

液晶の方向性相互作用の連続体力学的考察

東理大・理工 池田 恵

(3月15日受理)

1. はじめに

この論文では、前論文¹⁾でのべた幾何学的取扱いを、もう少し現実的な条件と合致させ、併せて形式上の整備を徹底的、物理的に行いたい。即ち、前論文¹⁾では、通常の方法の把握の仕方に対する我々の認識過程を強調してきたが、ここでは、その続きとして、方向特性をひき起すべき物理的相互作用の把握について考えたい。連続体力学基礎論の立場からは、相互作用というものが二つの代表的な部分空間間の写像関係として把握されることをみてきたが²⁾、ここでも、その線を延長して、液晶の方向特性とのかかわり合いを強調する態度で議論していきたい。

この論文では、専ら物理的相互作用場²⁾を中心とした議論を展開する。即ち、液晶の方向特性を分子軸配向で代表させ、Frankらの如く³⁾⁵⁾、その位置的变化に着目するのだが、彼らとのちがいは我々はそれを線型化して扱っていることと、方向の変化に寄与する要因として、変形のみならず、外場(磁場など)の作用をも同時にとり入れていることである。つまり、分子軸配向の方向変化に寄与する相互作用として、変位(位置変化)と外場の作用とを陽にとりだし、そこに介在する、それぞれの相互作用係数が、再び位置と外場の関数であることを初めから仮定して、非線型化して扱うことを試みる。そうして、更に、我々が認識する液晶体系の方向特性及びその変化というものが、幾何学的不変量であるべく、液晶全体系の構造を、我々の言うところの物理的相互作用場の構造として把握することを試みる。そうすることにより、液晶の方向特性(分子軸配向性)を支配している相互作用(変形からの、あるいは外場からの、寄与そのもの)の全体系に及ぼす影響が、場の構造論的に明確に把握できることになり、従来の理論で着目されてきた諸々の量(例えば、曲率歪³⁾とか、磁場による“ねじり”⁶⁾とか)の物理的及び幾何学的意味が、より厳密な、そして使われている言葉の真の意味に対応した形で認識されることにな

る。

尚，相互作用係数の函数型については，独立変数への依存性を一般的にとらえるために，そして，特に外場の寄与に注目するために，外場変数で展開して扱ってある。そうすることにより，相互作用の order を明確にし，何次の order の作用がきいてくるかを議論することができる。

この論文での議論は，我々が考えているところの“方向性物体の連続体力学”からの基礎的考察を借りてきたものであることをつけ加えておきたい。

2. 分子配向性と相互作用

液晶の分子配列についての方向特性が，連続体描像としては，場所的に規定されているものと仮定する故に，表面に出現すべきは Frank³⁾ などのいう曲率，あるいは曲率歪であることを注目すべきである。つまり，分子軸方向が，顕微鏡下での観測などを通して，巨視的に本質的な形態を示しているとみなされる。それ故，我々としても，この方向 (M^κ) の場所的变化 ($\frac{d M^\kappa}{d x^\mu}$) に着目してきたところである¹⁾。

ところで，その方向変化 ($d M^\kappa$) というものは，より厳密に言えば——それが連続的变化とみなされる限りにおいて——位置的变化 ($d x^\lambda$) と，もう一つ，外場 (電場，磁場，etc) の効果に依存しているとみなされて然るべきである。この様な一般的立場では，線素 $d x^\kappa$ についても，外場の作用の結果，表面に実体として出現すべきは，元々の純変形場の量とはちがった，物理的線素であると考えられる。よって，以上をまとめると，

$$\left. \begin{aligned} d M^\sigma &= C_\lambda^\sigma d x^\lambda + C_\sigma^\sigma d F^\sigma, \\ d x^\kappa &= B_\lambda^\kappa d x^\lambda + B_\sigma^\kappa d F^\sigma \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

となる。ここでは，まず，外場 F^σ の作用が存在しているとみなして，それからの寄与が分子軸配向へは C_σ^σ ，位置的变化 (分子間距離) に対しては B_σ^κ による相互作用として把握され，又，元の位置的距離 $d x^\kappa$ に対しての，はみだしの寄与が B_λ^κ ， C_λ^σ によって表わされる事になる。ということは，自由度の性格として，初期状態としては $(d x^A) \equiv (d x^\kappa, d F^\sigma)$ なる線素によ

って支配された場が存在していて、それに相互作用 ($B_A^{\kappa'}$, $C_B^{\sigma'}$) なる変換作用素が作用した結果として ($dx^{\kappa'}$, $dM^{\sigma'}$) の場が得られることを示している。(2.1) は、正に、接続テンソル解析⁴⁾ における、非ホノローム部分空間分解に相当してくる。(2.1) において、外場の作用を陽に考えない場合には、 $C_\sigma^{\sigma'}$, $B_\sigma^{\kappa'}$ は考えなくてよいから、

$$dM^{\sigma'} = C_\lambda^{\sigma'} dx^\lambda, \quad dx^{\kappa'} = B_\lambda^{\kappa'} dx^\lambda \quad (2.2)$$

帰着するが、純変形に注目しない限り $B_\lambda^{\kappa'} = \delta_\lambda^{\kappa'}$ とおける。そして、 $C_\lambda^{\sigma'}$ は曲率歪に他ならない。

かくして、我々が、より一般的に外場との相互作用を陽にとりあげて、(2.2) ではなく(2.1) の形で規定していく限り、Frank³⁾ よりも、より一般的、かつ微視的な立場に立っていることがわかるであろう。尚、以下では簡単のために、(2.1) においても、一応、 $B_\lambda^{\kappa'} = \delta_\lambda^{\kappa'}$ とおいて考えていくが、形式的には(2.1) のままを用いればよいことを注意しておく。

3. 方向特性 $M^{\sigma'}$ についての場の構造

全体像として実体的に把握されてくるのは ($dx^{\kappa'}$, $dM^{\sigma'}$) であることがいえ、各相互作用係数 $B_A^{\kappa'}$, $C_B^{\sigma'}$, etc. の物理的意味と構造が問題となるに至った。そこで、我々としては、この様な非ホノローム分解—非ホノローム—ということは、相互作用の非線型性に由来してくる—によって、着目する方向特性 $M^{\sigma'}$ の場の構造を考慮しなければならない。通常の数学理論⁴⁾ に従っていけばよいが、逐一のべることはやめて、専ら $M^{\sigma'}$ に関するもののみを取りだそう。

まず、 $M^{\sigma'}$ の位置的变化という名目で着目される量は、曲率歪であるが、今の場合、 X_μ , $M^{\sigma'}$ を用いねばならぬ。但し、偏微分操作としては、(2.1) より

$$\left. \begin{aligned} X_{\mu'} &= B_{\mu'}^A \partial_A = B_{\mu'}^\lambda \partial_\lambda + B_{\mu'}^\sigma \partial_\sigma; \partial_{\mu'} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu'}} \\ X_{\sigma'} &= C_{\sigma'}^B \partial_B = C_{\sigma'}^\lambda \partial_\lambda + C_{\sigma'}^\rho \partial_\rho; \partial_{\sigma'} = \frac{\partial}{\partial F^{\sigma'}} \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

を用いねばならぬ。

このことは、幾何学的には $M^{\sigma'}$ についての接続を考えることに他ならず、
今、共変微分を

$$\delta M^{\sigma'} = dM^{\sigma'} + \Gamma_{\mu', \rho'}^{\sigma'} M^{\rho'} dx^{\mu'} + \Gamma_{\tau', \rho'}^{\sigma'} M^{\rho'} dM^{\tau'} \quad (3.2)$$

と定義すると、共変微分商としては、

$$\left. \begin{aligned} \nabla_{\mu'} M^{\sigma'} &= X_{\tau'} M^{\sigma'} + \Gamma_{\tau', \rho'}^{\sigma'} M^{\rho'} \\ \nabla_{\tau'} M^{\sigma'} &= X_{\tau'} M^{\sigma'} + \Gamma_{\tau', \rho'}^{\sigma'} M^{\rho'} \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

が得られ、仮定として、各点での方向特性が物理的容易方向を向いているものとする
とすれば、その意味で“平行”といえるから、 $\nabla_{\mu'} M^{\sigma'} = 0$ とおけ、又、
 $\nabla_{\tau'} M^{\sigma'} = \delta_{\tau'}^{\sigma'}$ とおくと、

$$\left. \begin{aligned} X_{\mu'} M^{\sigma'} &= -\Gamma_{\mu', \rho'}^{\sigma'} M^{\rho'} \quad (\equiv \kappa_{\mu'}^{\sigma'}) \\ \Gamma_{\tau', \rho'}^{\sigma'} M^{\rho'} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

なる条件を得る。従って、曲率歪 ($\kappa_{\mu'}^{\sigma'}$) なる概念は、接続係数 $\Gamma_{\mu', \rho'}^{\sigma'}$ によって代表されるものであることがわかる。(3.4)₂ の条件は、
 $\Gamma_{\tau', \rho'}^{\sigma'}$ の斉次性条件といえる。

Frank³⁾, Oseen⁵⁾, Zocher⁶⁾ などで着目されている如く、分子軸配向及びその外場、変形による変化にとっては、“ねじり”の効果が本質的な役割を果し、それは $\Gamma_{\mu', \rho'}^{\sigma'}$ による振率成分の出現といえ、又、(2.1)なる変換の非ホロノーム性ともいえる。そこで、その非ホロノーム性を代表するものとして、 $M^{\sigma'}$ についての非ホロノーム対象を考えると、次の様に与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \Omega_{\mu', \rho'}^{\kappa'} &= -\frac{1}{2} (X_{\mu'}, C_{\sigma'}^A, -X_{\sigma'}, B_{\mu'}^A) B_A^{\kappa'}, \\ \Omega_{\mu', \sigma'}^{\rho'} &= -\frac{1}{2} (X_{\mu'}, C_{\sigma'}^A, -X_{\sigma'}, B_{\mu'}^A) C_A^{\rho'}, \end{aligned} \right\}$$

$$\mathcal{Q}_{\mu', \lambda'}^{\sigma'} = -\frac{1}{2} (X_{\mu', B_{\lambda'}^A}, -X_{\lambda', B_{\mu'}^A}) C_A^{\sigma'} \quad (3.5)$$

又、この場合、接続係数は、 (x^κ, F^σ) -場のそれ ε_{CB}^A から、それぞれ次の様に与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{\mu', \rho'}^{\sigma'} &= B_{\mu'}^C C_A^{\sigma'} C_{\rho'}^B \varepsilon_{CB}^A + C_A^{\sigma'} X_{\mu'} C_{\rho'}^A \\ \Gamma_{\tau', \rho'}^{\sigma'} &= C_{\tau'}^C C_A^{\sigma'} C_{\rho'}^B \varepsilon_{CB}^A + C_A^{\sigma'} X_{\tau'} C_{\rho'}^A \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

今、簡単のために、 $\varepsilon_{CB}^A = 0$ と仮定すると一遠隔平行性の仮定で、これは $M^{\sigma'}$ の平行性より正当づけられる—(3.6)は

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{\mu', \rho'}^{\sigma'} &= C_A^{\sigma'} X_{\mu'} C_{\rho'}^A \\ \Gamma_{\tau', \rho'}^{\sigma'} &= C_A^{\sigma'} X_{\tau'} C_{\rho'}^A \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

となる。従って、振率テンソルとしては

$$\left. \begin{aligned} S_{\mu', \rho'}^{\sigma'} &= \Gamma_{[\mu', \rho']}^{\sigma'} = -\mathcal{Q}_{\mu', \rho'}^{\sigma'} \\ S_{\tau', \rho'}^{\sigma'} &= \Gamma_{[\tau', \rho']}^{\sigma'} = -\mathcal{Q}_{\tau', \rho'}^{\sigma'} \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

が得られることになり、 R - C 曲率テンソルは全て消失する。曲率として相互作用に関係あるのは、 E - S テンソルであり、それは

$$\left. \begin{aligned} H_{\mu', \lambda'}^{\sigma'} &= (\nabla_{\mu'} B_{\lambda'}^A) C_A^{\sigma'} \doteq \Gamma_{\mu', \lambda'}^{\sigma'} \\ H_{\mu', \sigma'}^{\kappa'} &= (\nabla_{\mu'} C_{\sigma'}^A) B_A^{\kappa'} \doteq \Gamma_{\mu', \sigma'}^{\kappa'} \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

で与えられる。Frank 流に、 $\kappa_{\mu'}^{\sigma'}$ を基本とする立場をとる故、微分操作は $X_{\mu'}$ 、 $\nabla_{\mu'}$ を基準とし、 $M^{\sigma'}$ の位置的变化に着目するから、場の構造としては、 $\Gamma_{\mu', \rho'}^{\sigma'}$ を中心にして、テンソル量としては

$$(S_{\mu'; \lambda'}^{\sigma'}, S_{\mu'; \sigma'}^{\lambda'}, S_{\mu'; \sigma'}^{\rho'}, H_{\mu'; \lambda'}^{\sigma'}, H_{\mu'; \sigma'}^{\kappa'}) \text{ が}$$

池田 恵

考えられねばならぬが、本質的なものは $(S_{\mu;\sigma}^{\rho'}, H_{\mu;\lambda}^{\sigma'}, H_{\mu;\sigma}^{\kappa'})$ の三種が残ってくる。ここにまとめておくと、次の様である。

$$\left. \begin{aligned} S_{\mu;\sigma}^{\rho'} &= \frac{1}{2} (X_{\mu}, C_{\sigma}^A, -X_{\sigma}, B_{\mu}^A) C_A^{\rho'} \\ &= \frac{1}{2} (X_{\mu}, C_{\sigma}^{\kappa'}) C_{\kappa}^{\rho'} + \frac{1}{2} (X_{\mu}, C_{\sigma}^{\rho}, -X_{\sigma}, B_{\mu}^{\rho}) C_{\rho}^{\rho'}, \\ H_{\mu;\lambda}^{\sigma'} &\doteq (X_{\mu}, B_{\lambda}^A) C_A^{\sigma'} = (X_{\mu}, B_{\lambda}^{\sigma'}) C_{\sigma}^{\sigma'}, \\ H_{\mu;\sigma}^{\kappa'} &\doteq (X_{\mu}, C_{\sigma}^A) B_A^{\kappa'} = (X_{\mu}, C_{\sigma}^{\kappa'}) \delta_{\kappa}^{\kappa'} + \\ &\quad (X_{\mu}, C_{\sigma}^{\rho}) B_{\rho}^{\kappa'}. \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

4. 相互作用の特殊化 - その1.

前節でのべた形の一般論は、前論文¹⁾でものべたところであり、問題は相互作用係数 C_{σ}^A , $B_A^{\kappa'}$, etc. の物理的条件である。これらを一般形式のまま扱うことも全体構造の見通しを得るには有効であるが、もう少し、特殊化した、液晶などで問題となりうる形に縮退させることも必要であろう。そこで、以下では、その特殊化の具体例を、二・三考えていこうと思う。

まず、(2.1), 即ち

$$\left. \begin{aligned} dM^{\sigma'} &= C_{\lambda}^{\sigma'} dx^{\lambda} + C_{\sigma}^{\sigma'} dF^{\sigma}, \\ dx^{\kappa'} &= \delta_{\lambda}^{\kappa'} dx^{\lambda} + B_{\sigma}^{\kappa'} dF^{\sigma} \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

の形の規定において、その逆関係は

$$\left. \begin{aligned} X_{\mu,\lambda} &= \delta_{\mu,\lambda}^{\lambda} \partial_{\lambda} + B_{\mu,\sigma}^{\sigma} \partial_{\sigma}, \\ X_{\sigma,\lambda} &= C_{\sigma,\lambda}^{\lambda} \partial_{\lambda} + C_{\sigma,\rho}^{\rho} \partial_{\rho} \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

で与えられることを指摘しておこう。その際の仮定は、外場の効果がない時の、純変形場としてのふるまいについての特殊化であったわけだから、(4.1)、(4.2)においても、そのことを徹底させると、 $C_{\sigma}^{\lambda'}$ 、 $C_{\kappa}^{\sigma'}$ は x^{μ} のみの函数と仮定でき、従って $\partial_{\sigma} C_{\kappa}^{\sigma'} = 0$ 、 $\partial_{\sigma} C_{\sigma}^{\lambda'} = 0$ とおける。又、逆に、変数分離が完全に行なわれることになるから、 $C_{\sigma}^{\sigma'}$ 、 $B_{\sigma}^{\kappa'}$ は F^{σ} のみの函数といえ、 $\partial_{\mu} C_{\sigma}^{\sigma'} = 0$ 、 $\partial_{\lambda} B_{\sigma}^{\kappa'} = 0$ などとおける。この場合、 $X_{\mu} \cdot C_{\sigma}^{\kappa'} = \partial_{\mu} \cdot C_{\sigma}^{\kappa'}$ ($\partial_{\mu} \cdot \equiv \delta_{\mu}^{\mu} \cdot \partial_{\mu}$)、 $X_{\mu} \cdot C_{\sigma}^{\sigma'} = B_{\mu}^{\rho} \cdot \partial_{\rho} C_{\sigma}^{\sigma'}$ などとなるから、(3.10)は

$$S_{\mu \cdot \sigma \cdot \rho'} = \frac{1}{2} (\partial_{\mu} \cdot C_{\sigma}^{\kappa'}) C_{\kappa}^{\rho'} - \frac{1}{2} (B_{\mu}^{\tau} \cdot \partial_{\tau} C_{\sigma}^{\rho'} - C_{\sigma}^{\tau} \cdot \partial_{\tau} B_{\mu}^{\rho'}) C_{\rho}^{\rho'}$$

$$H_{\mu \cdot \lambda \cdot \sigma'} = (B_{\mu}^{\tau} \cdot \partial_{\tau} B_{\lambda}^{\sigma'}) C_{\sigma}^{\sigma'}$$

$$H_{\mu \cdot \sigma \cdot \kappa'} = (\partial_{\mu} \cdot C_{\sigma}^{\kappa'}) \delta_{\kappa}^{\kappa'} + (B_{\mu}^{\tau} \cdot \partial_{\tau} C_{\sigma}^{\rho'}) B_{\rho}^{\kappa'}$$

(4.3)

となる。そこで、今、これら ($C_{\sigma}^{\kappa'}$ 、 $C_{\lambda}^{\rho'}$ 、 $B_{\mu}^{\sigma'}$ 、 $B_{\rho}^{\kappa'}$ 、 $C_{\sigma}^{\sigma'}$ 、 $C_{\rho}^{\rho'}$) に対して、

$$C_{\rho}^{\rho'} = \delta_{\rho}^{\rho'} + r'_{\rho}^{\rho'} \quad (F)$$

$$B_{\sigma}^{\kappa'} = \delta_{\sigma}^{\kappa'} + \beta_{\sigma}^{\kappa'} \quad (F)$$

$$C_{\kappa}^{\sigma'} = \delta_{\kappa}^{\sigma'} + r_{\kappa}^{\sigma'} \quad (x)$$

(4.4)

などと純粋の相互作用をとりだすことにし、それぞれ ($r_{\sigma}^{\kappa'}$ 、 $r_{\lambda}^{\rho'}$ 、 $\beta_{\mu}^{\sigma'}$ 、 $\beta_{\rho}^{\kappa'}$ 、 $r'_{\rho}^{\sigma'}$ 、 $r'_{\rho}^{\rho'}$) で代表させることにし、かつ、 β 、 r 、 r' についての

の二次以上の量を省略することになると、(4.3)は、次の様になる。

$$S_{\mu \cdot \sigma \cdot \rho'} = \frac{1}{2} \partial_{\mu} \cdot r_{\sigma}^{\rho'} \quad (x) - \frac{1}{2} (\partial'_{\mu} \cdot r'_{\sigma}^{\rho'} \quad (F) - \partial_{\sigma} \cdot \beta_{\mu}^{\rho'} \quad (F))$$

$$H_{\mu} ; \dot{\lambda}, {}^{\sigma'} = \partial'_{\mu}, \beta_{\lambda}^{\sigma'} (F)$$

$$H_{\mu} ; \dot{\sigma}, {}^{\kappa'} = \partial_{\mu}, r_{\sigma}^{\kappa'} (x) + \partial'_{\mu}, r'_{\sigma}^{\kappa'} (F)$$

(4.5)

但し, $\partial_{\sigma}, \equiv \delta_{\sigma}^{\sigma}, \partial_{\sigma}, \partial'_{\mu}, \equiv \delta_{\mu}^{\tau}, \partial_{\tau}$ とおき, δ による指標のおきかえを各量について行なった。

この段階で $r_{\sigma}^{\kappa'}, (x)$ による項は, $\partial_{\mu} r_{\sigma}^{\kappa'}, (x)$ 形によって回転歪の寄与としてとらえられ,

$$\kappa_{\mu}^{\sigma'} = \delta_{\mu}^{\sigma'} + r_{\mu}^{\sigma'} (x) + r'_{\mu}^{\sigma'} (F) + \beta_{\mu}^{\sigma'} (F) \quad (4.6)$$

故に, β, r, r' の函数型によって分子配列の諸形態が分類されることになる。従って, 我々は, よりミクロに, その位置的, 外場的变化を問題にすることになる。トルクとか, 曲率歪に比例する応力成分というものも, この二次の段階まで取入れなければならないことはいうまでもない。

今, 簡単のために F のみに依存する項を F^{σ} で展開し, 定数項を度外視して

$$\left. \begin{aligned} r'_{\sigma}^{\rho} (F) &= r'_{\sigma}^{\rho}, {}_{\tau} F^{\tau} + \frac{1}{2} r'_{\sigma}^{\rho}, {}_{\tau\sigma} F^{\sigma} F^{\tau} + \dots \\ \beta_{\mu}^{\rho} (F) &= \beta_{\mu}^{\rho}, {}_{\tau} F^{\tau} + \frac{1}{2} \beta_{\mu}^{\rho}, {}_{\tau\sigma} F^{\tau} F^{\sigma} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

とおくとすると, (4.5), (4.6) は

$$S_{\mu} ; \dot{\sigma}, {}^{\rho'} = \frac{1}{2} \partial_{\mu}, r_{\sigma}^{\rho'} - \frac{1}{2} \{ r'_{\sigma}^{\rho'}, {}_{\mu} + r'_{\sigma}^{\rho'}, {}_{\mu\sigma} F^{\sigma} \} - (\beta_{\mu}^{\rho'}, {}_{\sigma} + \beta_{\mu\sigma}^{\rho'}, {}_{\sigma} F^{\sigma}) \}$$

$$H_{\mu} ; \dot{\lambda}, {}^{\sigma'} = \beta_{\lambda}^{\sigma'}, {}_{\mu} + \beta_{\lambda}^{\sigma'}, {}_{\mu\sigma} F^{\sigma},$$

$$H_{\mu} ; \dot{\sigma}, {}^{\kappa'} = \partial_{\mu}, r_{\sigma}^{\kappa'} + r'_{\sigma}^{\kappa'}, {}_{\mu} + r'_{\sigma}^{\kappa'}, {}_{\mu\sigma} F^{\sigma}$$

(4.8)

$$\begin{aligned} \kappa_{\mu'}^{\sigma'} = & \delta_{\mu'}^{\sigma'} + r_{\mu'}^{\sigma'} + r'_{\mu' \tau}{}^{\sigma'} F^{\tau} + \frac{1}{2} r'_{\mu' \tau \sigma}{}^{\sigma'} F^{\tau} F^{\sigma} \\ & + \beta_{\mu' \tau}^{\sigma'} F^{\tau} + \frac{1}{2} \beta_{\mu' \tau \sigma}^{\sigma'} F^{\tau} F^{\sigma} \end{aligned} \quad (4.9)$$

となる。 F と $(-F)$ とが同値ならば、展開の際の F^{σ} の一次項は消失し、
(4.8), (4.9) は

$$\begin{aligned} S_{\mu'; \sigma'}^{\rho'} &= \frac{1}{2} \partial_{\mu'} r_{\sigma'}^{\rho'} - \frac{1}{2} (r'_{\sigma' \mu' \sigma}{}^{\rho'} - \beta_{\mu' \sigma' \sigma}^{\rho'}) F^{\sigma}, \\ H_{\mu'; \lambda'}^{\sigma'} &= \beta_{\lambda' \mu' \sigma}^{\sigma'} F^{\sigma}, \\ H_{\mu'; \sigma'}^{\kappa'} &= \partial_{\mu'} r_{\sigma'}^{\kappa'} + r'_{\sigma' \mu' \sigma}{}^{\kappa'} F^{\sigma}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\kappa_{\mu'}^{\sigma'} = \delta_{\mu'}^{\sigma'} + r_{\mu'}^{\sigma'} + \frac{1}{2} (r'_{\mu' \tau \sigma}{}^{\sigma'} + \beta_{\mu' \tau \sigma}^{\sigma'}) F^{\tau} F^{\sigma} \quad (4.11)$$

に帰着する。

D. S. M. の如く、純粋に外場の効果のみを考えれば良い時は、 F^{σ} の項のみが残ってきて、いわば、 F^{σ} に比例的な効果を示すことになる。(4.10) の各量に物理的な意味がつくと、それから各係数にも意味がつけられ、 F^{σ} との関係を与えるものとして実験との比較ができよう。その意味でいえば、

$$(r'_{\sigma' \mu' \sigma}{}^{\rho'} - \beta_{\mu' \sigma' \sigma}^{\rho'}) \text{ はねじり係数といえ、 } H_{\mu'; \lambda'}^{\sigma'}, H_{\mu'; \sigma'}^{\kappa'}$$

は相互作用による純粋の“はみだし”—分子軸の湾曲，方向配列の大きなくずれ，相転移，etc. — を与える。 r' は F から W への， β は F から x への寄与を与えるから， W に着目するという点では $H_{\mu'; \lambda'}^{\sigma'}$ が，より本質的である。

5. 相互作用の特殊化 - その2.

この節では、もう少し根源的な特殊化を行いたい。即ち、各相互作用係数を $(X^{\kappa'}, M^{\sigma'})$ の函数として扱い、(4.4)の形式を仮定する。そうすると、三基本量は次の様になる。

$$\left. \begin{aligned} S_{\mu; \sigma, \rho'} &= \frac{1}{2} (X_{\mu}, r_{\sigma}^{\rho'}) + \frac{1}{2} (X_{\mu}, r_{\sigma}^{\sigma'} - X_{\sigma}, \beta_{\mu}^{\sigma'}), \\ H_{\mu; \lambda, \sigma'} &= X_{\mu}, \beta_{\lambda}^{\sigma'}, \\ H_{\mu; \sigma, \kappa'} &= X_{\mu}, r_{\sigma}^{\kappa'} + X_{\mu}, r_{\sigma}^{\kappa'} \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

各 r, r', β が $(X^{\kappa'}, M^{\sigma'})$ の函数として適当な函数型に仮定されればよいことになるが、今各量を $M^{\sigma'}$ で展開することにして、

$$\left. \begin{aligned} r_{\sigma}^{\kappa} &= \zeta_{\sigma}^{\kappa} + \zeta_{\sigma, \rho}^{\kappa} M^{\rho'} + \frac{1}{2} \zeta_{\sigma, \rho, \tau}^{\kappa} M^{\rho'} M^{\tau'} \\ \beta_{\lambda}^{\sigma} &= \xi_{\lambda}^{\sigma} + \xi_{\lambda, \rho}^{\sigma} M^{\rho'} + \frac{1}{2} \xi_{\lambda, \rho, \tau}^{\sigma} M^{\rho'} M^{\tau'} \\ r_{\sigma}^{\rho'} &= \eta_{\sigma}^{\rho'} + \eta_{\sigma, \tau}^{\rho'} M^{\tau'} + \frac{1}{2} \eta_{\sigma, \tau, \rho}^{\rho'} M^{\tau'} M^{\rho'} \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

とおくことにする。(5.2)を(5.1)に代入し、かつ、(4.10)と同じ立場に立って $M^{\sigma'}$ の一次項を省略すると、(5.1)は

$$\left. \begin{aligned} S_{\mu; \sigma, \rho'} &= \frac{1}{2} \zeta_{\sigma, \tau, \nu}^{\rho'} \kappa_{\mu}^{\tau'} + \frac{1}{2} (\eta_{\sigma, \tau, \nu}^{\rho'} \kappa_{\mu}^{\tau'} - \xi_{\mu}^{\rho'} - \xi_{\mu, \sigma, \nu}^{\rho'}) M^{\nu'} \\ H_{\mu; \lambda, \sigma'} &= \xi_{\lambda, \rho, \tau}^{\sigma'} \kappa_{\mu}^{\rho'} M^{\tau'} \\ H_{\mu; \sigma, \kappa'} &= \zeta_{\sigma, \rho, \tau}^{\kappa'} \kappa_{\mu}^{\rho'} M^{\tau'} \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

とおかれる。但し、簡単のため、展開係数は定数とみなし、更に特殊化して $\kappa_{\mu}^{\sigma'} \equiv X_{\mu}, M^{\sigma'}$ をとり入れることにした。

こうしてみると、 $M^{\sigma'}$ と $\kappa_{\mu}^{\sigma'}$ の寄与が明白にとらえられ、まず、 $S_{\mu;\sigma,\rho'}$ については、本質的な“ねじり”性は $(X_{\mu}, \tau_{\sigma}^{\rho}, -X_{\sigma}, \beta_{\mu}^{\rho})$ にあり、それは係数としての $(\eta_{\sigma,\tau,\rho}^{\rho'}, \kappa_{\mu}^{\tau'}, -\xi_{\mu,\sigma,\tau}^{\rho'})$ に現われてき $S_{\mu;\sigma,\sigma'}$ 自体が $M^{\sigma'}$ に比例する様相を示すが、 $\kappa_{\mu}^{\sigma'}$ の存在、あるいは逆にいえば、 $\kappa_{\mu}^{\sigma'}$ をとりだした時の $M^{\sigma'}$ の存在によって、ねじりと $M^{\sigma'}$ 、 $\kappa_{\mu}^{\sigma'}$ の関係が非線型にならざるを得ないことがわかる。Zocher⁶⁾らのいう、磁場による方向変化のための“ねじり”の出現は、いわば $M^{\sigma'}$ 、 $\kappa_{\mu}^{\sigma'}$ からの換率の出現としてとらえられ、上述の係数が方向による“ねじり弾性率”のちがいを意味するから、方向配向の際の“ねじり”の異方性が $S_{\mu;\sigma,\sigma'}$ によってとらえられる。 $H_{\mu;\lambda,\sigma'}$ と $H_{\mu;\sigma,\kappa'}$ についての係数のちがいの意味などは、前節でのべた通りである。

6. 方向特性についての場の方程式

そこで、これらの基本量で支配されているところの方向特性の場の方程式を求めていこう。つまり、方向特性及びその変化を支配するところの相互作用の方程式である。そのために、我々は、先ず、各相互作用をとりだすために、(3・10)に基づいて議論した後、その特殊化として(5・3)に基づいてみたい。

最初に、各応力成分を $(\mu_{\rho;\sigma',\mu'}, \tau_{\rho;\lambda',\mu'}, \tau_{\kappa';\sigma',\mu'})$ とおくことにすると、エネルギー変分原理として

$$\begin{aligned}
 \delta \int_V W dX &= \int_V [\mu_{\rho;\sigma',\mu'} \delta S_{\mu;\sigma,\rho'} + \tau_{\sigma;\lambda',\mu'} \delta H_{\mu;\lambda,\sigma'} \\
 &\quad + \tau_{\kappa';\sigma',\mu'} \delta H_{\mu;\sigma,\kappa'}] dX \\
 &\equiv \int_V [M_{\kappa}^{\sigma'} \delta C_{\sigma}^{\kappa} + N_{\rho}^{\sigma'} \delta C_{\sigma}^{\rho} + L_{\sigma}^{\lambda'} \delta B_{\lambda}^{\sigma}] dX
 \end{aligned}
 \tag{6.1}$$

が得られる。但し、基本的に外部仕事から与えられる相互作用力を、それぞれ $(M_{\kappa}^{\sigma'}, N_{\rho}^{\sigma'}, L_{\sigma}^{\lambda'})$ とおいた。

(3.10) の各量の変分を取り、(6.1) に代入し、かつ部分積分を行ってやることにより、場の方程式としては次を得る。

$$\begin{aligned} \delta C_{\sigma}^{\kappa} &:: -\frac{1}{2} \mu_{\kappa}^{* \cdot \tau' \mu'} (X_{\mu}, C_{\tau'}^{\sigma'}) C_{\lambda} - \frac{1}{2} X_{\mu, \mu}^{* \cdot \sigma' \mu'} \\ &\quad - X_{\mu, \tau}^{* \cdot \sigma' \mu'} = M_{\kappa}^{\sigma'} \\ \delta C_{\sigma}^{\rho} &:: -\frac{1}{4} \widetilde{\mu}_{\rho}^{\cdot \tau' \mu'} (X_{\mu}, C_{\tau'}^{\sigma}, -X_{\tau}, B_{\mu}^{\sigma}) C_{\sigma}^{\sigma'} \\ &\quad - \widetilde{\tau}_{\rho}^{\cdot \lambda' \kappa'} (X_{\mu}, B_{\lambda}^{\sigma}) C_{\sigma}^{\sigma'} - \frac{1}{4} X_{\mu, \mu}^{\cdot \sigma' \mu'} \\ &\quad - X_{\mu, \tau}^{\cdot \sigma' \mu'} = N_{\rho}^{\sigma'} \\ \delta B_{\lambda}^{\sigma} &:: -\tau_{\sigma}^{\cdot \sigma' \mu'} (X_{\mu}, C_{\sigma}^{\rho}) B_{\rho}^{\lambda'} + \frac{1}{4} X_{\sigma, \sigma}^{\cdot \sigma' \lambda'} \\ &\quad - X_{\mu, \sigma}^{\cdot \lambda' \mu'} = L_{\sigma}^{\lambda'} \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$\text{但し, } \left\{ \begin{array}{l} \mu_{\kappa}^{* \cdot \sigma' \mu'} \equiv \mu_{\rho}^{\cdot \sigma' \mu'} C_{\kappa}^{\rho'}, \quad \widetilde{\mu}_{\rho}^{\cdot \sigma' \mu'} \equiv \mu_{\rho}^{\cdot \sigma' \mu'} C_{\rho}^{\rho'}, \\ \tau_{\kappa}^{* \cdot \sigma' \mu'} \equiv \tau_{\kappa}^{\cdot \sigma' \mu'} \delta_{\kappa}^{\kappa'}, \quad \widetilde{\tau}_{\rho}^{\cdot \lambda' \mu'} \equiv \tau_{\sigma}^{\cdot \lambda' \mu'} C_{\rho}^{\sigma'}, \\ \tau_{\sigma}^{\cdot \sigma' \mu'} \equiv \tau_{\kappa}^{\cdot \sigma' \mu'} B_{\sigma}^{\kappa'}. \end{array} \right.$$

(6.2) の右辺は、 $(\delta X^{\kappa}, \delta F^{\sigma})$ が与えられた時の、 $(\delta X^{\kappa'}, \delta M^{\sigma'})$ を介しての $(\delta C_{\sigma}^{\kappa}, \delta C_{\sigma}^{\rho}, \delta B_{\lambda}^{\sigma})$ に抗する応力成分である。この形は、それぞれの各相互作用に抗する一般的な応力方程式であり、それ以上の具体的なものを何も与えないので、 μ, τ などを実際に近い立場で論ずるために、我々は一気に(5.3)に移ることにしたい。

(5.3) より各量の変分をとり、Frank³⁾ らに従って、ここでは $(\delta M^{\sigma'}, \delta \kappa_{\mu}^{\sigma'})$ を独立的に扱うことにすると、(6.1) の右辺と

して

$$\delta \int_V W dX = \int_V [t_{\tau'}^{\mu'} \delta \kappa_{\mu'}^{\tau'} + E_{\nu'} \delta M^{\nu'}] dX \quad (6.3)$$

とおくことにより，場の方程式として次を得る。

$$\left. \begin{aligned} \delta \kappa_{\mu'}^{\tau'} : m_{\tau'}^{\mu'} M^{\nu'} + T_{\tau'}^{\mu'} M^{\nu'} &= t_{\tau'}^{\mu'} , \\ \delta M^{\nu'} : m_{\tau'}^{\mu'} \kappa_{\mu'}^{\tau'} + n_{\nu'} + T_{\rho'}^{\mu'} \kappa_{\mu'}^{\rho'} &= E_{\nu'} \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

$$\text{但し, } \left\{ \begin{aligned} m_{\tau'}^{\mu'} &\equiv \mu_{\rho'}^{\sigma'} \mu' (\zeta_{\sigma'}^{\rho'} \tau'_{\nu'} + \eta_{\sigma'}^{\rho'} \tau'_{\nu'}) , \\ T_{\tau'}^{\mu'} &\equiv \tau_{\sigma'}^{\lambda'} \mu' \xi_{\lambda'}^{\sigma'} \tau'_{\nu'} + \tau_{\kappa'}^{\sigma'} \mu' \zeta_{\sigma'}^{\kappa'} \tau'_{\nu'} , \\ n_{\nu'} &\equiv -\mu_{\rho'}^{\sigma'} \mu' \xi_{\mu'}^{\rho'} \sigma'_{\nu'} \end{aligned} \right.$$

ここに， $t_{\tau'}^{\mu'}$ は分子配向変化をひきおこす応力で，外場による回転，ねじり，etc.は，これに含まれる。又， $E_{\nu'}$ は分子軸配向方向に作用する，配列を促進するための力で，一般的な外力といえる。 $t_{\tau'}^{\mu'}$ は $M^{\nu'}$ に比例的であり， $E_{\nu'}$ は $\kappa_{\mu'}^{\sigma'}$ に比例的であり，Zocher⁶⁾のいう回転モーメントも，これに含まれる。 $m_{\tau'}^{\mu'}$ は，応力 $\mu_{\rho'}^{\sigma'} \mu'$ に ζ ， η なる係数がかかったもので， $M^{\nu'}$ に見合うための，一種の物質係数とみなすことができる。 $T_{\tau'}^{\mu'}$ も同様である。前者は，捩りの，後者は曲げ，とか“splay”に対する係数といえよう。そして，(6.4)の各式は， $M^{\nu'}$ 及び $\kappa_{\mu'}^{\rho'}$ に依存した応力成分の構造方程式とみなすことができる。

ところで，(6.4)₁式は，上述の如く， $\kappa_{\mu'}^{\tau'}$ に抗する応力故，液晶では，これは例えば，

$$t_{\tau'}^{\mu'} = \alpha_{\tau'}^{\mu'} \sigma'_{\lambda'} \kappa_{\lambda'}^{\sigma'} \quad (6.5)$$

の如く与えられるものと考えてよい。この α は，通常のねじり係数や，自由エネルギーの展開係数に匹敵するものである。(6.4)₁に代入すると

$$\alpha_{\tau; \dot{\nu}, \mu'; \lambda'} \kappa_{\lambda; \sigma'} = m_{\tau; \dot{\nu}, \mu'} M^{\nu'} + T_{\tau; \dot{\nu}, \mu'} M^{\nu'} \quad (6.6)$$

で与えられることになるから、分子配向 $M^{\nu'}$ とその変化 $\kappa_{\mu}^{\sigma'}$ の測定から、 α と m , T を結びつけ得る。尤とも、 m , T は、未だその性格がはっきりせず、変形場での成分を、よりミクロにとらえねば着目されない量ではある。又、 $(6.4)_2$ の分は、 $M^{\nu'}$ 自体に働く力を与え、捩り力 $m \cdot \kappa$, 曲げ力 $T \cdot \kappa$, 純相互作用力 n に分解される。これ自体は、 $M^{\nu'}$ に比例する方向性圧力、散逸応力などで代表されるから⁵⁾、同じく $M^{\nu'}$ に比例する形式

$$E_{\nu'} = \beta_{\nu', \tau} M^{\tau'} \quad (6.7)$$

を仮定すれば、 $(6.4)_2$ は

$$m_{\tau; \dot{\nu}, \mu'} \kappa_{\mu}^{\tau'} - n_{\nu'} + T_{\tau; \dot{\nu}, \mu'} \kappa_{\mu}^{\tau'} = \beta_{\nu', \tau} M^{\tau'} \quad (6.8)$$

とかけ、 (6.6) と同じく、 $M^{\nu'}$ と $\kappa_{\mu}^{\nu'}$ の関係から各係数に関係をつけることができよう。

7. 相互作用の特殊化 - その3.

今までのべた諸規定 (4.4) , (5.2) , (5.3) より、結局、 $(dx^{\kappa'}, dM^{\sigma'})$ は次の様に与えられる。

$$\left. \begin{aligned} dM^{\sigma'} &= \left(\delta_{\lambda}^{\sigma'} + \zeta_{\lambda}^{\sigma'} + \frac{1}{2} \zeta_{\lambda\rho}^{\sigma'}, \tau, M^{\rho'} M^{\tau'} \right) dx^{\lambda} \\ &\quad + \left(\delta_{\sigma}^{\sigma'} + \eta_{\sigma}^{\sigma'} + \frac{1}{2} \eta_{\sigma\rho}^{\sigma'}, \tau, M^{\rho'} M^{\tau'} \right) dF^{\sigma}, \\ dx^{\kappa'} &= \delta_{\kappa}^{\kappa'} dx^{\kappa} + \left(\delta_{\sigma}^{\kappa'} + \xi_{\sigma}^{\kappa'} + \frac{1}{2} \xi_{\sigma\rho}^{\kappa'}, \tau, M^{\rho'} M^{\tau'} \right) dF^{\sigma} \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

そこで、今、Frank³⁾ の立場として dF^{σ} を考えない場合に移行しよう。そ

の時, (7.1) より

$$dM^{\sigma'} = (\delta_{\lambda}^{\sigma'} + \zeta_{\lambda}^{\sigma'} + \frac{1}{2} \zeta_{\lambda \rho'}^{\sigma'} M^{\rho'} M^{\tau'}) dx^{\lambda},$$

$$dx^{\kappa'} = \delta_{\lambda}^{\kappa'} dx^{\lambda} \quad (7.2)$$

で与えられ, 曲率歪は

$$\kappa_{\mu'}^{\sigma'} = \delta_{\mu'}^{\sigma'} + \zeta_{\mu'}^{\sigma'} + \frac{1}{2} \zeta_{\mu' \rho'}^{\sigma'} M^{\rho'} M^{\tau'} \quad (7.3)$$

に帰着するが, Frank よりはミクロな非線型性を呈するに至っている。又, この時は, (3.10), (5.3) より

$$\left. \begin{aligned} S_{\mu'; \sigma'}^{\rho'} &= \zeta_{\sigma' \tau' \nu'}^{\rho'} \kappa_{\mu'}^{\tau'} M^{\nu'}, \\ H_{\mu'; \sigma'}^{\kappa'} &= \zeta_{\sigma' \tau' \nu'}^{\kappa'} \kappa_{\mu'}^{\tau'} M^{\nu'}, \quad H_{\mu'; \lambda'}^{\sigma'} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

となり, (6.4) 式は

$$\left. \begin{aligned} \delta x_{\mu'}^{\tau'} : \mu_{\rho'}^{\sigma'} \mu' (\zeta_{\sigma' \tau' \nu'}^{\rho'} M^{\nu'}) + \tau_{\kappa'}^{\sigma'} \mu' (\zeta_{\sigma' \tau' \nu'}^{\kappa'} M^{\nu'}) &= t_{\tau'}^{\mu'}, \\ \delta M^{\nu'} : \mu_{\rho'}^{\sigma'} \mu' (\zeta_{\sigma' \tau' \nu'}^{\rho'} \kappa_{\mu'}^{\tau'}) + \tau_{\kappa'}^{\sigma'} \mu' (\zeta_{\sigma' \rho' \nu'}^{\kappa'} \kappa_{\mu'}^{\rho'}) &= E_{\nu'}, \end{aligned} \right\} \quad (7.5)$$

となる。相互作用係数としては $\zeta_{\sigma' \tau' \nu'}^{\kappa'}$, $\zeta_{\sigma' \tau' \nu'}^{\rho'}$ のみ が出現する。両者のちがいは, 方向 (ρ') と (κ') のちがいである。

もう一方の特殊化として, Zocher⁶⁾ らの; 外場の効果のみに着目する場合を考えてみよう。

この時は, (7.1) より

$$\left. \begin{aligned} dM^{\sigma'} &= (\delta_{\sigma'}^{\sigma'} + \zeta_{\sigma'}^{\sigma'} + \frac{1}{2} \eta_{\sigma' \rho'}^{\sigma'} M^{\rho'} M^{\tau'}) dF^{\sigma'}, \\ dx^{\kappa'} &= (\delta_{\sigma'}^{\kappa'} + \xi_{\sigma'}^{\kappa'} + \frac{1}{2} \xi_{\sigma' \rho'}^{\kappa'} M^{\rho'} M^{\tau'}) dF^{\sigma'} \end{aligned} \right\} \quad (7.6)$$

とかけ、曲率歪は

$$\begin{aligned} \kappa_{\mu'}^{\sigma'} = & (\delta_{\mu'}^{\sigma'} + \xi_{\mu'}^{\sigma'} + \eta_{\mu'}^{\sigma'} + \xi_{\mu'}^{\sigma'} \zeta_{\sigma'}^{\sigma'}) + \frac{1}{2} (\xi_{\mu'}^{\sigma'} \rho' \tau' + \eta_{\mu'}^{\sigma'} \rho' \tau') M^{\rho'} M^{\tau'} \\ & + \frac{1}{2} (\xi_{\mu'}^{\sigma'} \eta_{\sigma' \rho' \tau'}^{\sigma'} + \eta_{\sigma'}^{\sigma'} \xi_{\mu'}^{\sigma'} \rho' \tau') M^{\rho'} M^{\tau'} \end{aligned} \quad (7.7)$$

とおける。この時の基本量は、それぞれ、

$$\left. \begin{aligned} S_{\mu'}^{\cdot \cdot \cdot \rho'} &= \frac{1}{2} (\eta_{\sigma' \tau' \nu'}^{\rho'} \kappa_{\mu'}^{\tau'} - \xi_{\mu'}^{\rho'} \sigma' \tau') M^{\tau'}, \\ H_{\mu'}^{\cdot \cdot \sigma'} &= \xi_{\lambda' \rho' \tau'}^{\sigma'} \kappa_{\mu'}^{\rho'} M^{\tau'}, \quad H_{\mu'}^{\cdot \cdot \sigma'} \kappa' = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.8)$$

に帰着する。そして、この時の場の方程式は

$$\left. \begin{aligned} \delta \kappa_{\mu'}^{\tau'} : \tilde{m}_{\tau'}^{\cdot \cdot \mu'} M^{\nu'} + \tilde{T}_{\tau'}^{\cdot \cdot \mu'} M^{\nu'} &= t_{\tau'}^{\cdot \mu'} \\ \delta M^{\nu'} : \tilde{m}_{\tau'}^{\cdot \cdot \mu'} \kappa_{\mu'}^{\tau'} + \tilde{n}_{\nu'} + \tilde{T}_{\rho'}^{\cdot \cdot \mu'} \kappa_{\mu'}^{\rho'} &= E_{\nu'} \end{aligned} \right\} \quad (7.9)$$

但し、 $\left\{ \begin{aligned} \tilde{m}_{\tau'}^{\cdot \cdot \mu'} &\equiv \mu_{\rho'}^{\cdot \sigma'} \eta_{\sigma' \tau' \nu'}^{\rho'} \\ T_{\tau'}^{\cdot \cdot \mu'} &\equiv \tau_{\sigma'}^{\cdot \lambda'} \xi_{\lambda' \tau' \nu'}^{\sigma'} \\ \tilde{n}_{\nu'} &\equiv -\mu_{\rho'}^{\cdot \sigma'} \xi_{\mu'}^{\rho'} \sigma' \nu' \end{aligned} \right.$

となる。この場合、Zocher⁶⁾の如く、(6.5)、(6.7)ではなくて、

$$t_{\tau'}^{\cdot \mu'} = \tilde{\alpha}_{\tau'}^{\cdot \mu'} M^{\sigma'}, \quad E_{\nu'} = \tilde{\beta}_{\nu'}^{\cdot \mu'} \kappa_{\mu'}^{\rho'} \quad (7.10)$$

と仮定するならば、(7.9)より $\tilde{n}_{\nu'}$ として

$$\left. \begin{aligned} \tilde{n}_{\nu'} &= E_{\nu'} - \tilde{\alpha}_{\tau'}^{\cdot \mu'} \kappa_{\mu'}^{\tau'} \\ \tilde{n}_{\nu'} \kappa_{\tau'}^{\mu'} &= \tilde{\beta}_{\nu'}^{\cdot \mu'} - \tilde{\alpha}_{\tau'}^{\cdot \mu'} \end{aligned} \right\} \quad (7.11)$$

なる関係が得られ、両応力 $\mathbf{E}$ と $\mathbf{t}$ の差が、ここでいう $\tilde{\mathbf{n}}$ の寄与ということにな

る。

8. 相互作用の特殊化 - その4.

この節では、今までのべたところのまとめとして、基本量の段階での $M^{\sigma'}$ の一次項に注目することによって、各種相互作用及び相互作用係数の諸規定を考えてみたい。そこで、まず最初に、相互作用係数を $M^{\sigma'}$ で展開して、

$$\left. \begin{aligned} C_{\mu}^{\sigma'} &= \zeta_{\mu}^{\sigma'} + \zeta_{\mu\rho}^{\sigma'} M^{\rho'} + \frac{1}{2} \zeta_{\mu\rho\tau}^{\sigma'} M^{\rho'} M^{\tau'} + \dots \\ B_{\mu}^{\sigma'} &= \xi_{\mu}^{\sigma'} + \xi_{\mu\rho}^{\sigma'} M^{\rho'} + \frac{1}{2} \xi_{\mu\rho\tau}^{\sigma'} M^{\rho'} M^{\tau'} + \dots \\ C_{\sigma}^{\sigma'} &= \eta_{\sigma}^{\sigma'} + \eta_{\sigma\rho}^{\sigma'} M^{\rho'} + \frac{1}{2} \eta_{\sigma\rho\tau}^{\sigma'} M^{\rho'} M^{\tau'} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (8.1)$$

とおく。但し、各展開係数は、ある局所領域での平均値とみなして定数とおく。この時、各基本量は次の様に与えられる。

$$\left. \begin{aligned} S_{\mu}^{\sigma'} &= \frac{1}{2} \left[-\xi_{\mu}^{\rho} \eta_{\rho}^{\sigma'} + (\zeta_{\sigma}^{\kappa} \zeta_{\kappa}^{\rho'} + \eta_{\sigma}^{\tau} \eta_{\tau}^{\rho'}) \kappa_{\mu}^{\tau'} \right. \\ &\quad \left. - (\xi_{\mu}^{\rho} \eta_{\rho}^{\sigma'} + \xi_{\rho}^{\sigma} \eta_{\rho\tau}^{\sigma'}) M^{\tau'} \right], \\ H_{\mu}^{\sigma'} &= \xi_{\lambda}^{\sigma} \eta_{\sigma}^{\tau'} \kappa_{\mu}^{\tau'}, \\ H_{\mu}^{\kappa'} &= (\zeta_{\sigma}^{\kappa} \delta_{\kappa}^{\rho'} + \eta_{\sigma}^{\tau} \xi_{\rho}^{\kappa'}) \kappa_{\mu}^{\tau'} + (\eta_{\sigma}^{\rho} \xi_{\rho\tau}^{\kappa'}) M^{\tau'} \end{aligned} \right\} \quad (8.2)$$

但し、 $M^{\sigma'}$ についての一次項までしかとらない。

1) $M^{\sigma'} = 0$ の時:

つまり、分子配向がない時で、等方性流体か全くの乱流状態かである。この

時は、(8.1)が定数項のみになるので(8.2)は全て消失するが、(8.2)のうち、($M^{\sigma'}$)によらないのは

$$S_{\mu;\sigma,\rho'} = -\frac{1}{2}\xi_{\mu,\sigma}^{\rho'}\eta_{\rho}^{\rho'} \quad (8.3)$$

であり、これを $S_{\mu;\sigma,\rho'}$ の、 $M^{\sigma'}$ によらない定数項とみなせば、改めて、粘性の存在がいえ、従って、 $\xi_{\mu,\sigma}^{\rho'}$ の本質は粘性的であるといえよう。

2) 外場の作用による分子配向に注目する場合：

この時は、 $F \rightarrow M$ への寄与、即ち $C_{\sigma}^{\sigma'}$ がとり出され、これのみの存在が図られるときは、(8.2)からわかる如く、

$$S_{\mu;\sigma,\rho'} = \frac{1}{2}(\eta_{\sigma,\tau}^{\sigma'}\eta_{\sigma}^{\rho'})\kappa_{\mu}^{\tau'} \quad (8.4)$$

のみが残ってき、この“振り”が分子配向にきいてきている。 $\kappa_{\mu}^{\tau'}$ は方向変化だから、外場の作用による方向変化のための回転が(8.4)でとらえられる。 $\eta_{\sigma,\tau}^{\sigma'}$ は、本質的には“ねじり率”と関係してくる。

3) 外場の作用による分子間距離の変化に注目する時：

分子間距離の変化は $d x^{\kappa'}$ でとらえられ、今の場合、外部変形を考慮していないから外場の作用のみがとりだされる。それは $B_{\sigma}^{\kappa'}$ で代表され、これがきいてくる量は、(8.2)より

$$\left. \begin{aligned} S_{\mu;\sigma,\rho'} &= -\frac{1}{2}(\xi_{\mu,\sigma}^{\rho'}\eta_{\rho}^{\rho'}) - \frac{1}{2}(\xi_{\mu,\sigma,\tau}^{\rho'}\eta_{\rho}^{\rho'} \\ &\quad + \xi_{\mu,\sigma}^{\rho'}\eta_{\rho\tau}^{\rho'})M^{\tau'}, \\ H_{\mu;\lambda,\sigma'} &= (\xi_{\lambda,\tau}^{\sigma'}\eta_{\sigma}^{\sigma'})\kappa_{\mu}^{\tau'}, \\ H_{\mu;\sigma,\kappa'} &= (\eta_{\sigma,\tau}^{\rho'}\xi_{\rho}^{\kappa'})\kappa_{\mu}^{\tau'} + (\eta_{\sigma}^{\rho'}\xi_{\rho\tau}^{\kappa'})M^{\tau'} \end{aligned} \right\} \quad (8.5)$$

である。 ξ が単独できいてこず、常に η を伴うのは、例えば、Ch. 相において、外場の作用でピッチ変化が起ると、当然、方向変化も起っているわけで、この両者が互いにかかわりあって、三基本量全てが出現してくることを意味している。そして、Ch. 相のピッチが ∞ になるとN相へ転移するから、その様

な顕著な変化も $H_{\mu;\sigma,\kappa'}$, $H_{\mu;\lambda,\sigma'}$ の出現そのものによって、それに対応する一つの現象として把握されてくる。

4) 変形の効果に注目する時:

我々の今までの特殊化では、変形 $dx^{\kappa} \rightarrow dx^{\kappa'}$ の効果というのは陽にとりあげていず、通常 $B_{\lambda}^{\kappa'}$ で与えられるべきものを $\delta_{\lambda}^{\kappa'}$ においているので、それからの効果を論じ得ない。が、方向特性への効果として、 $dx^{\kappa'}$ からの効果として $C_{\lambda}^{\sigma'}$ が考えられるから、今、それに着目すると、(8.2) から

$$\left. \begin{aligned} S_{\mu;\sigma,\rho'} &= \frac{1}{2} (\zeta_{\sigma,\tau}^{\kappa}, \zeta_{\kappa}^{\rho'}) \kappa_{\mu}^{\tau'} \\ H_{\mu;\sigma,\kappa'} &= (\zeta_{\sigma,\tau}^{\kappa}, \delta_{\kappa}^{\kappa'}) \kappa_{\mu}^{\tau'} \end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

が残ってき、“振り”と“曲げ”の効果が存在することになる。 ζ が純変形論の意味でのねじり率、曲げ率に対応してくる。

今までの考察の筋通は、相互作用の規定 $\rightarrow$ 係数の $M^{\sigma'}$ による展開 $\rightarrow$ 各基本量の規定 $\rightarrow$ その関与する現象 $\rightarrow \kappa_{\mu}^{\sigma'}$ とかみ合わせて各係数の決定、ということであり、目的としては、物性定数の決定と異常現象の解析であろう。もちろん、上記の筋道の逆コースも考えられ、応力 $\sim$ 歪関数などから物性定数を決定することも可能であろう。

9. 結 び

以上、相互作用の諸規定について若干の具体例をあげつつ、非ホノローム部分空間分解論による取扱いをのべてきた。今までのところでもわかる如く、変形面 ($dx^{\kappa'}$) での寄与と方向面 ($dM^{\sigma'}$) での寄与とは互いに複雑にかみあっていて、一既には分離できず、相互作用及びその規定条件に依存する。

連続体モデルでの扱いでは、応力成分としては、Oseen⁵⁾ らの如く、粘性力とモーメント(トルク)を代表的に扱うのが通常だが、我々の場合、それらは $t_{\tau}^{\mu'}$ と E_{ν} に対応させ得、古典的な比例関数を仮定して、応力を与える物質係数間の関係を求めることもできようが、ここでのべたところは、それ以上のものを目指すものであり、その意味で、粘弾性的非線型性を取り入れた

池田 恵

ものといえよう。又、Zocher⁶⁾ らによると、トルクが回転歪に比例し、 $dM^{\sigma'}$ が F^{σ} に比例的な場合も存在する故、係数の展開において、 $M^{\sigma'}$ の一次項も取入れる必要があることに注意すべきである。

参 考 文 献

- 1) 池田恵, 物性研究, 16 (1971) 367
- 2) 池田恵, 物性研究, 14 (1970), 419.
- 3) F. C. Frank, Discus. Faraday Soc., 25 (1958), 19.
- 4) K. Yano & E. T. Davies, Ann. di Mate., 37 (1954), 1.
- 5) C. W. Oseen, Trans. Faraday Soc., 29 (1933), 883.
- 6) H. Zocher, Ibid., 29 (1933), 945.