

雲のモデル化とシミュレーション

北海道大学 電子科学研究所 柳田達雄

東京大学 教養学部 金子邦彦

1 はじめに

雲の形態がいかにして決定されるかに興味がある。雲の動力学は流体運動と相転移のダイナミクスの結合系であるため基礎方程式から解析する事はできない。もちろん、最近の計算機の発展によりある程度の”シミュレーション”が可能となり、実測データとの対応や雲内部で起こっている出来事の解明を助ける事となったが、雲の「モルフォロジー」がパラメータ空間の中でいかにして決定されているか? という問題にたいしては無力であろう。ここでは構成論的にモデルを作成し雲の動力学の解明をこころみる。

2 雲のモデル

2次元空間でのモデル化を示す(3次元でも同様である)。2次元の正方格子 $(x, y) (x = 1, \dots, N_x; y = 1, \dots, N_y)$ 、(x は水平方向、 y は鉛直方向とする) を考え、雲のパターンの生成・消滅のダイナミクスを表現する場の変数として速度 $\vec{v}(x, y)$ ・温度 $T(x, y)$ ・蒸気量 $w_v(x, y)$ ・液滴量 $w_l(x, y)$ を選ぶ。雲が生成・消滅する物理過程として以下の要因を考慮する：(1) 浮力、(2) 粘性、(3) 拡散、(4) 非圧縮性効果、(5) 移流、(6) 断熱膨張、(7) 相転移、(8) 潜熱、(9) 引きずり、(10) 液滴の落下。この物理過程 [1] を次に示すような簡単なダイナミクスに置き換える。浮力は温度の関数としてダイナミクス $f_{\text{浮力}} : v_y^{t+1/3}(x, y) = v_y^t(x, y) + \frac{c}{2} \{T^t(x+1, y) + T^t(x-1, y) - 2T^t(x, y)\}$ で表し、¹粘性、拡散は $f_{\text{粘性}} : v^{t+2/3}(x, y) = v^{t+1/3}(x, y) + \eta \Delta v^{t+1/3}(x, y)$ 、 $f_{\text{熱拡散}} : T^{t+1/3}(x, y) = T^t(x, y) + \lambda \Delta T^t(x, y)$ 、 $f_{\text{拡散}} : w_v^{t+1/3}(x, y) = w_v^t(x, y) + \lambda \Delta w_v^t(x, y)$ で表わす。ここで Δ は離散化した Laplace 演算子 $\Delta A(x, y) \equiv \{A(x+1, y) + A(x, y+1) + A(x-1, y) + A(x, y-1) - 4A(x, y)\}/4$ である。また、ここでは非圧縮性流体の条件 $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ を完全に要求する代わりに $\nabla(\nabla \cdot \vec{v})$ を離散化したダイナミクスを実行してベクトル場の発散を抑えている(非圧縮性効果)。通常この条件は各時刻で毎回 Poisson 方程式を解くことにより満たさなくてはならない。しかし、これには膨大な計算時間を必要とするため、ここでは精確に非圧縮条件を要求せずに局所的なダイナミクスによって非圧縮性効果を表現している。さらに、移流 $(\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}, \vec{v} \cdot \nabla T, \vec{v} \cdot \nabla w_l, \vec{v} \cdot \nabla w_v)$ を表すために Lagrange 写像を導入する。各格子点 (x, y) に準粒子を配置し各準粒子はそこでの速度 $\vec{v}(x, y)$ にしたがって位置 $(x + v_x, y + v_y)$ に移動して場の量を運搬する。一般に移動した先 $(x + v_x, y + v_y)$ は格子上ではないため最近接格子にテコの法則(粒子の位置と格子との距離に反比例させる)に従い場の量を分配して移流を表わす。すなわち、格子点 (x, y) の準粒子は移動した先の近接の格子点 $([x + v_x], [y + v_y])$, $([x + v_x + 1], [y + v_y])$, $([x + v_x], [y + v_y + 1])$, $([x + v_x + 1], [y + v_y + 1])$ に場の量を以下のように分配す

¹最終的な時間発展は時刻 t から $t+1$ の写像であるが、我々の手法は上で選んだ物理的要因を写像として表現し逐次に場の変数に作用させるため、便宜上、以下では中間段階の時間ステップを $t+1/3$ のように表す。

る。

$$\begin{aligned}
 X([x+v_x], [y+v_y]) &= (1-v_x)(1-v_y) X(x, y) \\
 X([x+v_x+1], [y+v_y]) &= v_x(1-v_y) X(x, y) \\
 X([x+v_x], [y+v_y+1]) &= (1-v_x)v_y X(x, y) \\
 X([x+v_x+1], [y+v_y+1]) &= v_x v_y X(x, y)
 \end{aligned} \tag{1}$$

ここで $X(x, y)$ は全ての場の変数 (T, v_x, v_y, w_l, w_v) について行い、 $[z]$ はガウス記号で z よりも小さい最大の整数である。

変数として温度場、速度場のみを考え以下のように (1) から (5) までの物理要因を逐次作用させると熱対流系のモデルとなり、底面と上面の温度差 (レイリー数)、熱伝導率 λ と粘性率 η の比 (プラントル数)、容器の縦横比 N_x/N_y (アスペクト数) の3つパラメータを変化させることによって熱伝導から対流への遷移、ロールの周期的振動、カオスの振動、乱流など多ほとんど全ての対流現象を再現することが著者らにより示されている [2, 3]。

次に、雲の生成・消滅の動力学に重要な断熱膨張、相転移、引きずり等の効果を考える。まず、温度は断熱膨張によりそこでの鉛直速度 $v_y(x, y)$ に比例して低下すると考え $f_{\text{断熱膨張}} : T^{t+1/3}(x, y) = T^t(x, y) - \beta v_y^t(x, y)$ とした。また、引きずりの効果は水滴が一様な大きさを持ち一定の終端速度 V で落下しているとする、空気との相対速度 $v_y(x, y) - V$ と液滴量 $w_l(x, y)$ の積に比例する。つまり、 $f_{\text{引きずり}} : v_y^{t+1/3}(x, y) = v_y^t(x, y) - \gamma w_l^t(x, y)(v_y^t(x, y) - V)$ である。相転移は平衡点 w^* からのずれに比例するダイナミクスと転移に伴う潜熱放出を表わす以下の方程式

$$\frac{dw_v(x, y)}{dt} = +\alpha(w_v(x, y) - w^*) \tag{2}$$

$$\frac{dw_l(x, y)}{dt} = -\alpha(w_v(x, y) - w^*) \tag{3}$$

$$\frac{dT(x, y)}{dt} = -Q\left(\frac{dw_v(x, y)}{dt} - \frac{dw_l(x, y)}{dt}\right) \tag{4}$$

を差分化したものを用いた。ここで w^* は飽和蒸気圧 $w^* \sim \exp(-q/T)$ に比例した量である。²

さらに、液滴は終端速度 V で落下していると仮定したので鉛直速度成分を $v_y(x, y) - V$ として移流を実行する。以上のプロセスを逐次場の量に作用させ時間発展する以下のモデル

$$\begin{aligned}
 \left\{ \begin{array}{c} \vec{v}^t(x, y) \\ T^t(x, y) \\ w^t(x, y) \end{array} \right\} &\xrightarrow{f_{\text{浮力+引きずり}}} \left\{ \begin{array}{c} \vec{v}^{t+1/3}(x, y) \\ T^t(x, y) \\ w^t(x, y) \end{array} \right\} \xrightarrow{f_{\text{粘性+非圧縮}}} \left\{ \begin{array}{c} \vec{v}^{t+2/3}(x, y) \\ T^t(x, y) \\ w^t(x, y) \end{array} \right\} \xrightarrow{f_{\text{拡散+熱拡散+膨張}}} \\
 &\left\{ \begin{array}{c} \vec{v}^{t+2/3}(x, y) \\ T^{t+1/3}(x, y) \\ w^{t+1/3}(x, y) \end{array} \right\} \xrightarrow{f_{\text{相転移}}} \left\{ \begin{array}{c} \vec{v}^{t+2/3}(x, y) \\ T^{t+2/3}(x, y) \\ w^{t+2/3}(x, y) \end{array} \right\} \xrightarrow{f_{\text{移流+重力}}} \left\{ \begin{array}{c} \vec{v}^{t+1}(x, y) \\ T^{t+1}(x, y) \\ w^{t+1}(x, y) \end{array} \right\}
 \end{aligned} \tag{5}$$

を用いて雲の多様なパターンの生成機構を調べる。

このモデルのパラメータは拡散係数 λ 、粘性係数 η 、非圧縮効果 ν 、断熱膨張 β 、液滴落下速度 V 、引きずり抵抗 γ 、転移速度 α 、潜熱 Q であり、それぞれ $\lambda = 0.4, \eta = \nu = 0.2, \beta = 0.2, V = 0.02, \gamma = 0.1, \alpha = 0.2, Q = 0.2$ とした。ここでは主に底面の温度 T_b と全空間での総水分量 $W = \sum_{x,y} (w_v(x, y) +$

²ここでは気体から液体への相変化のみを考慮しており、簡略化のために液体から固体 (水から氷) への相変化は考えていない。一般の気象ではこの変化が重要であるようだが、赤道付近での雲動力学では氷を伴わない場合もあり、全く非現実的と言うわけではない。

$w_l(x, y)$ が変化した時の雲の形態変化を報告する。また、水平方向は周期的境界条件を課し、速度に関しては上底面 ($y = 0, N_y$) とともに固定条件、温度に関しては底面に固定条件、上面に Neumann 条件 ($dT(x, N_y)/dy = 0$) を課した。

3 シミュレーション

ここではモデルを時間発展させ液滴量 $w_l(x, y)$ の時間空間変化を調べた結果を主に報告する。雲とは微水滴が空中に浮遊している状態であるが、モデルには水滴サイズを記述する変数が含まれていないため³、ここでは雲を単に液滴量 $w_l(x, y)$ がある閾値 w_c よりも大きな値を持つサイトによって作られるクラスターとして定義する。⁴

液滴の成長過程を考慮しなくとも底面温度 T_b と全体の総水分量 W を変化させると定性的に異なった幾つかの雲パターンが現れる。代表的な空間パターンの時間発展を図 1 に示す。パラメータに伴い 4 つの異なった雲形が現れる。

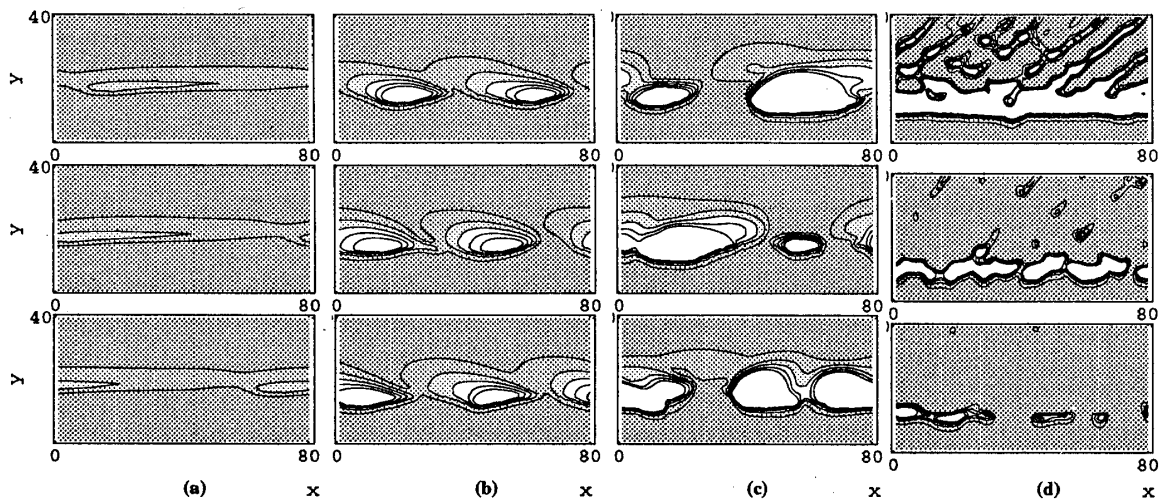


図 1: 雲パターン

液滴量 $w_l(x, y)$ のグレースケール表示 (w_l が大きいほど白い)。初期 5000 ステップの過渡状態後のパターン変化を 200 ステップ毎に示した。各パターンは上から下に時間発展する。(a) 層雲 ($T_0 = 3.0, W = 0.006$), (b) 積雲 ($T_0 = 3.0, W = 0.007$), (c) 乱積雲 ($T_0 = 4.0, W = 0.009$), (d) 層積雲 ($T_0 = 5.0, W = 0.009$)。格子サイズは $(N_x, N_y) = 80 \times 40$ 。

空間パターンがカオティックに運動している場合でも、雲の生成・消滅に周期が存在する。このことは、雲量 $L(t) = \sum_{x,y} w_l^t(x, y)$ を定義してその振る舞いを調べると長時間の周期が存在することから確かめられる (図 2)。さらに、この周期は生成された雲型によって定常的・周期的・カオス的と異なる。

³ もちろん水滴の成長ダイナミクスを考慮したモデルを構築することも可能であるが、ここでは簡略化したモデルでどの程度の現象が再現され、雲のパターンの多様性が生じるかに興味がある。

⁴ 以下に得られた結果は臨界値 w_c が $0.02 < w_c < 0.04$ であれば不変である。

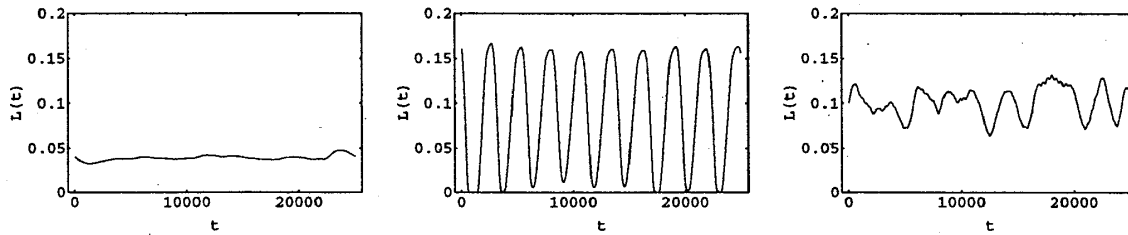


図 2: 雲量の時間変化

雲量 $L(t) = \sum_{x,y} w_l^t(x,y)$ の時間変化。パラメータの変化にともない異なった振動をする。左: 定常 ($T_b = 3.0, W = 0.005$) 中: 周期的 ($T_b = 3.0, W = 0.01$) 右: カオスの ($T_b = 4.0, W = 0.005$)

雲の形態を定量的に分類するために幾つかの統計量を調べる。まず、雲クラスター数 $C(t)$ を不連結な雲の数として定義する。また、全空間における雲サイトの数（雲量）として $S(t) = \sum_{x=1}^{N_x} \sum_{y=1}^{N_y} \Theta(w_l(x,y) - w_c)$ ($\Theta(x)$ は Heaviside 関数) を定義すると平均クラスターサイズ $\langle S \rangle / \langle C \rangle$ は積雲や乱積雲において大きな値を持つ事が分かる。(図 3-(a))。

更に、層雲と積雲の形態の違いを調べる為（層雲は一次元的パターンであるのに対して積雲は二次元的である）、雲の周回長 $L(t) = \sum_{x=1}^{N_x} \sum_{y=1}^{N_y} \sum_{\delta x=\pm 1, \delta y=\pm 1} \Theta(w_l(x,y) - w_c) \Theta(w_c - w_l(x+\delta x, y+\delta y))$ を求め、層雲パラメータ (SOP) なる量 $\langle 1/(S(t)/(L(t)C(t))) \rangle_t$ を定義する事により層雲・積雲を分類する事ができた。これは 1 クラスターあたりの雲の面積と周回長の比率の逆数であり、パターンが一次元的であれば大きな値をとる。パラメータ E_0 と W を変えた時の SOP を図 3(b) に示した。雲が層状の形態をとる時に大きな値をもち形態を分類する事ができた。

飛行機が雲の中に入ると大きく揺れる事から雲の中では乱流状態となっている事が予想される。その空間的な流体速度の乱れを $G = \sqrt{|\nabla v_x|^2 + |\nabla v_y|^2}$ によって調べると、雲の内部で大きな値を持つことがわかる。内部と外部の比を見ると、乱積雲と層積雲で大きな値をとる (図 4(a))。

これらの雲の力学的性質を KS エントロピーによって示したのが図 4(b) である。パターンの時間変動を見ていると予想される事であるが、乱積雲や層積雲で特に大きな値をとり不安定性が強く発達した時空カオス状態である事が分かる。また、地表温度が低い時に大きな値をとるが、これは雲が生成される臨界点での不安定生によるものと考えられる。

このモデルの 3 次元への拡張は容易で空間次元の増加にともなう雲の多様さの増大が期待されるが、ここでは 3 次元モデルによって生成された雲のパターンを示すだけにとどめる。図 5 は液滴量 $w_l(x,y)$ の等高面である。2 次元モデルと同様に生成消滅を繰り返すパラメータ領域や一定の高度に定常的に雲が存在する場合などがある。3 次元モデルにおいてさえもワークステーションを用いて空間パターンの時間変化を追うことが可能なことも我々のアプローチの一つの利点である。

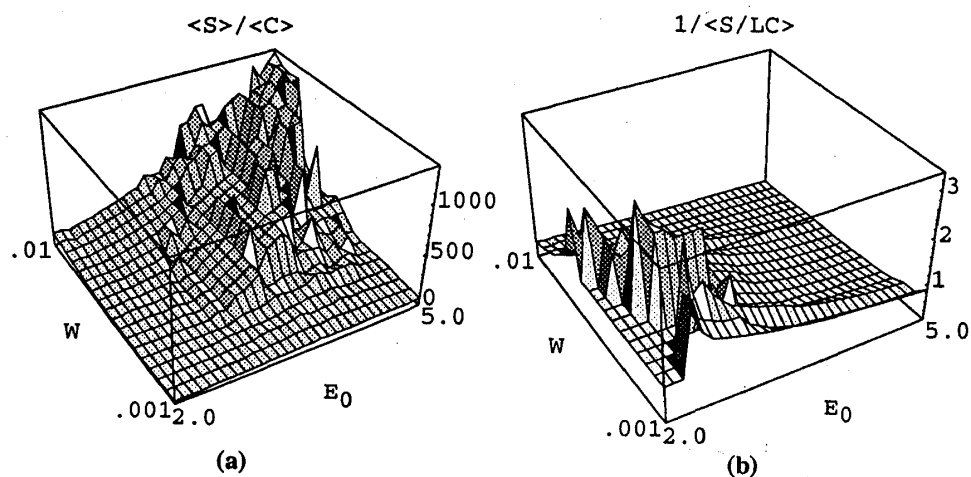


図 3: 雲の形態分類 (相図)

(a) クラスタの平均サイズ $\langle S \rangle / \langle C \rangle$ 。(b) 層雲パラメータ (SOP) $\langle 1 / (S(t) / (L(t)C(t))) \rangle_t$ 。これらの統計量をパラメータ W と E_0 の変化とともに示した。はじめの 10000 ステップの過渡的運動を除いた後、20000 ステップの時間平均を行なった。

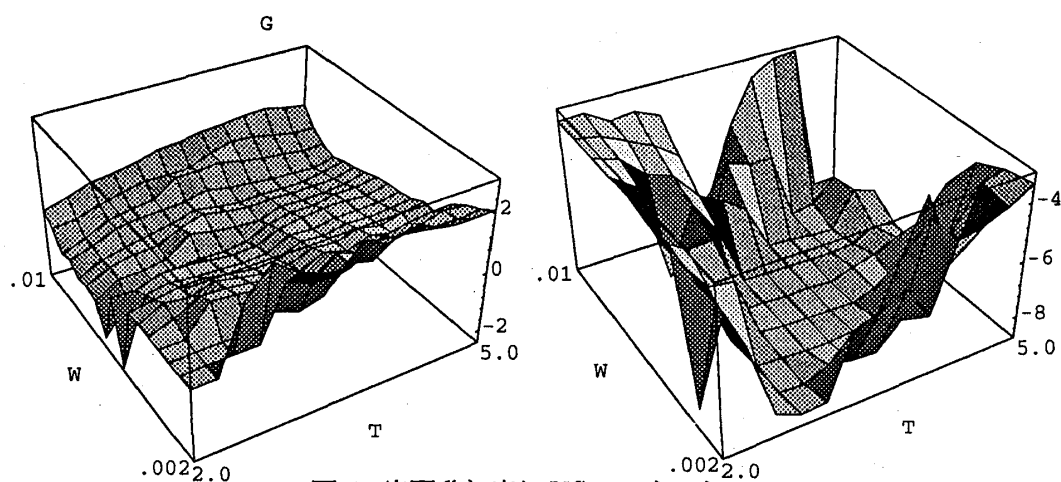


図 4: 空間乱れ度と KS エントロピー

(a) 雲の内部と外部での流速場の空間的乱れ度の比率を示した。雲の内部では流体は乱れている事が分かる。特に、乱積雲と層積雲では強い乱流状態となっている事が分かる。(b) W と T_0 を変化にともなう KS エントロピーを示した。乱積雲と層積雲において KS エントロピーは大きな値をとり、発達した時空カオスであることがわかる。

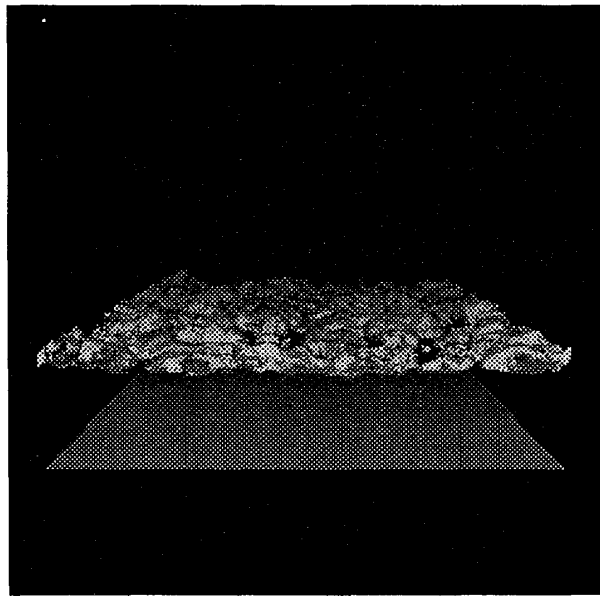


図 5: 三次元モデルの雲型

モデルを三次元に拡張しランダムな初期状態から時間発展させた。 $t = 2000$ での液滴量 $w_l(x, y) = 0.01$ の等高面により雲の形態を示した。パラメータは $T_b = 0.3, W = 0.015, N_x = N_y = 80, N_z = 40$ である。

4 まとめ

雲の形態が地表温度と湿度により変化する事が分かった。このモデルを用いてパラメータ空間を探索した結果、雲の形態は層雲・積雲・乱積雲・層積雲に分類する事ができ、地表温度と湿度の変化に対する相図が得られた。特に、層雲と積雲の違いは層雲パラメータ SOP によって明確に分類可能である事を示した。この相図は複合的基礎方程式を直接シミュレーションすることでは得る事が難しく、構成論的方法による一つの成果である。

参考文献

- [1] R.A.Houze. *Cloud Dynamics*, volume 53 of *Internatinal geophysics series*. Academic Press, 1993.
- [2] T.Yanagita K.Kaneko. Coupled map lattice model for convection. *Phys.Lett.*, 175A:415–420, 1993.
- [3] T.Yanagita K.Kaneko. Rayleigh-Bénard convection, patterns, chaos, spatiotemporal chaos and turbulent. *Physica D*, 82:288–313, 1995.