

Semigroups の収束性とその応用

早大, 理工 洲之内 裕男

§1 Abstract Cauchy problem と semigroups の収束

$$(1.1) \quad \frac{du}{dt} = Au, \quad u(0) = u_0.$$

u Banach 空間 X で考えよう. A は densely defined, closed l. op.

とし core D (D は dense で, $\overline{A|_D} = A$) をとりとする.

これに差分近似を対応させる方法には, $\{A_n\}$ というものの意味で A を近似する有界作用素の列:

$$(1.2) \quad A_n u \rightarrow Au, \quad u \in D$$

($n \rightarrow \infty$ とき, $\{A_n\}$ は A と consistent である) とし,

$$(1.3) \quad \frac{du}{dt} = A_n u, \quad u(0) = u_0.$$

なる方程式の列を考えよう. (1.3) は (1.1) の (semi-discrete)

difference scheme と呼ぶ. A_n は有界作用素だから, (1.3)

の解 u_n は

$$(1.4) \quad u_n(t) = \exp(tA_n)u_0 \equiv T_n(t)u_0.$$

と有り, $\{T_n(t); t \geq 0\}$ は unif. cont. semigroups の列となる。
 この semigrps の列の通きる条件の下に (1.1) の解に収束するといえる。このとき, (1.1) の解は $u(t) \equiv u_0$ となる。このよう
 な議論は Trotter に始まる。この Cauchy 問題の可解性は semigroups の列の収束性に帰着される。

定理 1. Consistency cond. の下で, (1.3) の解は,

$$(1.5) \quad \sup \| \exp(tA_n) \| < \infty \quad \text{for each } t > 0$$

$$\exists \gamma > 0; \sup \int_0^\infty e^{-\gamma t} \| \exp(tA_n) \| dt < \infty$$

$$(1.6) \quad s\text{-}\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda; A_n) = I, \quad \text{unif. in } n,$$

$$(1.7) \quad \rho(A) \cap \{ \lambda; \operatorname{Re} \lambda > \gamma \} \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow u_n(t) = T_n(t)u_0 \rightarrow u(t) = T(t)u_0, \quad \text{where } \{T(t); t \geq 0\}$$

は $(0, A)$ -semigrp. になり, かつ, この意味で (1.1) の解

である:

$$\frac{d T(t)u}{dt} = A T(t)u,$$

$$\lim_{t \rightarrow 0+} T(t)u = u$$

for $u \in D(A)$.

(1.5) の代りに,

$$(1.5') \quad \sup \| \exp(tA_n) \| \leq M e^{\omega t}$$

$\Rightarrow \{T(t)\}$ は (C_0) -semigroup になる。

証明は, 大森 - 洲之内 [4].

すなわち, semigroup $\{T(t)\}$ の $u < \infty$ の class Σ 上に $T(t)$ が
 < 有界線形作用素の族 $\{T(t); t \geq 0\}$ が一般に semigroup
 を作ることは,

$$(1.8) \quad T(t)T(s) = T(t+s), \quad t, s \geq 0$$

$$(1.9) \quad \lim_{t \rightarrow t_0} T(t)x = T(t_0)x, \quad t_0 \geq 0$$

をいう。このとき, type $\omega_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \log \|T(t)\|$ が定まる。

semigr. $\{T(t)\}$ の class (A) については, $X_0 = \bigcup_{t \geq 0} T(t)[X]$ を X の
 dense 子, $\exists \omega_1 > \omega_0; \forall \lambda; \operatorname{Re} \lambda > \omega_1$ に對し, $\operatorname{hd. l. op.} R(\lambda)$
 が定義され,

$$(a) \quad R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt, \quad x \in X_0,$$

$$(b) \quad \sup_{\operatorname{Re} \lambda > \omega_1} \|R(\lambda)\| < \infty$$

$$(c) \quad s\text{-}\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda) = I$$

が成り立ち,

$$(d) \quad \int_0^1 \|T(t)x\| dt < \infty, \quad \text{または, } (d') \quad \int_0^1 \|T(t)\| dt < \infty$$

のとき, それぞれ $(0, A)$, または $(1, A)$ -class といい。

Abstract Cauchy problem (1.1) が定理 1 の意味で解けるとき,
 $(0, A)$ -well-posed, $(1, A)$ -well-posed というこゝに於ける。す
 ると一般に, semigroup の意味で well-posed が定義
 できる。

たとえば, $u_0 \in D(A \text{ a core})$ に對し, 唯一つの genuine

solution $u(t) = T(t)u_0$. かつ $\|T(t)u_0\| \leq M_t \|u_0\|$

と存在するとき, この $\{T(t)\}$ の全空間への拡張は *semigr.* となる

すなわち u がある. したがって, §1.1) は S. G. well-posed となる

3. (genuine sol. $u(t) = u(t, u_0)$ に対して, A.C., cont. diff. であり,

$$u(t) \in \mathcal{D}(A) \text{ であり, } \frac{du}{dt} = Au(t), \quad t > 0, \quad u(t, u_0) \rightarrow u_0 \quad (t \rightarrow 0))$$

§2. Semi-discrete difference scheme の収束.

上の定理 1 は, Cauchy 問題が well-posed であることが複雑なものであるが,

定理 2. Cauchy 問題 (1.1) が $(0, A)$ -well-posed, 3. type ω_0 と存在するとき, consistent difference scheme (1.3) は, stability cond.

$$(2.1) \quad \exists \gamma (> \omega_0), L > 0; \quad \|R(\lambda; A_n)\| \leq L \quad \text{for } \operatorname{Re} \lambda > \gamma,$$

$$(2.2) \quad \sup_n \|\exp(tA_n)\| < \infty, \quad t > 0$$

$$\Rightarrow u_n(t) \rightarrow u(t) \quad \text{for } t > 0.$$

この条件は比較的見やすい.

すなわち, 定数係数の偏微分方程式

$$(2.3) \quad \frac{du}{dt} = P(D)u, \quad u(0) = u_0$$

を $L^2(\mathbb{R}^d)$ で考えよう. $u \in L^2$ の Fourier 変換を $\hat{u}(\xi)$ で表す

すると, (2.3) は

$$(2.4) \quad \frac{d\hat{u}}{dt} = P(\xi)\hat{u}(\xi, t), \quad \hat{u}(\xi, 0) = \hat{u}_0.$$

いま, $\frac{\partial u_j}{\partial x_k}$ の差分近似として, 中心差分

$$\frac{\delta u_j}{\delta x_k} = \frac{u_j(x + h_k e_k) - u_j(x - h_k e_k)}{2h_k}$$

(e_k は k 方向単位ベクトル) をとることにし, (2.3) の D を

この中心差分を用いた δ の Fourier 変換をとる.

$$(2.5) \quad \frac{d\hat{u}}{dt} = P(\xi(h)) \hat{u}(\xi, t), \quad \hat{u}(\xi, 0) = \hat{u}_0, \quad$$

$$\xi(h) = (\xi_1(h), \dots, \xi_d(h)) = \left(\frac{\sin(h_k \xi_k)}{h_k} \right) \quad \text{と置く.}$$

(2.5) の解は,

$$\hat{u}_h(t, \xi) = \exp(tP(\xi(h))) \hat{u}_0(\xi) = \exp(tA_h) \hat{u}_0(\xi).$$

$$\text{ここで, } |\xi| \leq \pi/2h \text{ により, } |\xi|/2 \leq |\xi(h)| \leq |\xi| \text{ となる.}$$

よって,

$$\sup_{\xi(h)} |(\lambda I - P(\xi(h)))^{-1}| \leq \sup_{\xi} |(\lambda I - P(\xi))^{-1}|,$$

$$\sup_{\xi(h)} |\exp(tP(\xi(h)))| \leq \sup_{\xi} |\exp(tP(\xi))|$$

となり, これは (2.1), (2.2) の条件である. よって,

定理3. 定数係数の Cauchy 問題 (2.3) の $L^2(\mathbb{R}^d)$ の

$(0, A)$ -, または (C_0) -well-posed とする, ならば, 解は

収束する difference schemes が存在する.

§3. 例と微分可能性について comment.

$L^2(\mathbb{R})$ の定数係数の Cauchy 問題を考える. Fourier 変換を $\mathcal{F}$ とする (2.4) の形式にすると,

$$(3.1) \quad P(\xi) = \begin{pmatrix} -\xi^2 + i\xi^4 & \xi^8 \\ -\xi^2 + i\xi^4 & \xi^8 \end{pmatrix}$$

に相当する (1.5). これは exponent $h=2$ の (Shilov の意味での) parabolic eq. である.

$$(3.2) \quad \exp(tP(\xi)) = \begin{pmatrix} \exp(t(-\xi^2 + i\xi^4)) & t\xi^8 \exp(t(-\xi^2 + i\xi^4)) \\ \exp(t(-\xi^2 + i\xi^4)) & \exp(t(-\xi^2 + i\xi^4)) \end{pmatrix}$$

である, $\sup_{\xi} |\exp(tP(\xi))| < \infty$, for each $t > 0$, $s \geq 2$ S.G.-well-posed.

$$(3.3) \quad R(\lambda; P(\xi)) = \begin{pmatrix} 1/(\lambda + \xi^2 - i\xi^4) & \xi^8/(\lambda + \xi^2 - i\xi^4)^2 \\ 1/(\lambda + \xi^2 - i\xi^4) & \xi^8/(\lambda + \xi^2 - i\xi^4)^2 \end{pmatrix}$$

$s \geq 2$, $s > 8 \Rightarrow P(\xi)$ の resolvent set $= \emptyset$,

$s \leq 4 \Rightarrow (0, A)$ -well-posed,

$s \leq 2 \Rightarrow (C_0)$ -well-posed (Kreiss の matrix th. による).

$5 \leq s \leq 8 \Rightarrow (A)$ -~~well-posed~~ ^{well-posed}. $\lambda \in \mathbb{C}$ かつ $\lambda \neq 0$ とする,

$\lambda = -\xi^2 + i\xi^4$. $s \geq 2$, sector $\Sigma = \{\arg \lambda \leq \frac{\pi}{2} + \theta_0\}$ を含む,

$\mathbb{R} \subset \Sigma$,

$$(3.4) \quad |\lambda| \|R(\lambda; P(\xi))\| \leq P(|\lambda|) \quad P \text{ は 多項式.}$$

とあるが, Lagnese[2]は,

$$T(t)x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} R(\lambda; A)x \, d\lambda$$

で定義すると, $\{T(t)\}$ は semigr. を作り, しかも, $T(t)x$ は t に関して無限回微分可能で,

$$\frac{d^n T(t)x}{dt^n} = A^n T(t)x$$

を示すこととを示している. 実際は, Agmon-Nirenberg[1]の参考文献の方程式の解の存在を示すのが目的.

なお, semigr. の微分可能性の問題は $(C_0)/(C_0, A)$ のとき, Pazy[5]に解決されている.

§4. Perturbation.

定理 13) で, $\{T(t)\}$ は $(1, A)$ -semigr., A は $\mathcal{B}$ の generator とするときは, perturbed op. B かつ $\mathcal{D}(B) \supset \mathcal{D}(A)$ で,

$$i) \text{ 有界作用素 } B_n; \quad B_n x \longrightarrow Bx, \quad x \in \mathcal{D}(A),$$

$$ii) \quad \sup \int_0^t \|B_n T(t)\| \, dt < \infty$$

$\Rightarrow A + \varepsilon B$ は $(1, A)$ -semigr. を生成する, という定理を示す.

2, 3 の証明で, semigr. の perturbation は本質的に,

$$1) \quad B \text{ が有界作用素 } \alpha \text{ ときの perturbation } \varepsilon,$$

$$2) \quad \text{semigr. の列の収束性}$$

からなることを示す。まず, $(0, A)$ -, 又は u は (A) -semi-gr. の収束性から u は u から, 1) の u は (A) -semi-gr. である (2) の同様の形の perturbation から u は u である, u の u は u から u .

また, (C_0) -semi-gr. の perturbation は相違する $\frac{1}{2}$ 分の u の perturbation である, u の u は u である。

Cauchy 問題 $\frac{du}{dt} = Au$, $u(0) = u_0$ は (C_0) -well-posed,

$$u((m+1)h_n) = C_n u(mh_n), \quad u(0) = u_0$$

である difference scheme は stable である, u の解 $u_n([t/h_n]h_n) \rightarrow u(t)$ である。Perturbed eq.

$$(4.1) \quad \frac{du}{dt} = Au + Bu, \quad u(0) = u_0$$

である u は, B は consistent である $\frac{1}{2}$ 分の近似 B_n である u は u である,

C_n, B_n より (4.1) の stable scheme は u である。

定理. B は (unbd.) l.o.p. である, $\mathcal{D}(B) \supset \mathcal{D}(A)$,

B は consistent である $\{B_n\}$ である, 十分大きい λ は u である

$$(4.2) \quad N_\lambda = \sup_{\|u\|=1} \sup_n h_n \sum_{j=1}^{T_n} \exp(-\lambda j h_n) \|B_n C_n^j u\| < 1$$

$\Rightarrow$

$$u_n(h_n) = C_n u$$

$$(4.3) \quad u_n(mh_n) = (C_n(I + h_n B_n))^{m-1} C_n u, \quad m \geq 2$$

である scheme は (4.1) の解に収束する。

これは高次の定理の difference analogy.

この証明より (2), parabolic eq. は低次の項を省略して得られる。
 $\varepsilon \leq \frac{1}{2} \varepsilon_0$ とする。

$$\frac{du}{dt} = P(D)u + Q(D)u,$$

$u' = P(D)u$ は (Petrovski の意味で) parabolic, order $2p$,

$Q(D)$ の order $q < 2p$ とする。このとき, Aronson 等によ

り, $P(D)$ は consistent, stable な parabolic difference

scheme (amplification matrix の固有値 λ_i とするに,

$|\lambda_i| \leq 1 - \delta |\xi|^{2p}$ とおける) が存在するといわれる。

このとき, $Q(D)$ は consistent なものと仮定する。

D は 1 階の difference operator Δ の近似と仮定する。

上の (4.2) は満足するといわれる。これは,

$$\|\Delta^g C_n^{-1} u_0\| \leq C_g \cdot (g+1) h_n^{-8/2p} \|u_0\| \quad (g \leq 2p)$$

より,

$$h_n \sum_{j=1}^{T_n} \exp(-\lambda_j h_n) \|B_n C_n^{-1} u_0\| \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t} t^{-3/2p} \|u_0\| dt \rightarrow 0 \quad (\lambda \rightarrow \infty)$$

に於ける。

ところで, Thomée [7] による L^2 での parabolic difference scheme
 での perturbation of lower order terms に関する stable なこと
 がいえる。(このときは, Shilov の意味で parabolic, (C_0) -well-
 posed のとき, 微分方程式のときと同じことである。)

文献

- [1] Agmon -Nirenberg: Properties of solutions of ordinary differential equations in Banach space, C.P.A.M. 16(1963) 121-239
- [2] Lagnese: On equations of evolution and parabolic equations of higher order in t , to appear.
- [3] Miyadera: Perturbation theory for semigroups of operators, 数学 20(1968) 14-25
- [4] Oharu and Sunouchi: On the convergence of semigroups of linear operators, J. Funct. Analysis, to appear.
- [5] Pazy: On the differentiability and compactness of semigroups of linear operators, J. Math. Mechn. 17(1968) 1131-1141
- [6] Sunouchi: Perturbation theory of difference schemes, Num, Math. 12(1968) 454-458
- [7] Thomée: Parabolic difference operators, Math. Scand. 19(1966) 77-107
- [8] Thomée: Stability theory for partial difference operators, SIAM Review 11(1969) 152-195