。

ここでは $(x, y) \in A_0$ とし て論ずる。

$$\begin{aligned}
 \mathcal{PF}(f, E_1)(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-y|t|} e^{-ixt} dt \\
 &= \int_0^{\infty} f(t) e^{-i(x-iy)t} dt + \int_{-\infty}^0 f(t) e^{-i(x+iy)t} dt,
 \end{aligned}$$

であるから

$$F_+(z) = \int_{-\infty}^0 e^{-izt} f(t) dt \quad z = x+iy,$$

$$-F_-(z) = \int_0^{\infty} e^{-izt} f(t) dt \quad z = x-iy,$$

とおくと

$$\mathcal{P}\mathcal{F}(f, E_1)(x, y) = F_+(z) - F_-(z)$$

が得られる。従って $\mathcal{P}\mathcal{F}(f, E_1)$ は関数 $f(x)$ の超関数の意味での Fourier 変換と考えられる。

次に超関数 $f(x)$ の Fourier 変換 $\mathcal{F}(f)$ を超導解析を用いて考察する。

$f(x)$ を $\mathcal{R}$ 上の超関数とし、 $F(z)$ をその定義関数とする。すなわち境界値表示を採用すると

$$f(x) = F_+(x+i0) - F_-(x-i0)$$

と表されるものとする。このとき我々は

$$f(x, y) = F_+(x+iy) - F_-(x-iy) = H.F. F(z)$$

のまうに表すことにする。

3.5 定理 $f(t, s) = F_+(t+is) - F_-(t-is) = H.F. F(w)$,

$w = t+is$, おかつ $f \in \Omega^1$ とする。 s を正の無限小とすると次の近似式が成立する。

$$\mathcal{PF}(f, E_1)(x, y, s) \doteq \mathcal{F}(f)(x, y) \quad x \in \mathbb{R}.$$

証明 集合 A_0 は定義 2.5 の場合と同様とし, $(x, y) \in A_0$ として証明する。

$$\begin{aligned} G_+(z) = G_+(x+iy) &= \int_{-\infty}^0 F_+(t+is) e^{-i(x+iy)(t+is)} dt \\ &\quad - \int_{-\infty}^0 F_-(t-is) e^{-i(x+iy)(t-is)} dt, \\ -G_-(z) = -G_-(x-iy) &= \int_0^{\infty} F_+(t+is) e^{-i(x-iy)(t+is)} dt \\ &\quad - \int_0^{\infty} F_-(t-is) e^{-i(x-iy)(t-is)} dt, \end{aligned}$$

とおくと

$$\mathcal{F}(f)(z) = G_+(z) - G_-(z)$$

である。次に f の擬 Fourier 変換 $\mathcal{PF}(f, E_1)$ を求める。

$$\begin{aligned} \mathcal{PF}(f, E_1)(x, y, s) &= \int_{-\infty}^0 F_+(t+is) e^{-i(x+iy)t} dt \\ &\quad - \int_{-\infty}^0 F_-(t-is) e^{-i(x+iy)t} dt \\ &\quad + \int_0^{\infty} F_+(t+is) e^{-i(x-iy)t} dt \\ &\quad - \int_0^{\infty} F_-(t-is) e^{-i(x-iy)t} dt, \end{aligned}$$

であり s は正の無限小であるから次の近似式が成立する。

$$\int_{-\infty}^0 F_+(t+is) e^{-i(x+iy)(t+is)} dt \doteq \int_{-\infty}^0 F_+(t+is) e^{-i(x+iy)t} dt,$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 F_-(t-is) e^{-i(x+iy)(t-is)} dt &\doteq \int_{-\infty}^0 F_-(t-is) e^{-i(x+iy)t} dt, \\ \int_0^{\infty} F_+(t+is) e^{-i(x-iy)(t+is)} dt &\doteq \int_0^{\infty} F_+(t+is) e^{-i(x-iy)t} dt, \\ \int_0^{\infty} F_-(t-is) e^{-i(x-iy)(t-is)} dt &\doteq \int_0^{\infty} F_-(t-is) e^{-i(x-iy)t} dt. \end{aligned}$$

従って我々は次の近似式を得る。

$$\mathcal{F}(f)(x, y) \doteq \mathcal{PF}(x, y, s) \quad x \in \mathcal{R}.$$

§ 4 空間 Ω^2 における擬 Fourier 変換

本節でも前節同様 [8] および [9] で述べた結果の要点 (4.1 ~ 4.7) をあげておく。

$$4.1 \quad f \in \Omega^2 \text{ とする。 } \frac{d}{dx} \mathcal{PF}(f, E_2)(x, y, s) = \mathcal{PF}(-itf, E_2)(x, y, s).$$

$$4.2 \quad f, g \in \Omega^2, \alpha, \beta \in \mathbb{C} \text{ とする。}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{PF}(\alpha f + \beta g, E_2)(x, y, s) &= \alpha \mathcal{PF}(f, E_2)(x, y, s) \\ &\quad + \beta \mathcal{PF}(g, E_2)(x, y, s). \end{aligned}$$

$$4.3 \quad f(x) = e^x \text{ の擬 Fourier 変換を } \mathcal{PF}(e^t, E_2) \text{ と書く。}$$

$$\mathcal{PF}(e^t, E_2)(x, y) = \left(\frac{\pi}{y}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4y} + \frac{1}{4y} - \frac{ix}{2y}\right).$$

$$4.4 \quad \text{補題} \quad \int_{-\infty}^{\infty} t^{2j} e^{-yt^2} dt = \left(\frac{\pi}{y}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{(2j)!}{2^{2j} j!} \cdot \frac{1}{y^j}.$$

関数 $f(x) = x^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, の擬 Fourier 変換を $\mathcal{P}\mathcal{F}$
 $(t^n, E_2)(x, y)$ と書くと次の結果が得られる。

$$4.5 \quad (1) \quad \mathcal{P}\mathcal{F}(t^{2k+1}, E_2)(x, y) \\
= -i \left(\frac{\pi}{y} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (2k+2j+2)!}{2^{2(k+j+1)} (2j+1)! (k+j+1)!} \frac{x^{2j+1}}{y^{k+j+1}}, \quad k=0, 1, \dots$$

$$(2) \quad \mathcal{P}\mathcal{F}(t^{2k}, E_2)(x, y) \\
= \left(\frac{\pi}{y} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (2k+2j)!}{2^{2(k+j)} (2j)! (k+j)!} \cdot \frac{x^{2j}}{y^{k+j}}, \quad k=0, 1, 2, \dots$$

4.6 4.5 (2) において $k=0$ の場合は次のように表される。

$$\mathcal{P}\mathcal{F}(1, E_2)(x, y) = \left(\frac{\pi}{y} \right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4y}\right).$$

4.7 $f(x) = x^k e^x$, $k = 1, 2, \dots$, の擬 Fourier 変換を $\mathcal{P}\mathcal{F}$
 $(t^k e^t, E_2)(x, y)$ と書く。

$$\mathcal{P}\mathcal{F}(t^k e^t, E_2)(x, y) \\
= \exp\left(\frac{1}{4y} - \frac{ix}{2y}\right) \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} \left(\frac{1}{2y}\right)^{k-\ell} \int_{-\infty}^{\infty} u^{\ell} \exp(-yu^2) \exp(-ixu) du.$$

我々はこれらの結果を用いて次の結果を得る。

記号はこれまでと同様に用いるので特にことわらない。

$$4.8 \quad \text{命題} \quad \mathcal{P}\mathcal{F}(e^{2t}, E_2)(x, y) = \left(\frac{\pi}{y} \right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4y} + \frac{1}{y} - \frac{ix}{y}\right).$$

証明 4.3 の場合と同様であるから省略する。

4.9 命題 $\mathcal{PF}(e^t, E_2)(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathcal{PF}(t^k, E_2)(x, y).$

証明 $e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}$ であるから

$$\begin{aligned} \mathcal{PF}(e^t, E_2)(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \right) e^{-yt^2} e^{-ixt} dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_{-\infty}^{\infty} t^k e^{-yt^2} e^{-ixt} dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathcal{PF}(t^k, E_2)(x, y). \end{aligned}$$

4.10 系 $\left(\frac{\pi}{y}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4y} + \frac{1}{4y} - \frac{ix}{2y}\right)$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathcal{PF}(t^k, E_2)(x, y).$$

命題 4.8 を用いて次の命題を得られる。

4.11 命題 $\mathcal{PF}(e^{2t}, E_2)(x, y)$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathcal{PF}((2t)^k, E_2)(x, y) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} \mathcal{PF}(t^k, E_2)(x, y) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathcal{PF}(t^k e^t, E_2)(x, y) \\ &= \left(\frac{\pi}{y}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4y} + \frac{1}{y} - \frac{ix}{y}\right). \end{aligned}$$

公式 $\sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)$, $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)$ および

$\sin t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^{2k+1}$, $\cos t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} t^{2k}$ を用いて次の命題

を得る。

$$4.12 \text{ 命題 (4)} \quad \mathcal{PF}(\sin t, E_2)(x, y) \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \mathcal{PF}(t^{2k+1}, E_2)(x, y)$$

$$(2) \quad \mathcal{PF}(\cos t, E_2)(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \mathcal{PF}(t^{2k}, E_2)(x, y).$$

$$(3) \quad \mathcal{PF}(\sin^2 t, E_2)(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \mathcal{PF}(t^{2k+1} \sin t, E_2)(x, y) \\ = \frac{1}{2} \mathcal{PF}(1, E_2)(x, y) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k-1}}{(2k)!} \mathcal{PF}(t^{2k}, E_2)(x, y).$$

$$(4) \quad \mathcal{PF}(\cos^2 t, E_2)(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \mathcal{PF}(t^{2k} \cos t, E_2)(x, y) \\ = \frac{1}{2} \mathcal{PF}(1, E_2)(x, y) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k-1}}{(2k)!} \mathcal{PF}(t^{2k}, E_2)(x, y).$$

参 考 文 献

- [1] A. E. Hurd and P. A. Loeb, An Introduction to Nonstandard Real Analysis, Academic, Orlando, 1985.
- [2] 猪狩 惺, フーリエ級数, 岩波書店, 東京, 1975.
- [3] 猪狩 惺, 実解析入門, 岩波書店, 東京, 1996.
- [4] A. Kaneko, Introduction to Hyperfunctions, TKT Scientific, Tokyo, 1988.
- [5] 河田龍夫, FOURIER 解析, 産業図書, 東京, 1975.

- [6] A. G. Koursraev and S. S. Kutateladze, *Nonstandard Methods of Analysis*, Kluwer Academic, Dordrecht, 1994.
- [7] Y. Kuribayashi, *On Sets of Hyperreal Numbers*, *Anal. Acad. Nac. Cs. Ex. Fis. Nat.*, Buenos Aires 45 (1993), 251-255.
- [8] 栗林幸男, 超準解析を用いた Fourier 変換, 京都大学数理解析研究所講究録 975 (1996), 132-144.
- [9] 栗林幸男, 擬 Fourier 変換について, 京都大学数理解析研究所講究録 1039 (1998), 152-164.
- [10] 齋藤正彦, 超積と超準解析, 増補新版, 東京図書, 東京, 1987.
- [11] A. Robinson, *Non-standard Analysis*, Princeton University Press, revised edition, 1996, Originally published by North-Holland 1966.
- [12] 中村 徹, 超準解析と物理学, 日本評論社, 東京, 1998.