

A generalization of determinant and permanent

白井 朋之 (金沢大学理学部) *

1 はじめに

$n \times n$ 行列 $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ に対して,

$$\det_{\alpha} A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \alpha^{n-\nu(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}$$

を考える. ここで, $\mathfrak{S}_n$ は n 次対称群, α は不定元, $\nu(\sigma)$ は σ を巡回置換の積に分解したときの巡回置換の個数である. 例えば, $n = 2, 3$ のときに具体的に書き下してみると,

$$\det_{\alpha} A = a_{11}a_{22} + \alpha a_{12}a_{21}, \text{ for } n = 2$$

$$\begin{aligned} \det_{\alpha} A &= a_{11}a_{22}a_{33} + \alpha(a_{11}a_{23}a_{32} + a_{22}a_{31}a_{13} + a_{33}a_{12}a_{21}) \\ &\quad + \alpha^2(a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21}), \text{ for } n = 3 \end{aligned}$$

となる. また, $\alpha = -1, 0, 1$ のときはそれぞれ

$$\det_{-1} A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}$$

$$\det_0 A = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

$$\det_1 A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}$$

となり, 明らかに $\det_{-1} = \det$, $\det_1 = \text{per}$ である (cf. [13]).

非負定値エルミート行列 A (以下 $A \geq 0$ とも書く) に対して, 次の不等式が成り立つことが知られている.

$$\text{per } A \geq \prod_{i=1}^n a_{ii} \geq \det A \geq 0.$$

一つ目の不等式は Lieb の不等式から (cf. [3]), 二つ目の不等式は Fisher の不等式から得られる. 特に, $A \geq 0$ のとき, $\det_1 A, \det_0 A, \det_{-1} A$ はすべて非負である.

*本講演は高橋陽一郎氏 (京大数理研) との共同研究に基づく

これらのことを踏まえて、以下のような問題を考える。

問題 1.1. $\mathcal{H}$ を非負定値エルミート行列全体とする。どのような $\alpha \in \mathbf{R}$ に対して、

$$A \in \mathcal{H} \implies \det_{\alpha} A \geq 0$$

が成り立つか？

上で述べたように $\alpha = -1, 0, 1$ に対しては $\det_{\alpha}$ は上の性質を持つ。 $\mathcal{H}_n$ を $n \times n$ 非負定値エルミート行列全体とすると、 $A \in \mathcal{H}_2 \implies \det_{\alpha} A \geq 0$ であるための必要十分条件は $\alpha \geq -1$ であり、 $A \in \mathcal{H}_3 \implies \det_{\alpha} A \geq 0$ であるための必要十分条件は $\alpha = -1, -1/2 \leq \alpha \leq 4$ である。

次節では、この問題の動機について述べる。

2 ランダム場 (ボゾン, フェルミオン, ポアソン)

ランダム行列の固有値分布については様々な研究がなされている。ガウシアン・ユニタリー・アンサンブル (GUE) とは、 $N \times N$ エルミート行列全体のなす空間にガウス分布

$$P_N(dX) = Z_N^{-1} \exp(-\text{Tr } X^2) dX$$

を考えたものである。GUE の実固有値の分布は、

$$\begin{aligned} \mu_N(x_1, \dots, x_N) &= c_N^{-1} \prod_{1 \leq i < j \leq N} |x_i - x_j|^2 \exp\left(-\sum_{i=1}^N x_i^2\right) \\ &= \det(K^{(N)}(x_i, x_j))_{i,j=1}^N \end{aligned} \quad (1)$$

によって与えられることはよく知られている [8]。ただし、積分核 $K^{(N)}(x, y)$ は $\psi_i(x)$ を適当に正規化されたエルミート関数の列とすると、

$$K^{(N)}(x, y) = \sum_{i=1}^N \psi_i(x) \psi_i(y)$$

によって与えられる。以下、こうして得られるランダムな N 個の実固有値を $\mathbf{R}$ 上のランダム N 点場として捉えることにしよう。

ここでランダム点場の定義を与えておこう。 R を (粒子の存在する) 局所コンパクト位相空間、 $Q = Q(R)$ は R 上の局所有限な点配置空間とする。つまり、 Q の元は $\xi = \sum_i \delta_{x_i}$, $x_i \in Q$ のように書け、任意のコンパクト集合 A に対して $\xi(A)$ が有限となる非負測度全体である。ランダム点場とは Q 上の確率測度 μ のこと (または、組 (Q, μ) のこと) をいう。

ランダム場を記述するには、ラプラス変換を用いるのが便利である。ラプラス変換とは、テスト関数 $f: R \rightarrow \mathbf{R}$ に対して、

$$\int_Q \mu(d\xi) \exp(-\langle \xi, f \rangle)$$

によって定義されるものである。ただし、 $\xi = \sum_i \delta_{x_i}$ のとき $\langle \xi, f \rangle = \sum_i f(x_i)$ である。代表的な無相関な点場の例としてポアソン場がある。点場が以下の2条件を満たすとき、intensity 測度 λ のポアソン場といい、ここでは μ のかわりに Π_λ と書くことにする。

1. $A_1, A_2, \dots, A_n \subset R$ が互いに素ならば、非負整数値確率変数 $\xi(A_1), \xi(A_2), \dots, \xi(A_n)$ は独立である。
2. R 上の非負ラドン測度 $\lambda(dx)$ に対して、

$$\mu(\xi(A) = n) = \frac{\lambda(A)^n e^{-\lambda(A)}}{n!}$$

を満たす。

ポアソン場のラプラス変換は、

$$\int_Q \Pi_\lambda(d\xi) \exp(-\langle \xi, f \rangle) = \exp\left(-\int_R (1 - e^{-f(x)}) \lambda(dx)\right)$$

となることが簡単な計算よりわかる。

GUE の固有値から得られる点場のラプラス変換は、(1) に与えられた密度関数の形から

$$\int_Q \mu^{(N)}(d\xi) \exp(-\langle \xi, f \rangle) = \text{Det}(I - (1 - e^{-f})K^{(N)})$$

となることがわかる。ただし、 $K^{(N)}$ は上で定義した $K^{(N)}(x, y)$ を積分核とする積分作用素、右辺は $L^2(\mathbf{R})$ 上の積分作用素 $(1 - e^{-f})K^{(N)}$ のフレドホルム行列式である。さらに $N \rightarrow \infty$ では $K(x, y) = \frac{\sin \pi(x-y)}{\pi(x-y)}$ とおくと

$$\int_Q \mu(d\xi) \exp(-\langle \xi, f \rangle) = \text{Det}(I - (1 - e^{-f})K)$$

となり、ある点場 μ が存在する。ラプラス変換がこの形で与えられる点場は、もっと一般の積分核 K に対しても存在する。実際、次のような存在定理を得る [11, 12]。

定理 2.1. $K: L^2(R) \rightarrow L^2(R)$ を対称な局所トレース族¹積分作用素で、スペクトルが $[0, 1]$ に含まれているとする。このとき、 $Q = Q(R)$ 上に

$$\int_Q \mu(d\xi) \exp(-\langle \xi, f \rangle) = \text{Det}(I - (1 - e^{-f})K)$$

¹作用素 K の任意のコンパクト集合 $\Lambda \subset R$ への制限 K_Λ がトレース族であるとき、 K が局所トレース族であるという。

を満たす唯一の確率測度 μ が存在する。また、相関関数は

$$\rho_n(x_1, \dots, x_n) = \det(K(x_i, x_j))_{i,j=1}^n$$

によって与えられる。

ここで得られたランダム点場を [6, 7] に従って、フェルミオン・ランダム (点) 場とよぶ。同様に以下のようにボゾン・ランダム (点) 場も得られる。

定理 2.2. $K : L^2(R) \rightarrow L^2(R)$ を対称な局所トレース族積分作用素で、スペクトルが $[0, \infty)$ に含まれているとする。このとき、 $Q = Q(R)$ 上に

$$\int_Q \mu(d\xi) \exp(-\langle \xi, f \rangle) = \text{Det}(I + (1 - e^{-f})K)^{-1}$$

を満たす唯一の確率測度 μ が存在する。また、相関関数は

$$\rho_n(x_1, \dots, x_n) = \text{per}(K(x_i, x_j))_{i,j=1}^n$$

によって与えられる。

これらの一般化として次の問題を考えよう。

問題 2.3. 対称な局所トレース族積分作用素 $K : L^2(R) \rightarrow L^2(R)$ に対して然るべき条件のもと、

$$\int_Q \mu_{\alpha,K}(d\xi) \exp(-\langle \xi, f \rangle) = \text{Det}(I + \alpha(1 - e^{-f})K)^{-1/\alpha} \quad (2)$$

を満たす確率測度 $\mu_{\alpha,K}$ は存在するか？

この問題の意味を考えるためにもっとも簡単な例を考えてみよう。 R を一点 x からなる空間とする。このとき配置空間 $Q = Q(R)$ は点 x にある粒子の個数と同一視できるから、 $Q = \{0, 1, 2, \dots\}$ としてよい。このとき、左辺は

$$\int_Q \mu(d\xi) \exp(-\langle \xi, f \rangle) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nf} \mu(\{\xi = n\})$$

となる。一方、右辺は

$$\begin{aligned} & (1 + \alpha(1 - e^{-f})K)^{-1/\alpha} \\ &= (1 + \alpha K)^{-1/\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 + \alpha)(1 + 2\alpha) \cdots (1 + (n-1)\alpha)}{n!} \left(\frac{K}{1 + \alpha K} \right)^n e^{-nf} \end{aligned}$$

となり、両辺比較することにより、

$$\mu(\{\xi = n\}) = (1 + \alpha K)^{-1/\alpha} \frac{(1 + \alpha)(1 + 2\alpha) \cdots (1 + (n-1)\alpha)}{n!} \left(\frac{K}{1 + \alpha K} \right)^n$$

を得る. μ が確率測度になるためには, 任意の $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して, $(1+\alpha)(1+2\alpha)\cdots(1+(n-1)\alpha) \geq 0$ となることが必要十分であり, これは

$$\alpha \in [0, \infty) \cup \{-1/m; m = 1, 2, \dots\}$$

と同値である. このとき, μ は「一般化された二項分布」と呼ばれるものである. 上の簡単な考察により, 一般の α と K に対しては (2) を満たす確率測度 $\mu_{\alpha, K}$ は存在しないことがわかった.

それでは, どのような α と K の条件のもと, $\mu_{\alpha, K}$ は存在するのか? もしもランダム場 $\mu_{\alpha, K}$ が存在したとすると, 相関関数は

$$\rho_n(x_1, \dots, x_n) = \det_{\alpha}(K(x_i, x_j))_{i,j=1}^n$$

となる. よって, ランダム場が存在するためには, この量が非負になることが必要である. このようにして1節で考えた問題に辿りつく. 実際, もう少し考察を進めると, 与えられた K に対して, $J_{\alpha} = K(I + \alpha K)^{-1}$ を考えて, この J に対する $\det_{\alpha}(J(x_i, x_j))_{i,j=1}^n, \forall x_1, \dots, x_n, \forall n \geq 0$ の非負性が, ランダム場 $\mu_{\alpha, K}$ の存在と同値になることがわかる.

注意 2.4. $\alpha = 0$ は何に対応しているのか考えてみる. $\lambda_i, i \geq 1$ を $(1 - e^{-f})K$ の固有値とする.

$$\begin{aligned} & \text{Det}(I + \alpha(1 - e^{-f})K)^{-1/\alpha} \\ &= \prod_{i \geq 1} (1 + \alpha\lambda_i)^{-1/\alpha} \rightarrow \prod_{i \geq 1} e^{-\lambda_i} \\ &= \exp(-\text{Tr}(1 - e^{-f})K) = \exp\left(\int_R (1 - e^{-f})K(x, x)dx\right). \end{aligned}$$

となり, $\mu_{0, K}$ は intensity 測度が $K(x, x)dx$ のポアソン場になり, ポアソン場はこの枠組に入ることがわかる.

3 現在までわかっていること

現在までわかっていることは以下のことである.

定理 3.1. $\alpha \in \{-1/m; m = 1, 2, \dots\} \cup \{0\} \cup \{2/m; m = 1, 2, \dots\}$ に対しては, 任意の非負定値な K に対するランダム場 $\mu_{\alpha, K}$ が唯一存在する. その相関関数は $\det_{\alpha}(K(x_i, x_j))$ で与えられる.

注意 3.2. 上の定理は, 任意の非負定値な K に対してランダム場 $\mu_{\alpha, K}$ が存在するための α の条件を与えている. 逆に, 与えられた K に対して, $J_{\alpha}(x, y) = K(I + \alpha K)^{-1}(x, y) \geq 0, \forall x, y \in R$ となることは, 任意の $\alpha \geq 0$ に対して $\mu_{\alpha, K}$ が存在するための十分条件となる.

定理 3.1 の系として次が得られる.

系 3.3. $\alpha \in \{-1/m ; m = 1, 2, \dots\} \cup \{0\} \cup \{2/m ; m = 1, 2, \dots\}$ に対しては,

$$A \geq 0 \implies \det_{\alpha} A \geq 0.$$

定理 3.1 の証明のアイディアは以下の通りである.

$\alpha = \pm 1$ のときの確率測度 $\mu_{\pm 1, K}$ の存在は定理 2.1 と定理 2.2 によりわかっている. 一方, 独立なランダム場の m 個の重ねあわせのラプラス変換は, ラプラス変換の m 乗になることに注意すれば, $\alpha = \pm 1/m$ の確率測度の存在はわかる.

$\alpha = 2$ は少し特別である. 任意の非負定値な K に対しては, $E[X(x)] = 0, E[X(x)X(y)] = K(x, y)$ となるガウス場 $\{X(x), x \in R\}$ が存在することが知られている. ランダムな intensity 測度 $X^2(x)\lambda(dx)$ を持つポアソンランダム場 Π_{X^2} をガウス場について平均をとった $E[\Pi_{X^2}]$ が $\mu_{2, K}$ になることがラプラス変換の計算によりわかる. $\alpha = 2$ の存在がわかれば, $\alpha = 2/m$ の場合は $\alpha = \pm 1/m$ の場合と同様である.

特に $\alpha = 2$ の場合の結果より, 以下の系を得る.

系 3.4. $X_1, \dots, X_n$ を平均 0, 共分散行列が A のガウス分布とすると,

$$\det_2 A = E[X_1^2 \cdots X_n^2].$$

また, 数値計算などにより, $\det_{\alpha}$ について以下のことを予想している.

予想 3.5. $\alpha \in [0, 2] \cup \{-1/m ; m = 1, 2, \dots\}$ のとき,

$$A \geq 0 \implies \det_{\alpha} A \geq 0.$$

4 関連する話題

正值性の問題は, 組合せ論, 確率論においてしばしばあらわれる.

(1) $\det_{\alpha} A$ と同様に $\det A$ と $\text{per } A$ を補間するものとして, $\det_q A$ という q -アナログに関連するものがあり,

$$\det_q A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} q^{\iota(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}$$

によって定義される. ただし, $\iota(\sigma)$ は反転数と呼ばれ,

$$\iota(\sigma) = \#\{(i, j) ; 1 \leq i < j \leq n, \sigma(i) > \sigma(j)\}$$

である. この $\det_q A$ についても問題 1.1 と同様の問題が考えられるが, $-1 \leq q \leq 1$ のとき, 行列 $(q^{\iota(\sigma\eta^{-1})})_{\sigma, \eta \in \mathfrak{S}_n}$ が非負定値となることにより, $\det_q A$ の非負値性が従う [1].

(2) χ_λ を n の分割 λ に対応する $\mathfrak{S}_n$ の既約表現の指標とする. この既約指標に対して,

$$\det_\lambda A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \chi_\lambda(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}$$

と定義する. これは immanant と呼ばれ [3, 5], 任意の非負定値行列 A に対して

$$\det_\lambda A \geq 0$$

となることが簡単にわかる. さらに, Schur は以下のことを証明している [10].

$$\det_\lambda A \geq \chi_\lambda(1) \det A.$$

この類似で, 任意の非負定値行列 A に対して

$$\det_\lambda A \leq \chi_\lambda(1) \text{ per } A.$$

が成り立つであろうという Lieb による予想がある. 現在までのところ, $n \leq 13$ までは正しいことが証明されている [9].

(3) $\det_\alpha A$ は immanant を用いて展開することができる.

$$\det_\alpha A = \sum_{|\lambda|=n} \alpha^\lambda \binom{\alpha^{-1}}{\lambda'} \det_\lambda A.$$

ただし, λ' は λ の dual, $\binom{\beta}{\lambda}$ は一般化された二項係数で,

$$\binom{\beta}{\lambda} = \prod_{x \in \lambda} \left(\frac{\beta - c(x)}{h(x)} \right)$$

である. x が λ に対応するヤング図形の i 行 j 列の箱のとき $c(x) = j - i$, $h(x)$ は hook length をあらわす.

この表示より, $|\alpha| \leq 1/n$ のときは,

$$A \in \mathcal{H}_n \implies \det_\alpha A \geq 0$$

となる.

参考文献

- [1] M. Bożejko and R. Speicher, *An example of a generalized Brownian motion*, Commun. Math. Phys. **137** (1991), 519–531.
- [2] D. J. Daley and D. Veres-Jones, *An Introduction to the Theory of Point Processes*, Springer Verlag, 1988.

- [3] G. James, *Permanents, Immanants, and Determinants*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 47 (1987), 431–436.
- [4] E. H. Lieb, *Proofs of some conjectures on permanents*, J. Math. and Mech. 16 (1966), 127–134.
- [5] D. E. Littlewood, *The Theory of Group Characters and Matrix Representations of Groups*, 2nd edition, Oxford University Press, London, 1958.
- [6] O. Macchi, *The coincidence approach to stochastic point processes*, Adv. Appl. Prob. 7 (1975), 83–122.
- [7] O. Macchi, *The fermion process – a model of stochastic point process with repulsive points*, Transactions of the Seventh Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions, Random Processes and of the Eighth European Meeting of Statisticians (Tech. Univ. Prague, Prague, 1974), Vol. A, 391–398.
- [8] M. L. Mehta, *Random Matrices*, 2nd edition, Academic Press, 1991.
- [9] T. H. Pate, *Tensor inequalities, ξ -functions and inequalities involving immanants*, Linear Alg. and its Applications 295 (1999), 31–59.
- [10] I. Schur, *Über endliche Gruppen und Hermitesche Formen*, Math. Z. 1 (1918), 184–207.
- [11] T. Shirai and Y. Takahashi, *Random points fields associated with certain Fredholm determinants I : Fermion, Poisson and Boson point process*, RIMS preprint.
- [12] A. Soshnikov, *Determinantal random point fields*, Russian Math. Surveys 55 (2000), 923–975.
- [13] D. Vere-Jones, *A generalization of permanents and determinants*, Linear Algebra Appl. 111 (1988), 119–124.