

Lawson 対応している曲面のエンドの自己交叉性について

神戸大学大学院自然科学研究科 藤森 祥一 (Shoichi Fujimori)
Department of Mathematics, Kobe University

$M \subset \mathbb{C}$ を単連結 Riemann 面, $z_0 \in M$ とする. M 上の有理型関数 g と M 上の正則 1 次微分形式 ω に対して, g の極と ω の零点が一致し, ω の零点の位数が対応する g の極の位数の 2 倍に等しいとする. このとき,

$$F_0 : M \ni z \mapsto \int_{z_0}^z (1 - g^2, i(1 + g^2), 2g) \omega \in \mathbb{C}^3$$

とおくと, $\Phi_0 := \text{Re} F_0 : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ は $\mathbb{R}^3$ 内の極小曲面となる (Weierstrass の表現公式). 一方, $F_1 : M \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$ を

$$F_1^{-1} dF_1 = \begin{pmatrix} g & -g^2 \\ 1 & -g \end{pmatrix} \omega, \quad F_1(z_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を満たす写像とすると, $\Phi_1 := F_1 F_1^* : M \rightarrow \mathbb{H}^3$ は双曲空間 $\mathbb{H}^3$ 内の平均曲率 1 (CMC1) の曲面になる (Bryant の表現公式 [B, UY]). ただし $\mathbb{H}^3 = \mathbb{H}^3(-1) \cong \{AA^* \mid A \in SL(2, \mathbb{C})\}$ とみなす. $\Phi_0(M), \Phi_1(M)$ の第 1 基本形式はともに

$$(1) \quad ds^2 = (1 + g\bar{g})^2 \omega \bar{\omega}$$

で与えられる. すなわち, 1 つの対 (g, ω) (Weierstrass data と呼ばれる) に対して, $\mathbb{R}^3$ 内の極小曲面と $\mathbb{H}^3$ 内の CMC1 曲面で互いに等長的なものが, 局所的には構成することができる ([L] 参照). このような曲面の組を, ここでは **Lawson 対応している曲面**の組と呼ぶことにする.

Φ_0, Φ_1 に対して, Hopf 微分と呼ばれる M 上の正則 2 次微分 Q はともに

$$Q = \omega dg$$

で与えられる.

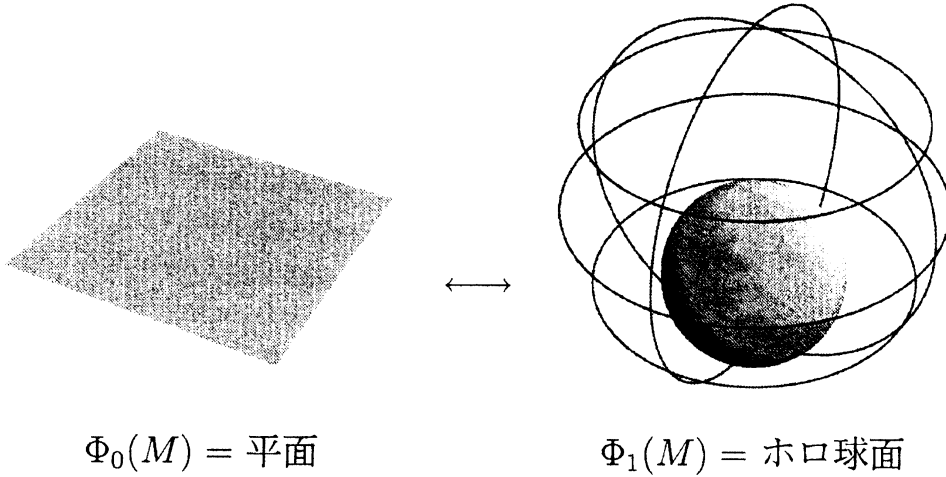
(g, ω) を単連結な CMC1 曲面 $\Phi_1 : M \rightarrow \mathbb{H}^3$ の Weierstrass data とする. このとき, 任意の $\theta \in [0, \pi)$ に対して, Weierstrass data $(g, e^{i\theta} \omega)$ から構成される極小曲面 $\Phi_{0,\theta} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ は, Φ_1 と Lawson 対応してい

ることが (1) から分かる. 逆に, [N, §177] より次の補題が成り立つことも確かめられる.

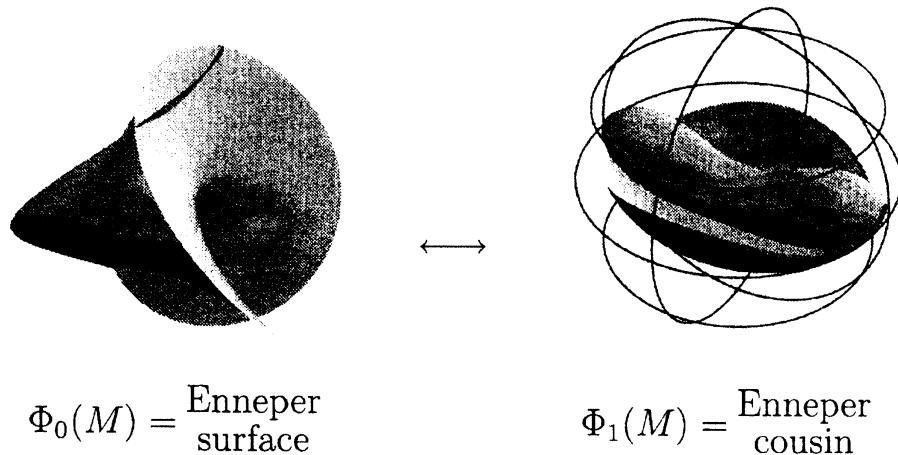
補題 1. $\Phi_1 : M \rightarrow \mathbb{H}^3$ を単連結な CMC1 曲面, (g, ω) を Φ_1 の Weierstrass data, $\Phi_0 : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ を Φ_1 と Lawson 対応していると極小曲面とする. このとき, ある $\theta \in [0, \pi)$ が存在して, $(g, e^{i\theta}\omega)$ は Φ_0 の Weierstrass data になる.

例 2. Lawson 対応している曲面の例を 4 組挙げる. 各エンドの自己交叉性に注目されたい.

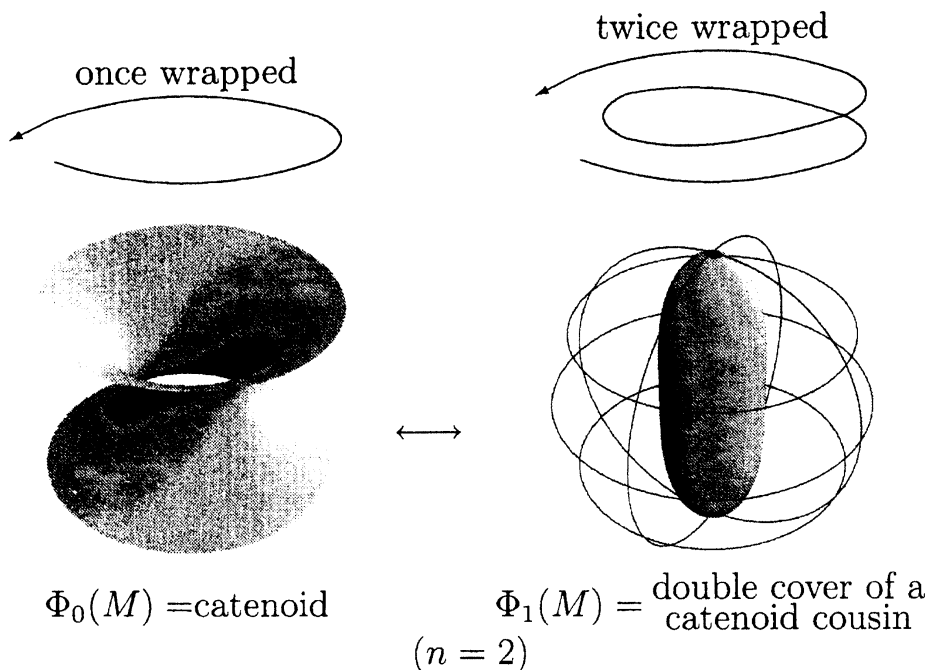
(i) $M = \mathbb{C}$, $(g, \omega) = (0, dz)$. このとき, Φ_0, Φ_1 のエンドはともに自己交叉をもたない.



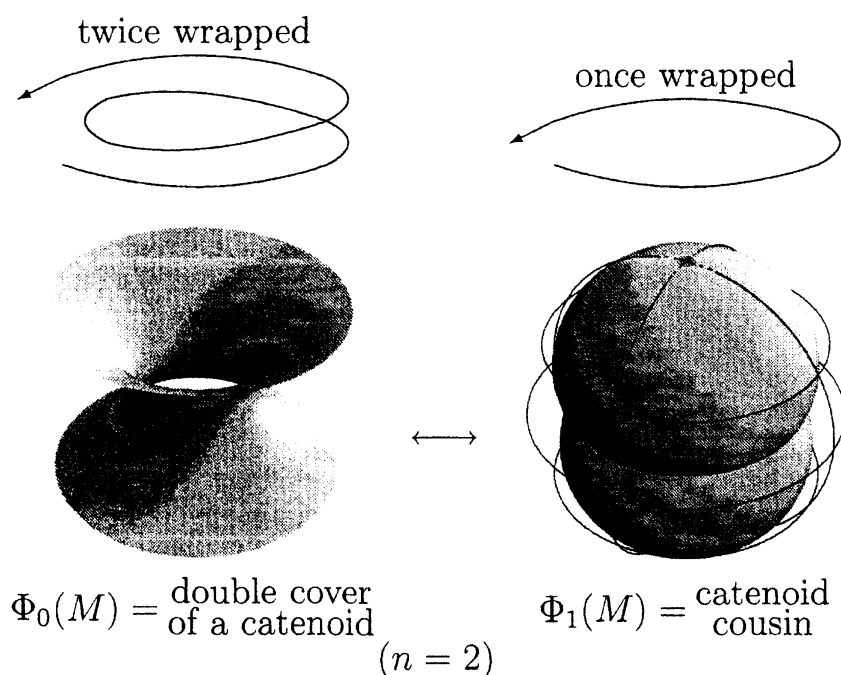
(ii) $M = \mathbb{C}$, $(g, \omega) = (z, dz)$. このとき, Φ_0, Φ_1 のエンドはともに自己交叉をもつ.



(iii) $M = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $(g, \omega) = \left(z, \frac{n^2 - 1}{4} z^{-2} dz\right)$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. このとき, Φ_0 の各エンドは自己交叉をもたないが, Φ_1 の各エンドは自己交叉をもつ.



(iv) $M = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $(g, \omega) = \left(z^n, \frac{1 - n^2}{4n} z^{-1-n} dz\right)$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. このとき, Φ_0 の各エンドは自己交叉をもつが, Φ_1 の各エンドは自己交叉をもたない.



Lawson 対応している曲面のエンドの自己交叉性について調べ、次の結果を得た。

定理 3. ([F]) $\overline{M}$ をコンパクト Riemann 面, $M := \overline{M} \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$ ($k \in \mathbb{N}$) とする. $\Phi_1 : M \rightarrow \mathbb{H}^3$ を CMC1 固有はめ込み, $\Phi_0 : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ を極小はめ込みとする. Φ_0, Φ_1 は Lawson 対応しており, Φ_0, Φ_1 の各エンドは自己交叉をもたないとする. このとき, Φ_0, Φ_1 の Hopf 微分はともに $\overline{M}$ 上正則になる.

証明. $\Delta_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \varepsilon\}$, $\Delta_\varepsilon^* = \Delta_\varepsilon \setminus \{0\}$ ($\varepsilon > 0$) とする. $\varphi_1 : \Delta_\varepsilon^* \rightarrow \mathbb{H}^3$ を Φ_1 の任意のエンドとする. $\varphi_0 : \Delta_\varepsilon^* \rightarrow \mathbb{R}^3$ を対応する極小曲面のエンドとする. [CHR, Theorem 10] より, φ_1 の全曲率は有限で, その Hopf 微分は原点で高々 2 位の極をもつから, [UY] より, φ_1 の Weierstrass data は

$$g(z) = z^\mu \hat{g}(z), \quad \hat{g}(0) \neq 0, \quad \omega = z^\nu \hat{w}(z) dz, \quad \hat{w}(0) \neq 0,$$

と表すことができる. ただし $\hat{g}, \hat{w}$ は Δ_ε 上の正則関数であり, $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ は $\mu > 0, \nu \leq -1, \mu + \nu \in \mathbb{Z}, \mu + \nu \geq -1$ をみたす.

補題 1 より, ある $\theta \in [0, \pi)$ が存在して, $(g, e^{i\theta}\omega)$ は φ_0 の Weierstrass data になる. g は φ_0 の Gauss 写像と立体射影の合成写像と見なすことができる, すなわち, $G : \Delta_\varepsilon^* \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$ を φ_0 の Gauss 写像とすると,

$$G(z) = \left(\frac{2\operatorname{Re}g(z)}{|g(z)|^2 + 1}, \frac{2\operatorname{Im}g(z)}{|g(z)|^2 + 1}, \frac{|g(z)|^2 - 1}{|g(z)|^2 + 1} \right)$$

が成り立つから, g は Δ_ε^* 上 well-defined である. 故に $\mu \in \mathbb{N}$, 従って $-\nu \in \mathbb{N}$ が成り立つ.

φ_0 の第 1 成分, 第 2 成分はそれぞれ

$$\operatorname{Re} \int_{z_0}^z (1 - g^2) e^{i\theta} \omega, \quad -\operatorname{Im} \int_{z_0}^z (1 + g^2) e^{i\theta} \omega$$

であり, $g(0) = 0$ より $\lim_{z \rightarrow 0} G(z) = (0, 0, -1)$ である. よって φ_0 が自己交叉をもたないから $\nu = -2$ であり, また, φ_0 が Δ_ε^* 上 well-defined であるから $\hat{w}'(0) = 0$ である.

[ET, Lemma 2.4] より $\hat{g}(0)\hat{w}(0) = (1 - \mu^2)/4\mu$ であるから, $\hat{g}(0) \neq 0$ かつ $\hat{w}(0) \neq 0$ より $\mu \neq 1$ である. さらに, [ET, Lemma 2.9] より

$$\hat{w}'(0) = \begin{cases} 2\hat{w}(0)^2\hat{g}(0) & (\mu = 2 \text{ のとき}), \\ 0 & (\mu \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

であるから, $\hat{w}'(0) = 0$ より $\mu \neq 2$ である. 従って $\mu \geq 3$ が成り立つ.

よって, φ_1, φ_0 それぞれの Hopf 微分 $\omega dg, e^{i\theta}\omega dg$ の $z = 0$ における order は $\mu + \nu - 1 \geq 0$ となる. 従って, φ_1, φ_0 の Hopf 微分は $z = 0$ において極をもたない. $\square$

この結果から次の系が導かれる.

系 4. ([F]) 上述の定理と同じ仮定の下で, 次の (I) から (III) の少なくとも 1 つが成り立てば, $\Phi_0(M)$ は平面であり, $\Phi_1(M)$ はホロ球面である:

- (I) $\overline{M}$ の種数は 0,
- (II) M の全曲率は -16π より大きい,
- (III) Φ_1 自身が自己交叉をもたない.

証明. (I) $\overline{M}$ の種数が 0 ならば Φ_j ($j = 0, 1$) の Hopf 微分は恒等的に 0 になる. よって Φ_j ($j = 0, 1$) は全臍的になるから, $\Phi_0(M)$ は平面であり, $\Phi_1(M)$ はホロ球面である.

(II) $\overline{M}$ の種数を γ とする. [JM, Theorem 4] より, Φ_0 の各エンドが自己交叉をもたないための必要十分条件は

$$(2) \quad \int_M K dA = -4\pi(k + \gamma - 1)$$

が成り立つことである. ただし, K, dA はそれぞれ Φ_0 の Gauss 曲率, 面積要素とする.

[S] より, $k = 1$ ならば Φ_0 は平面であり, $k = 2$ ならば Φ_0 は catenoid であるが, catenoid の Hopf 微分は, 各エンドで 2 位の極をもつ. $k = 3$ のとき, (I) より $\gamma \geq 1$ であるが, [KS, Theorem 26] より, $\gamma = 1$ かつ $k = 3$ のとき, Φ_0 の Hopf 微分は $\overline{M}$ 上正則にならない. 以上より, $k + \gamma < 5$ ならば, Φ_0 は平面であるか, または Φ_0 の Hopf 微分は $\overline{M}$ 上正則にならない. 定理 3 と (2) より, 結論を得る.

(III) Φ_1 自身が自己交叉をもたないならば, [CHR, Theorem 12] より, Φ_1 はホロ球面であるか, または, Φ_1 の Hopf 微分は各エンドで 2 位の極をもつ. よって, 定理 3 より, Φ_1 はホロ球面であり, このとき, Φ_0 は平面である. $\square$

参考文献

- [B] R. Bryant, *Surfaces of Mean Curvature One in Hyperbolic Space*, *Astérisque* **154-155** (1987), 321-347.
- [CHR] P. Collin, L. Hauswirth and H. Rosenberg, *The geometry of finite topology Bryant surfaces*, *Ann. of Math.*(2) **153** (2001), 623-659.
- [ET] R. Sá Earp and É. Toubiana, *On the geometry of constant mean curvature one surfaces in hyperbolic space*, *Illinois J. Math.*(2) **45** (2001), 371-401.
- [F] S. Fujimori, *Minimal surfaces in Euclidean 3-space and there mean curvature 1 cousins in hyperbolic 3-space*, *An. Acad. Bras. Ciênc.*, **75** (2003), 271-278.
- [JM] L. Jorge and W. H. Meeks III, *The topology of complete minimal surfaces of finite total Gaussian curvature*, *Topology*, (2) **22** (1983), 203-221.
- [KS] R. Kusner and N. Schmitt, *The spinor representation of minimal surfaces*, G.A.N.G. preprint [3.27].
- [L] H. B. Lawson, *Complete minimal surfaces in S^3* , *Ann. of Math.*(2) **92** (1970), 335-374.
- [N] J. C. C. Nitsche, *Lectures on minimal surfaces*, Vol.1, Cambridge University Press (1989).
- [RUY] W. Rossman, M. Umehara and K. Yamada, *Period problems for mean curvature one surfaces in $\mathbb{H}^3$ (with application to surfaces of low total curvature)*, to appear in MSJ-IRI Tokyo proceedings.
- [S] R. Schoen, *Uniqueness, symmetry and embeddedness of minimal surfaces*, *J. Diff. Geom.* **18** (1983), 791-809.
- [UY] M. Umehara and K. Yamada, *Complete surfaces of constant mean curvature 1 in the hyperbolic 3-space*, *Ann. of Math.*(2) **137** (1993), 611-638.

E-mail address: fujimori@math.kobe-u.ac.jp