

海洋内部重力波の非局所的波数間相互作用

Dept. Math. Sci., RPI

Yuri V. Lvov

Dept. Mech. Eng., Doshisha Univ.

Naoto Yokoyama*

連続的に安定成層した海洋の内部では、内部重力波の波数間相互作用がエネルギースペクトルの慣性小領域を支配する。内部重力波のような異方性のある系では、等方な系とは異なり、単純な次元解析では自己相似的なエネルギースペクトルのべき指数を決定することができない。2000 年以前は、Garrett–Munk(GM) スペクトルが“普遍”平衡スペクトルモデルと考えられていた [1]。GM スペクトルは 1970 年代に北大西洋での観測によって得られたスペクトルである。しかしながら、海域や季節の異なる多くの観測がなされると、GM スペクトルとは異なるべき指数をもつ多様なスペクトル形が得られている [2]、現在では GM スペクトルは普遍ではないと考えられている。

エネルギースペクトルを決定する波数間の非線形相互作用は、弱乱流理論に基づいて得られる運動論的方程式、

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(\mathbf{p})}{\partial t} = & 2\pi \int d\mathbf{p}_{12} (|V_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}^{\mathbf{p}}|^2 (n(\mathbf{p}_1)n(\mathbf{p}_2) - n(\mathbf{p})(n(\mathbf{p}_1) + n(\mathbf{p}_2))) \delta_{0-1-2}^{\mathbf{p}} \delta_{0-1-2}^{\omega} \\ & - |V_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}}^{\mathbf{p}_1}|^2 (n(\mathbf{p}_2)n(\mathbf{p}) - n(\mathbf{p}_1)(n(\mathbf{p}_2) + n(\mathbf{p}))) \delta_{0-1+2}^{\mathbf{p}} \delta_{0-1+2}^{\omega} \\ & - |V_{\mathbf{p}, \mathbf{p}_1}^{\mathbf{p}_2}|^2 (n(\mathbf{p})n(\mathbf{p}_1) - n(\mathbf{p}_2)(n(\mathbf{p}) + n(\mathbf{p}_1))) \delta_{0+1-2}^{\mathbf{p}} \delta_{0+1-2}^{\omega}), \quad (1) \end{aligned}$$

によって記述される。内部重力波系の運動論的方程式は、3 波共鳴相互作用によって実質的なエネルギー輸送が起ることを示している。

ウェイブアクションが自己相似的、 $n(\mathbf{k}, m) \propto |\mathbf{k}|^{-\alpha} |m|^{-\beta}$ 、であると仮定すると、ほとんどすべての指数 (α, β) の組み合わせについて運動論的方程式 (1) の右辺に現れる衝突積分が発散する [4]。この発散は、波数空間内の非局所的な大スケール–小スケール間の相互作用を意味する。

運動論的方程式 (1) の定常解として、Pelinovsky–Raevsky(PR) スペクトル、 $(\alpha, \beta) = (7/2, 1/2)$ 、が存在する。PR スペクトルは、衝突積分の長波からの寄与、 I_{IR} 、と短波からの寄与、 I_{UV} が厳密に相殺する定常解である。

赤外領域からの寄与では、 $-3 < \beta < 3$ の指数に関して、誘導拡散型の共鳴波数の組み合わせが卓越する。このとき、 $7 < 2\alpha + \beta$ の指数の組み合わせで衝突積分が発散し、その符号は、 $\text{sgn}(I_{\text{IR}, \text{ID}}) = \text{sgn}(\beta(\beta - 1))$ で与えられる。また、紫外領域において、 $-2 < \beta < 2$ の指数に関して、 $2\alpha + \beta < 8$ の領域で誘導拡散型が発散的に卓越し、その符号は $\text{sgn}(I_{\text{UV}, \text{ID}}) = \text{sgn}(\beta)$ で与えられる。さらに、 $\alpha < 3$ 、 $\beta > 2$ では、弾性散乱が発散的に卓越し、その符号は $\text{sgn}(I_{\text{UV}, \text{ES}}) = \text{sgn}(-\beta)$ で与えられる。すなわち、

$$7 < 2\alpha + \beta < 8 \text{ and } -2 < \beta < 1, \quad (2a)$$

$$7 < 2\alpha + \beta, \alpha < 3 \text{ and } \beta > 2, \quad (2b)$$

*e-mail: nyokoyam@mail.doshisha.ac.jp

の2つの指数領域で衝突積分の赤外・紫外からの寄与が発散し、互いに逆の符号をもつ。このことは、PR スペクトルと同様の赤外・紫外からの寄与がバランスする (準) 平衡解が存在しうることを示唆している。実際に観測によって得られる指数は、これらの指数領域内部または近傍に存在する。

このように、弱乱流理論は内部重力波系のエネルギー・スペクトルを記述するにあたって、観測結果をよく説明することができる。また、直接数値計算においても波数空間の非局所的な相互作用が卓越することが示されており [3], 弱乱流理論の結果とも一致する。

一方で、衝突積分の発散は弱乱流理論が適用できないことを示唆している [5]。これは、線形の時間スケールが非線形の時間スケールよりも充分短いとする、時間スケールの分離の仮定に反するためである。

本研究では、これまでの弱乱流理論とは異なり、3 波相関関数の時間発展方程式

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} + (\omega - \omega_1 - \omega_2)\right) \langle a^* a_1 a_2 \rangle_E = V_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}^{\mathbf{p}^*} (n(n_1 + n_2) - n_1 n_2)$$

から3 波相関関数を得る際に、ウェイブアクションの時間変化率が十分に小さいことを仮定せずに、

$$\begin{aligned} \langle a^* a_1 a_2 \rangle_E(t) = & \langle a^* a_1 a_2 \rangle_E(t_0) e^{-i(\omega - \omega_1 - \omega_2)(t - t_0)} \\ & - i V_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}^{\mathbf{p}^*} \int_{t_0}^t (n(s)(n_{\mathbf{p}_1}(s) + n_{\mathbf{p}_2}(s)) - n_{\mathbf{p}_1}(s)n_{\mathbf{p}_2}(s)) e^{-i(\omega - \omega_1 - \omega_2)(t - s)} ds \end{aligned}$$

が得られた。この3 波相関関数を用いると、初期から十分時間が経過した後のウェイブアクションの時間変化は、運動論的方程式 (1) で与えられることを示した。ここで、初期から十分経過する時間は、初期状態依存性がなくなるために必要な時間であり、従来の弱乱流理論で仮定されている線形運動を長時間積分によって相殺するために必要な時間とは質的に異なる。このようにして、時間スケール分離の仮定を用いずに運動論的方程式が得られたことから、内部重力波のエネルギー・スペクトルが運動論的方程式の統計的定常解で与えられることが矛盾なく説明することが可能となった。

- [1] C. J. R. Garrett and W. H. Munk. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 11:339–369, 1979.
- [2] Y. V. Lvov, K. L. Polzin, and E. G. Tabak. *Phys. Rev. Lett.*, 92:128501, 2004.
- [3] Y. V. Lvov and N. Yokoyama. *Physica D*, 238:803–815, 2009.
- [4] Y. Lvov, E. Tabak, K. Polzin, and N. Yokoyama. The oceanic internal wavefield: Theory of scale invariant spectra. *submitted to J. Phys. Oceanogr.*, 2008.
- [5] V. E. Zakharov, V. S. L’vov, and G. Falkovich. *Kolmogorov Spectra of Turbulence I: Wave Turbulence*. Springer-Verlag, Berlin, 1992.