

マルコフ過程の分解

— 境界近傍の path の行動 と Feller-上野 分解 —

東大 理 岡部靖憲

§ 1 序

本尾氏の論文[6]における未解決問題のひとつを解決する。
 S を第 2 可算公理を満たす局所コンパクト、Hausdorff 空間とし、 D を S の open subset で、 S で稠密、 $\partial D = S - D$ がコンパクトになるものとする。

$M^{\min} = (W, P_x^{\min}; x \in S)$ を次の $(M^{\min}.1) \sim (M^{\min}.3)$ を満たすマルコフ過程とする；

$(M^{\min}.1)$ Hunt process,

$(M^{\min}.2)$ reference measure を持つ,

$(M^{\min}.3)$ $P_x^{\min}(x_t = \xi, \forall t) = 1, \quad \xi \in \partial D.$

このとき、次の $(M.1) \sim (M.3)$ を満たすマルコフ過程 $M = (W, P_x; x \in S)$ がどの位あるかを追求する；

$(M.1)$ Hunt process,

$(M.2)$ reference measure を持つ,

$$(M.3) \quad E_x \left(\int_0^\sigma e^{-\alpha t} f(x_t) dt \right) = E_x^{\min} \left(\int_0^\sigma e^{-\alpha t} f(x_t) dt \right) \equiv G_\alpha^\circ f(x), \\ E_x(e^{-\alpha \sigma} f(x_\sigma)) = E_x^{\min}(e^{-\alpha \sigma} f(x_\sigma)) \equiv H_\alpha f(x),$$

但し、 σ は ∂D への到達時間であり、 $\alpha > 0$, $x \in S$, $f \in B(S)$ である。

正の数 $\gamma > 0$ をひとつ固定する。本論文は [6] において、さらに次の仮定；

$$(M^{min}.4) \quad G_\alpha^\circ(C(S)) \subset C(S), \quad \alpha > 0,$$

$$H_\alpha(C(\partial D)) \subset C(S), \quad \alpha > 0.$$

$$(M^{min}.5) \quad \alpha > 0, f \in C(S) \text{ に対して、} \frac{G_\alpha^\circ f}{G_\alpha^\circ 1} \text{ は } \partial D \text{ まで、} \\ \text{連続に拡張される。拡張した函数を } \hat{H}_\alpha f \text{ とおく。}$$

$$(M^{min}.6) \quad \hat{H}_\alpha(C(S)) \text{ は } C(S) \text{ で稠密である。}$$

の下で、 M はいわゆる "boundary system" $(\tilde{M}, \ell, m, Q)$ によって決定されることを証明した。未解決問題とは、"上の条件、特に $(M^{min}.5); (M^{min}.6)$ 、をより深い確率論でかつ一般的なものでおきかえよ" ということである。

この報告では、まず $(M^{min}.1) \sim (M^{min}.3)$ の下で、次の定理を示す。

定理 (Feller - 上野 分解)

$$G_\alpha f(x) = G_\alpha^\circ f(x) + H_\alpha K^\alpha \{ \ell f + (P + Q) \left(\frac{G_\alpha^\circ f}{G_\alpha^\circ 1} \right) \},$$

$\alpha > 0$, $x \in S$, $f \in B(S)$, ℓ は $B(\partial D)^+$ の元、 P は、 $m \equiv \{ \frac{G_\alpha^\circ f}{G_\alpha^\circ 1} ; \alpha > 0, f \in B(D) \}$ とおくと、 $\overline{m} \subset B(D)$ から $L^0(\partial D, \nu)$ の中への

bounded operator で、positive であり、($\mathcal{L}$ は dt の ∂D への r 次、掃散重の canonical measure である。[3] の p. 146.)、 $\mathcal{Q}$ は $\partial D \times D$ 上の bounded kernel であり、 K^α は ∂D 上の α 次 U-process ([2] の p. 63) の 0 次の resolvent である。

注意 定理の $\mathcal{L}, \mathcal{Q}$ は本尾氏の $\mathcal{L}, \mathcal{Q}$ にあたり、 P_1 が本尾氏の m にあたる。

次に、 P の特徴付けを与える。それには、 $\mathcal{M}_\infty \equiv \left\{ \frac{G_\alpha^\circ f}{G_{r+1}^\circ}; \alpha > 0, f \in C_\infty(D) \right\}$ とおくと、次の仮定が必要となる。

$$(*) \quad C_\infty(D) \subset \overline{\mathcal{M}_\infty} (CB(D))$$

定理 (P の特徴付け)

仮定 (*) の下で、 $P(C_\infty(D)) = \{0\}$ である。

そして、Feller-上野分解の一意性が成り立つ。

注意 entrance boundary を導入せずに、 P の特徴付けを行うには、上の仮定 (*) が必要となる。しかし、entrance boundary を導入することによって、一般な条件 $(*)$ をおきかえることができる。それは、次に述べる定理である。

定理 (P の表現)

D^* を D の $\mathcal{M}_\infty$ -compact 化とする [1]。これは、 $G_\alpha^\circ f$ を G_{r+1}° で優調和変換した resolvent $G_\alpha^\circ f = \frac{G_\alpha^\circ (f G_{r+1}^\circ)}{G_{r+1}^\circ}$ とおくと、 D の $G_\alpha^\circ (CB(D))$ -compact 化と一致する。(次の仮定 I の下で。)

仮定 I $G_\alpha^\circ(C_\infty(D)) \subset C_\infty(D)$, $G_r^\circ 1 \in C_\infty(D)$

(*)2

仮定 II $G_\alpha^* f = G_\alpha' f|_D$ の連続拡張. $f \in C(D^*)$ とおくと

き、 $\{f \in C(D^*); \forall \alpha > 0, \alpha G_\alpha^* f \leq f\}$ が内部の点 ($\in D$) と entrance boundary の点 ($\in D^* - D$) とを分離する。

この仮定の下で、 $\{G_\alpha^*; \alpha > 0\}$ は Ray の仮定 ([9]) をみたすので、その branching point 全体を D_b^* とおくと、次の 2 つが成り立つ。

∂D の各点 ξ に対して、 D^* 上の ^(測度) 測度 $\mu(\xi, d\eta)$ が存在して、次の (1), (2), (3) を満たす;

$$(1) \quad \forall \varphi \in \overline{M}_\infty \quad \nu\text{-a.e. } \xi \quad P\varphi(\xi) = \int_{D^*} \mu(\xi, d\eta) \varphi^*(\eta)$$

但し、 φ^* は D^* 上への φ の連続拡張した函数である。

$$(2) \quad \nu\text{-a.e. } \xi \in \partial D, \quad \mu(\xi, D^*) \leq P1(\xi)$$

$$(3) \quad \forall \xi \in \partial D, \quad \mu(\xi, D_b^*) = 0$$

上の (1), (2), (3) をみたす $\mu(\xi, d\eta)$ は ν -測度 0 の ξ を除いて唯一とつである。

注意 仮定 II は、Ray's hypothesis をみたすために必要になる。

このとき、Ray の結果がうまく使えるのである。

Choquet の結果 ([8] の P.43) を使って証明しようと試みると、 G_α^* の range $\mathcal{R}(G_\alpha^*)$ が内部の点 ($\in D$) と entrance boundary の点 ($\in D^* - D$) とを分離する ということが必要になる。

このときは、もちろん仮定 II をみたすわけであるが、 D_b^* の補集合 $D^* - D_b^*$ は $R(G^*)$ に対する D^* の Choquet boundary と一致することが示せる。([8] p.45)。いづれの場合も、この段階では、 $\mu(\xi, d\eta)$ の support が $D^* - D$ にあることは主張していいが、このことをもっと精確に述べるのが次の定理である。

定理 ($\mu(\xi, d\eta)$ の support)

$$\partial D \text{ の各点 } \xi \text{ に対して、 } \hat{S}_\xi \equiv \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{\{x \in D; \text{dist}(x, \xi) < \varepsilon\}}$$

(closure は D^* において) とおくとき、

$$(1) \quad \hat{S}_\xi \subset D^* - D$$

$$(2) \quad \mu(\xi, D^* - \hat{S}_\xi) = 0$$

注意 本尾氏の仮定 $(M.^{mii} 5)$, $(M.^{mii} 6)$ の下では、 $D^* = \hat{S}$ となり、 $\hat{S}_\xi = \{\xi\}$ である。それ故、 $\mu(\xi, d\eta)$ の support を $\hat{S}_\xi$ の proper subset にあとすることは不可能である。

上の 2 つの定理において、 D の M_∞ -compact 化を行なった場合には、仮定 II が必要になったが、 D の M_∞ -completion を行うときは、仮定 II は不必要となり、上の 2 の定理の内、最後の定理の (1) を除いて (これは、 M_∞ -completion をとったときは、 D が $homo$ に入るないことによる (一般には))、すべて成り立つ。一般的に、 Q -compact 化と Q -completion との関係が分ったのだが、この

2 と に関し て は、 別 の 機 会 に す る。

§2 $\mathcal{E}_{\alpha, \beta}^c$ と $\mathcal{E}_{\alpha, \beta}^d$

正の数 $r > 0$ を固定する。time additive functional $t \wedge \zeta(w)$ の ∂D への 1 次掃散を π とし、その右逆函数を τ とする。 ν を π の canonical measure ([3] の p. 146)、 (P, L) を M の Levy system ([4], [11]) とし、 $P_D f(x) = \int_D P(x, dy) f(y)$ と定義すると、
[6] において、我々の仮定の下で、次の事実が示される。

補題 2.1 ([6] の p. 88 の (31))

- $\exists \ell, m, n \in B^+(\partial D)$, $\exists Q: \partial D \times D$ 上の bounded kernel such that
- (1) $\ell \cdot \pi \approx \chi_{\partial D} \cdot dt$
 - (2) $E_x \left(\int_0^\infty e^{-rt} m d\pi \right) = E_x \left(\sum_{\lambda \in T_c} \int_{\tau(\lambda)}^{\tau(\lambda+)} e^{-rt} dt \right), \quad \forall x \in S$
 - (3) $Q\ell \cdot \pi \approx \chi_{\partial D} P_D(\ell \circ I) \cdot L, \quad \ell \in B(D)$
 - (4) $\pi(\bar{z}) = Q(\bar{z}, D)$
 - (5) $\ell(\bar{z}) + m(\bar{z}) + \pi(\bar{z}) = 1 \quad \nu\text{-a.e. } \bar{z} \in \partial D.$

$$z \in \mathbb{R}^d, \quad T(w) \equiv \{s; 0 < s, \tau(s-) < \tau(s) \wedge \zeta(w)\}$$

$$T_c(w) = \{s \in T(w); \chi_{\tau(s-)-}(w) = \chi_{\tau(s)-}(w)\}$$

$$T_d(w) = \{s \in T(w); \chi_{\tau(s-)-}(w) \neq \chi_{\tau(s)-}(w)\}$$

定義 2.1 $f, g, \ell \in B(S)$, $\alpha > 0, \beta > 0, x \in S$ に対し

$$\mathcal{E}_{\alpha, \beta}^c(f, g, \ell)(x) \equiv E_x \left(\sum_{\lambda \in T_c} e^{-\alpha \tau(\lambda-)} f(\chi_{\tau(\lambda-)-}) g(\chi_{\tau(\lambda-)-}) \int_{\tau(\lambda-)}^{\tau(\lambda)} e^{-\beta(t-\tau(\lambda-))} \ell(\chi_t) dt \right)$$

$$E_{\lambda, \rho}^d(t, g, L)(x) = E_x \left(\sum_{\Delta \in T_\Delta} e^{-\lambda Z(\Delta)} f(X_{Z(\Delta)-}) g(X_{Z(\Delta)}) \int_{Z(\Delta)}^{Z(\Delta)} e^{-\rho(t-Z(\Delta))} L(x_t) dt \right)$$

$$E_{\lambda, \rho}(t, g, L)(x) = E_x \left(\sum_{\Delta \in T} e^{-\lambda Z(\Delta)} f(X_{Z(\Delta)-}) g(X_{Z(\Delta)}) \int_{Z(\Delta)}^{Z(\Delta)} e^{-\rho(t-Z(\Delta))} L(x_t) dt \right)$$

$$E_{\lambda, \rho}^c(t, g)(x) = E_{\lambda, \rho}^c(t, 1_f, g)(x)$$

$$E_{\lambda, \rho}^d(t, g)(x) = E_{\lambda, \rho}^d(t, 1_f, g)(x)$$

$$E_{\lambda, \rho}(t, g)(x) = E_{\lambda, \rho}(t, 1_f, g)(x)$$

と定義する。

補題 2.2

$$(1) |E_{\lambda, \rho}^c(t, g, L)(x)|, |E_{\lambda, \rho}^d(t, g, L)(x)|, |E_{\lambda, \rho}(t, g, L)(x)| \leq \frac{\|f\| \cdot \|g\| \cdot \|L\|}{\lambda \wedge \rho}$$

$$(2) E_{\lambda, \rho}(t, g, L)(x) = E_{\lambda, \rho}^c(t, g, L)(x) + E_{\lambda, \rho}^d(t, g, L)(x)$$

$$(3) E_{\lambda, \rho}^c(t, g, L)(x) = E_{\lambda, \rho}^c(t, g, L)(x)$$

$$E_{\lambda, \rho}^c(X_{0 \vee \partial}, g)(x) = 0, \quad E_{\lambda, \rho}^c(t, X_{\partial \partial})(x) = 0.$$

$$E_{\lambda, \rho}^c(t, g)(x) = E_{\lambda, \rho}^c(t, 1_{\partial \partial}, g)(x)$$

$$(4) E_{\lambda, \rho}^d(X_{0 \vee \partial}, g)(x) = 0, \quad E_{\lambda, \rho}^d(t, g, X_{\partial \partial})(x) = 0.$$

$$E_{\lambda, \rho}^d(t, g)(x) = E_{\lambda, \rho}^d(t, 1_{\partial}, g)(x) \quad \forall x \in \mathcal{S}.$$

補題 2.3 ([6] の p. 86 の [5.4])

$$f, g \in B^+(\mathcal{S}), \quad \alpha > 0$$

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} E_x \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha R(n)} \chi_{\partial \partial} f(X_{R(n)-}) \chi_{\partial} g(X_{R(n)}) \right) \\ &= E_x \left(\int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \chi_{\partial \partial} f(x_t) P_0 g(x_t) dL(t) \right) \quad \forall x \in \mathcal{S}. \end{aligned}$$

$\{R(k)\}$ は [6] の p. 82 の (2) で定義されたマルコフ time の列

である。

補題 2.4 $f, g \in C(\mathbb{S}), h \in B(\mathbb{S}), \alpha > 0, \beta > 0, x \in \mathbb{S}$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E_x \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha R_n(k)} \chi_0 f(X_{R_n(k)-}) g(X_{R_n(k)}) G_\beta^0 h(X_{R_n(k)}) \right) \\ = E_{\alpha, \beta}^{\circ}(f, g, h)(x).$$

補題 2.5 $f \in C(\mathbb{S}), g \in B^+(\mathbb{S}), \alpha > 0, \beta > 0, x \in \mathbb{S}$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E_x \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha \bar{R}_n(k)} f(X_{\bar{R}_n(k)-}) G_\beta^0 g(X_{\bar{R}_n(k)}) \right) \\ = E_x \left(\int_0^{\infty} e^{-\alpha t} f(x_t) d(\chi_0 g \cdot dt)_\beta \right)$$

$\{\bar{R}_n(k)\}$ は [6] の p. 87 の (21) で定義したマルコフ時間

列である。

補題 2.6 $f \in B(\mathbb{S}), g \in B^+(\mathbb{S}), \alpha > 0, \beta > 0, x \in \mathbb{S}$

$$E_x \left(\int_0^{\infty} e^{-\alpha t} f(x_t) d(\chi_0 g \cdot dt)_\beta \right) \\ = E_{\alpha, \beta}^{\circ}(f, g)(x) + E_x \left(\int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \chi_{00} f P_0(G_\beta^0 g)(x_t) dL(t) \right)$$

補題 2.7 $f, g, h \in B(\mathbb{S}), \alpha > 0, \beta > 0, x \in \mathbb{S}$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E_x \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha R_n(k)} \chi_{00} f(X_{R_n(k)-}) \chi_0 g(X_{R_n(k)}) G_\beta^0 h(X_{R_n(k)}) \right) \\ = E_{\alpha, \beta}^{\alpha}(f, g, h)(x)$$

補題 2.8 $f, g, h \in B(\mathbb{S}), \alpha > 0, \beta > 0, x \in \mathbb{S}$

$$(1) \quad E_{\alpha, \beta}^{\alpha}(f, g, h)(x) \\ = E_x \left(\int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \chi_{00} f P_0(g G_\beta^0 h)(x_t) dL(t) \right) \\ = H_\alpha K^\alpha \left\{ f \otimes \left(g \cdot \frac{G_\beta^0 h}{G_\beta^0 1} \right) \right\}(x)$$

$$(2) \quad E_{\alpha, \beta}^{\alpha}(f, g)(x) = H_\alpha K^\alpha \left\{ f \otimes \left(\frac{G_\beta^0 g}{G_\beta^0 1} \right) \right\}(x).$$

$$\text{但し, } K^\alpha \text{ は, } K^\alpha g \left(\frac{x}{\beta} \right) = E_x \left(\int_0^{\infty} e^{-\alpha t} g(x_t) d\bar{L}(t) \right)$$

である。

補題 2.9

$$f \in B(\mathbb{R}^d), \quad \alpha > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d$$

$$G_\alpha (f \chi_{\partial D})(x) = H_\alpha K^\alpha (\mathcal{L}[f]_{\partial D})(x)$$

補題 2.10

$$f \in B(\mathbb{R}^d), \quad g \in B^+(\mathbb{R}^d), \quad \alpha > 0, \beta > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d$$

$$E_x \left(\int_0^\infty e^{-\beta t} f(x_t) d(\widetilde{\chi_0 g \cdot dt})_\beta \right)$$

$$= E_{\alpha, \beta}(f, g)(x)$$

補題 2.11

$$f, g \in C(\mathbb{R}^d), \quad h \in B(\mathbb{R}^d), \quad \alpha > 0, \beta > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E_x \left(\sum_{n=1}^k e^{-\alpha R_n(N)} f(x_{R_n(N)}) g(x_{R_n(N)}) G_\beta^0 h(x_{R_n(N)}) \right)$$

$$= E_{\alpha, \beta}(f, g, h)(x)$$

補題 2.12

$$f, g, h \in B(\mathbb{R}^d), \quad \alpha > 0, \beta > 0, \quad \delta > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d$$

$$(1) \quad E_{\alpha, \beta}^c(f, g, h)(x) - E_{\alpha, \delta}^c(f, g, h)(x) + (\beta - \delta) E_{\alpha, \beta}^c(f, g, G_\delta^0 h)(x) = 0$$

$$(2) \quad \text{特に } f \geq 0, g \geq 0, h \geq 0 \text{ のとき}$$

$$e^{-\beta t} E_{\alpha, \beta}^c(f, g, T_t^{\min} h)(x) \leq E_{\alpha, \beta}^c(f, g, h)(x) \quad \forall t > 0$$

同じ事実が $E_{\alpha, \beta}^\alpha, E_{\alpha, \beta}^{\alpha+\beta}$ に対しても成立する。

補題 2.13

$$f \in B(\mathbb{R}^d), \quad \alpha > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad \xi \in \partial D$$

$$(1) \quad E_{\alpha, r}^c(f, 1)(x) = H_\alpha K^\alpha(mf)(x)$$

$$(2) \quad E_{\alpha, r}(f, 1)(x) = H_\alpha K^\alpha((m+r)f)(x)$$

$$(3) \quad K^\alpha f(\xi) = E_{\alpha, r}(f, 1)(\xi) + G_\alpha(f \chi_{\partial D})(\xi)$$

以上の補題 2.2 ~ 2.13 は [6] の §4 の結果を用い、§5 と同じ考えのもとに示すことができた。詳しいことは省くことにする。

§ 3

P

補題 3.1 各 $\beta > 0$ に対して、

$$\exists \hat{H}_\beta : B(\mathcal{S}) \longrightarrow L^\infty(\partial D, \nu) \text{ such that}$$

(1) bounded linear (2) positive

$$(3) \mathcal{E}_{\alpha, \beta}^c(t, g)(x) = H_\alpha K^\alpha(\cdot \hat{H}_\beta g)(x), \forall \alpha > 0, \beta > 0, x \in \mathcal{S}.$$

証明 $g \in B^+(\mathcal{S})$, $\alpha > 0, \beta > 0$ を固定する。[5] の p322 の proposition 3.4 より $\gamma \leq \beta$ のとき $\widehat{(X_0 g \cdot dt)}_\beta \ll \widehat{(X_0 g \cdot dt)}_\gamma$, $0 < \beta < \gamma$ のとき、 $\widehat{(X_0 g \cdot dt)}_\beta \approx \widehat{(X_0 g \cdot dt)}_\gamma + (\gamma - \beta) \widehat{(U_\beta^0 \cdot dt)}_\gamma$, $z = z^*$.

$$U_\beta^0(z) = E_x \left(\int_0^\infty e^{-\beta t} d(X_0 g \cdot dt) \right) \leq \frac{\|g\|}{\beta} \quad \text{従って、この場合}$$

$$\text{も、} \widehat{(X_0 g \cdot dt)}_\beta \ll \widehat{(X_0 g \cdot dt)}_\gamma + \frac{|\gamma - \beta| \|g\|}{\beta} \widehat{(dt)}_\gamma \ll \frac{\beta + |\gamma - \beta| \|g\|}{\beta} \widehat{(dt)}_\gamma$$

$$\text{従って、[2] の p13 の定理 1.7 より } 0 \leq \exists \tilde{H}_\beta g \leq \frac{\beta + |\gamma - \beta| \|g\|}{\beta} \widehat{(dt)}_\gamma$$

$$\widehat{(X_0 g \cdot dt)}_\beta \approx \tilde{H}_\beta g \cdot \widehat{(dt)}_\gamma$$

$$z = z^*, \hat{H}_\beta g = \tilde{H}_\beta g - \mathbb{Q} \left(\frac{G_\beta^0 g}{G_\beta^0 + 1} \right) \quad \text{と} \quad \text{おくと、補題 2.8,}$$

$$2.10 \text{ より } \mathcal{E}_{\alpha, \beta}^c(t, g)(x) = \mathcal{E}_{\alpha, \beta}(t, g) - \mathcal{E}_{\alpha, \beta}^d(t, g)(x)$$

$$= E_x \left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(x_t) \tilde{H}_\beta g(x_t) d\tilde{\pi} \right) - E_x \left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(x_t) \mathbb{Q} \left(\frac{G_\beta^0 g}{G_\beta^0 + 1} \right)(x_t) d\tilde{\pi} \right)$$

$$= H_\alpha K^\alpha(\cdot \hat{H}_\beta g)(x).$$

$g \in B^+(\mathcal{S})$ に対して定義した $\hat{H}_\beta$ を $B(\mathcal{S})$ にまで拡張する

ことはわけがなく、 $|\mathbb{Q}| \leq 1$ (補題 2.1) と $\tilde{H}_\beta g$ の評価式より、

$\hat{H}_\beta$ は $B(\mathcal{S})$ から $L^\infty(\partial D, \nu)$ の中への bounded linear operator

となり、結論の (1), (3) はみたされた、(2) は (3) と $\mathcal{E}_{\alpha, \beta}^c$ の定義式

より分る。

補題 3.2

$f, g \in B(\mathcal{D})$, $\alpha > 0, \beta > 0$ に対して,

$$\frac{G_\alpha^\beta f}{G_\beta^\alpha 1}(x) = \frac{G_\beta^\alpha g}{G_\alpha^\beta 1}(x) \quad \forall x \in D \implies \widehat{H}_\alpha f = \widehat{H}_\beta g$$

証明 $\forall h \in C(\mathcal{D})$ fix. 補題 2.4 より、仮定の下で、

$$E_{h,\alpha}^\beta(L, f)(x) = E_{h,\beta}^\alpha(L, g)(x) \quad \forall x \in \mathcal{D}. \text{ 従って、補題 3.1 より}$$

$$H_\alpha K^\beta(L, \widehat{H}_\alpha f)(x) = H_\beta K^\alpha(L, \widehat{H}_\beta g)(x) \quad \forall x \in \mathcal{D}. \text{ 2.4 より、}$$

$$\widehat{H}_\alpha f = \widehat{H}_\beta g \text{ が従う。}$$

定理 3.1

(P)

$$\mathcal{M} = \{ \varphi \in B(D); \exists \alpha > 0, \exists f \in B(\mathcal{D}) \text{ s.t. } \varphi = \frac{G_\alpha^\beta f}{G_\beta^\alpha 1} \}$$

とおくとき、

(1) $\mathcal{M}$ は $B(D)$ の linear subspace であり、 I_D を含む。

(2) $\exists P: \overline{\mathcal{M}} \longrightarrow L^\infty(\partial D, \nu)$ s.t.

(i) bounded linear (ii) positive

(iii) $\mathcal{M} \ni \varphi = \frac{G_\alpha^\beta f}{G_\beta^\alpha 1}$ に対しては、 $P\varphi = \widehat{H}_\alpha f$

(iv) $P1 = m$

証明 (1) は $\{G_\alpha^\beta; \alpha > 0\}$ が resolvent equation をみたすことより。

(2) は、補題 3.2 より、 $P(\frac{G_\alpha^\beta f}{G_\beta^\alpha 1}) = \widehat{H}_\alpha f$ が well-defined

となり、 $\widehat{H}_\alpha$ の linearity より P が $\mathcal{M}$ において linear となる。

P の $\mathcal{M}$ における positivity は、 $\forall h \in C^+(\mathcal{D})$ に対して、補題 2.4

より、 $G_\beta^\alpha f \geq 0$ のとき、 $E_{h,\beta}^\alpha(L, f)(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}$. 従って、

補題 3.1 と P の定義より $H_\alpha K^\beta \{L, P(\frac{G_\beta^\alpha f}{G_\alpha^\beta 1})\}(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}$.

2 の関係は $f \in B^+(\mathcal{S})$ に対して成り立つ $\alpha \geq 0$, $P(\frac{G_\alpha^0 f}{G_\alpha^0 1}) \geq 0$ とする。 P の ^(m=0+3) boundedness は P の linearity と positivity からあるから、 $P1 = m$ を示せばよいから、 $P1 = m$ は 補題 2.13 より分る。従って、 α とは $\mathcal{Q}(P)$ を $\overline{m}$ にまで拡張すればよい。

系 3.1 $f, g, h \in B(\mathcal{S})$, $\alpha > 0, \beta > 0$, $x \in \mathcal{S}$

$$E_{\alpha, \beta}(f, g, h)(x) = H_\alpha K^\alpha \{fg P(\frac{G_\alpha^0 h}{G_\alpha^0 1})\}(x)$$

補題 3.3 $f \in B^+(\mathcal{S})$, $\alpha > 0$

$$\widetilde{(\chi_0 f \cdot dt)}_\alpha \approx (P + Q)(\frac{G_\alpha^0 f}{G_\alpha^0 1}) \cdot \overline{\Phi}$$

証明 補題 2.8, 2.10, 系 3.1 より。

定理 3.2 (Feller - 上野 分解)

$f \in B(\mathcal{S})$, $\alpha > 0$, $x \in \mathcal{S}$.

$$G_\alpha f(x) = G_\alpha^0 f(x) + H_\alpha K^\alpha \{lf + (P + Q)(\frac{G_\alpha^0 f}{G_\alpha^0 1})\}(x)$$

証明 $f \in B^+(\mathcal{S})$ とする。

$$\begin{aligned} G_\alpha f(x) - G_\alpha^0 f(x) &= E_x \left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(x_t) dt \right) \quad ((M.3)) \\ &= E_x \left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} \chi_{\partial \mathcal{D}} f(x_t) dt \right) + E_x \left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} \chi_{\mathcal{D}} f(x_t) dt \right) \\ &= E_x \left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} \chi_{\partial \mathcal{D}} f(x_t) dt \right) + E_x \left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} d \widetilde{(\chi_0 f \cdot dt)}_\alpha \right) \end{aligned}$$

従って、補題 2.9, 3.3 より定理 3.2 を得る。

補題 3.4 $f \in C(S)$, $g \in B(S)$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\varepsilon > 0$ fix.

$\{\zeta \in D; f(\zeta) \neq 0\} \ni \forall \zeta \quad \zeta \in \exists \cup$ open subset of S s.t.

$$U \cap D \ni \forall x \quad \left| \frac{G_{\beta}^{\alpha} f}{G_{\beta}^{\alpha} 1}(x) \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left| H_{\alpha} K^{\alpha}(f \otimes P(\frac{G_{\beta}^{\alpha} f}{G_{\beta}^{\alpha} 1}))(x) \right|$$

$$\leq \varepsilon H_{\alpha} K^{\alpha}(|f| \otimes P1)(x), \quad \forall x \in S, \quad \forall g \in C(S).$$

証明 補題 2.4, 系 3.1 より.

$$H_{\alpha} K^{\alpha}(f \otimes P(\frac{G_{\beta}^{\alpha} f}{G_{\beta}^{\alpha} 1}))(x)$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} E_x \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha R_n(k)} \chi_0 f(x_{R_n(k)}) g(x_{R_n(k)}) G_{\beta}^{\alpha} f(x_{R_n(k)}) \right) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} &= E_x \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha R_n(k)} \chi_0 f(x_{R_n(k)}) g(x_{R_n(k)}) G_{\beta}^{\alpha} f(x_{R_n(k)}) \right) \\ &= E_x \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha R_n(k)} \chi_0 f(x_{R_n(k)}) \chi_0 g \frac{G_{\beta}^{\alpha} f}{G_{\beta}^{\alpha} 1}(x_{R_n(k)}) \right) \\ &= E_x \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha R_n(k)} \chi_0 f(x_{R_n(k)}) \chi_0 g \frac{G_{\beta}^{\alpha} f}{G_{\beta}^{\alpha} 1}(x_{R_n(k)}) E_{x_{R_n(k)}} \left(\int_0^{\infty} e^{-\beta t} 1(x_t) dt \right) \right) \quad (M.3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= E_x \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha R_n(k)} \chi_0 f(x_{R_n(k)}) \chi_0 g \frac{G_{\beta}^{\alpha} f}{G_{\beta}^{\alpha} 1}(x_{R_n(k)}) \int_{R_n(k)}^{\infty} e^{-\beta(t-R_n(k))} 1(x_t) dt \right) \\ &= E_x \left(\sum_{\Delta \in T_k} e^{-\alpha P(k, \Delta)} \chi_0 f(x_{P(k, \Delta)}) \chi_0 g \frac{G_{\beta}^{\alpha} f}{G_{\beta}^{\alpha} 1}(x_{P(k, \Delta)}) \int_{P(k, \Delta)}^{\infty} e^{-\beta(t-P(k, \Delta))} 1(x_t) dt \right) \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{\Delta \in T_k} e^{-\alpha P(k, \Delta)} \chi_0 f(x_{P(k, \Delta)}) \chi_0 g \frac{G_{\beta}^{\alpha} f}{G_{\beta}^{\alpha} 1}(x_{P(k, \Delta)}) \int_{P(k, \Delta)}^{\infty} e^{-\beta(t-P(k, \Delta))} 1(x_t) dt \\ &= \sum_{\Delta \in T_k} \chi(\Delta \in T_k) e^{-\alpha P(k, \Delta)} \chi_0 f(x_{P(k, \Delta)}) \chi_0 g \frac{G_{\beta}^{\alpha} f}{G_{\beta}^{\alpha} 1}(x_{P(k, \Delta)}) \int_{P(k, \Delta)}^{\infty} e^{-\beta(t-P(k, \Delta))} 1(x_t) dt \\ &\quad + \sum_{\Delta \in T_k} \chi(\Delta \in T_k) e^{-\alpha P(k, \Delta)} \chi_0 f(x_{P(k, \Delta)}) \chi_0 g \frac{G_{\beta}^{\alpha} f}{G_{\beta}^{\alpha} 1}(x_{P(k, \Delta)}) \int_{P(k, \Delta)}^{\infty} e^{-\beta(t-P(k, \Delta))} 1(x_t) dt \\ &= I_k + II_k \quad (3) \end{aligned}$$

$\varepsilon < \delta < \varepsilon$.

$$|I_k|, |II_k| \leq \frac{\|f\| \|g\| \| \frac{G_{\beta}^{\alpha} f}{G_{\beta}^{\alpha} 1} \|}{\alpha \wedge \beta} \quad (4)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |I_k| \leq \sum_{\Delta \in T_k} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \chi(\Delta \in T_k) e^{-\alpha P(k, \Delta)} \chi_0 f(x_{P(k, \Delta)}) \chi_0 g \frac{G_{\beta}^{\alpha} f}{G_{\beta}^{\alpha} 1}(x_{P(k, \Delta)}) \int_{P(k, \Delta)}^{\infty} e^{-\beta(t-P(k, \Delta))} 1(x_t) dt \right) \quad (5)$$

[6] の p83 の [4.8], [4.9] より, $\lambda \in T_c$ に対し,

$$p(k, \lambda) \longrightarrow z(\lambda-) \quad (6)$$

$$x_{p(k, \lambda)-} \longrightarrow x_{z(\lambda)-} \in \partial D \quad (7)$$

$$x_{p(k, \lambda)} \longrightarrow x_{z(\lambda)-} = x_{z(\lambda)-} \quad (8)$$

$$\text{④ [6] の p83 の [4.7] より } T_k \longrightarrow T \quad (9)$$

$f(x_{z(\lambda)-}) \neq 0$ あり, $\xi = x_{z(\lambda)-} \in \partial D$ に対して, 仮定を用い

て, $\exists U \ni \xi, D \cap U \ni y \quad | \frac{g \circ R}{g \circ I}(y) | < \varepsilon$

⑥ より k を十分大きくとると, $x_{p(k, \lambda)} \in D \cap U$ ($k \in T_k$)

従って, k を十分大きくとると, $| \frac{g \circ R}{g \circ I}(x_{p(k, \lambda)}) | < \varepsilon$

④より, ②の②と⑥, ⑦, ⑧と⑨と⑩より, ⑩より,

$$\begin{aligned} & \sum_{\lambda \in T_c} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \chi(\lambda \in T_k) e^{-d p(k, \lambda)} |\chi_0 f(x_{p(k, \lambda)-})| |\chi_0 g \frac{g \circ R}{g \circ I}(x_{p(k, \lambda)})| \int_{p(k, \lambda)}^{z(\lambda)} e^{-r(t-p(k, \lambda))} 1(x_4) dt \right) \\ & \leq \varepsilon \sum_{\lambda \in T_c} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \chi(\lambda \in T_k) e^{-d p(k, \lambda)} |\chi_0 f(x_{p(k, \lambda)-})| |\chi_0 g \frac{g \circ R}{g \circ I}(x_{p(k, \lambda)})| \int_{p(k, \lambda)}^{z(\lambda)} e^{-r(t-p(k, \lambda))} 1(x_4) dt \right) \\ & = \varepsilon \sum_{\lambda \in T_c} e^{-d z(\lambda)} |f(x_{z(\lambda)-})| |g(x_{z(\lambda)-})| \int_{z(\lambda)-}^{z(\lambda)} e^{-r(t-z(\lambda)-)} 1(x_4) dt \quad (10) \end{aligned}$$

⑩の⑩二項 I_k について, [6] の p84 の [4.15] より,

$$I_k \text{ と同じ考えにより, } \lim_{k \rightarrow \infty} |I_k| = 0 \quad (11)$$

従って, ①, ②, ③, ④, ⑩, ⑪より,

$$\begin{aligned} & |H_K^2(f \circ g \circ P(\frac{g \circ R}{g \circ I}))(x)| \\ & \leq \varepsilon E_x \left(\sum_{\lambda \in T_c} e^{-d z(\lambda)} |f(x_{z(\lambda)-})| |g(x_{z(\lambda)-})| \int_{z(\lambda)-}^{z(\lambda)} e^{-r(t-z(\lambda)-)} 1(x_4) dt \right) \\ & = \varepsilon E_x^c(|f|, |g|, 1)(x) \\ & = \varepsilon H_K^2(|f|, |g|, P1_D)(x) \quad (\text{系 3.1}) \quad \forall x \in J. \end{aligned}$$

定理 3.3 (quasi-local character of P)

$$\overline{m} \triangleright \varphi, \quad \varepsilon > 0 \quad \text{fix.}$$

$$\partial D \subset \exists U \text{ open subset } C \mathcal{S} \text{ s.t. } U \cap D \ni \forall x \quad |\varphi(x)| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad |P\varphi(z)| \leq \varepsilon \quad \nu\text{-a.e. } z \in \partial D.$$

証明 $m \triangleright \varphi$ に注意して示せば十分である。 $0 \leq \exists f_0 \leq 1, f_0 \in C(\mathcal{S}),$
 $f_0(z) = 1, z \in \partial D.$ なる $z, \{z \in \partial D; f_0(z) \neq 0\} = \partial D.$ 従って、補題
 3.4 より、 $\forall g \in C(\mathcal{S}), \forall x \in \mathcal{S}$

$$|H_{\alpha} K^{\alpha}(f_0 \circ P\varphi)(x)| \leq \varepsilon H_{\alpha} K^{\alpha}(|f_0| |g| P1)(x)$$

$$f_0|_{\partial D} = 1 \text{ より、 } |H_{\alpha} K^{\alpha}(g \circ P\varphi)(x)| \leq \varepsilon H_{\alpha} K^{\alpha}(|g| P1)(x)$$

2 の不等式は $\forall g \in B^+(\mathcal{S})$ に注意して成り立つ。

$$|P\varphi(z)| \leq \varepsilon P1(z) \leq \varepsilon \quad \nu\text{-a.e. } z.$$

(補題 2.1, 定理 3.1 の (2) の (⇒))

系 3.2 $\overline{m} \triangleright \varphi$;

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \partial D \subset \exists U \text{ open subset } C \mathcal{S} \text{ s.t.}$$

$$U \cap D \ni \forall x \quad |\varphi(x)| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad P\varphi = 0$$

系 3.3 $\overline{m} \triangleright \varphi$; $\partial D \subset \exists U \text{ open subset } C \mathcal{S} \text{ s.t.}$

$$U \cap D \ni \forall x \quad \varphi(x) = 0$$

$$\Rightarrow \quad P\varphi = 0$$

補題 3.5 $\alpha > 0$ fix. $f_m \in B(\mathcal{F})^+$, $G_\alpha^\circ f_m \uparrow_{(m)}$

2 のとき, $\forall f \in C^+(\mathcal{F})$, $\forall x \in \mathcal{F}$.

$$\begin{aligned} & H_\alpha K^\alpha(f \lim_{n \rightarrow \infty} P(\frac{G_\alpha^\circ f_m}{G_\alpha^\circ 1}))(x) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} E_x(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha R(n)} \chi_D f(x_{R(n)}) \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{G_\alpha^\circ f_m}{G_\alpha^\circ 1}(x_{R(n)} G_\alpha^\circ 1(x_{R(n)})) (\leq +\infty) \end{aligned}$$

証明 [6] の p82 の (2) の $P(k)$ とし, $P(k) = \frac{1}{k} \wedge \sigma_{D^c} \wedge \inf\{t; \text{dist}(x_t, x_0) \geq \frac{1}{k}\}$ ($k=1, 2, \dots$) とし, $P(k) \geq P(k+1)$ ①

をたす。 $\forall f \in C^+(\mathcal{F})$ fix. 補題 2.4, 系 3.1 より,

$$H_\alpha K^\alpha(f P(\frac{G_\alpha^\circ f_m}{G_\alpha^\circ 1}))(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} E_x(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha R(n)} \chi_D f(x_{R(n)}) G_\alpha^\circ f_m(x_{R(n)})) \quad ②$$

があるから, 仮定より, 各 k をとめるとき,

$$E_x(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha R(n)} \chi_D f(x_{R(n)}) G_\alpha^\circ f_m(x_{R(n)})) \uparrow_{(m)} \quad ③$$

$$\begin{aligned} & \text{よって } E_x(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha R(n)} \chi_D f(x_{R(n)}) G_\alpha^\circ f_m(x_{R(n)})) \\ &= E_x(\sum_{n=1}^{\infty} \chi_D f(x_{R(n)}) \int_{P(n)}^{\sigma_{D^c}(n)} e^{-\alpha t} f_m(x_t) dt) \end{aligned}$$

があるから, ① と $\{R(n)\}$, $\{\sigma_{D^c}(n)\}$ の定義と $f \geq 0$, $f_m \geq 0$ より,

$$\text{各 } m \text{ をとめるとき, } E_x(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha R(n)} \chi_D f(x_{R(n)}) G_\alpha^\circ f_m(x_{R(n)})) \uparrow_{(k)} \quad ④$$

従って, ②, ③, ④ より, P の positivity を使って,

$$\begin{aligned} & H_\alpha K^\alpha(f \lim_{n \rightarrow \infty} P(\frac{G_\alpha^\circ f_m}{G_\alpha^\circ 1}))(x) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} H_\alpha K^\alpha(f P(\frac{G_\alpha^\circ f_m}{G_\alpha^\circ 1}))(x) \quad (\text{monotone convergence}) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} E_x(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha R(n)} \chi_D f(x_{R(n)}) \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{G_\alpha^\circ f_m}{G_\alpha^\circ 1}(x_{R(n)} G_\alpha^\circ 1(x_{R(n)})) \end{aligned}$$

があり立つ。

§4 $\mathcal{Q}(P)$

前章の定理3.1において、 $\overline{M}$ 上で定義され、値を $L^\infty(\partial D, D)$ の中に取り有界線型作用素 P を導入し、定理3.3によつて、 P と $\mathcal{Q}$ との相異は「 P が±境界近くでの ^(generalized) local character property をもち、 $\mathcal{Q}$ は $\partial D \times D$ 上の有界な核である」という事は分ったが、実際問題として、定理3.2の *resolvent* の分解式から、 $P, \mathcal{Q}$ の完全なる分離を行うには、 $\mathcal{Q}(P) = \overline{M}$ の考察が必要である。

定理4.1 仮定(*): $C_\infty(D) \subset \overline{M}_\infty$

の下で、 $PC_\infty(D) = \{0\}$ である。

証明 系3.3より、 $PC_0(D) = \{0\}$ が分り、 $C_0(D)$ が $C_\infty(D)$ で稠密な2つと、 P の *boundedness* より、 $PC_\infty(D) = \{0\}$ が成立する。

それでは、 $C_\infty(D) \subset \overline{M}_\infty$ はいかなる条件の下で成立するのであるのか？ それに答えるのが次の定理である。

定理4.2

$\{G_\alpha^\circ; \alpha > 0\}$ は D 上の *diffusion* に対応する *resolvent* とし、
 (1) $G_\alpha^\circ(C_\infty(D)) \subset C_\infty(D)$ (2) $G_1^\circ 1 \in C(D)$
 を仮定するならば、 $C_\infty(D) \subset \overline{M}_\infty$ が成り立つ。

証明 は省略する。(Hille-Yosidaの定理を使う。)

§5P の表現 (I)

今までの章とは離れて、一般的事実を証明する。

D を第2可算公理を満たす局所コンパクト、Hausdorff 空間とし、 $(V, \mathcal{F}, \nu)$ を測度空間とする。

$\{G_\alpha^\circ; \alpha > 0\}$: a family of resolvents

$$G_\alpha^\circ : B(D) \longrightarrow B(D)$$

(i) linear (ii) positive (iii) $\alpha G_\alpha^\circ I \leq I$

$$(IV) \quad G_\alpha^\circ - G_\beta^\circ + (\alpha - \beta) G_\alpha^\circ G_\beta^\circ = 0$$

$$(V) \quad f \in C_\infty(D) \text{ には } \exists L, \alpha G_\alpha^\circ f(x) \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} f(x) \quad (x \in D)$$

$$(VI) \quad G_\alpha^\circ(C_\infty(D)) \subset C_\infty(D)$$

$$(VII) \quad \exists r > 0 \text{ s.t. } G_r^\circ I \in C_\infty(D), \quad G_r^\circ I(x) > 0, \forall x \in D.$$

が与えられたとする。

$$\mathcal{M} = \left\{ \frac{G_\alpha^\circ f}{G_r^\circ I}; \alpha > 0, f \in B(D) \right\}$$

$$\mathcal{M}_\infty = \left\{ \frac{G_\alpha^\circ f}{G_r^\circ I}; \alpha > 0, f \in C_\infty(D) \right\}$$

補題 5.1

(1) $\mathcal{M} \subset B(D)$, linear subspace, $\ni 1$.

(2) $\mathcal{M}_\infty \subset \mathcal{M} \cap C(D)$, linear subspace, D の点を分離する。

補題 5.2

$C_\infty(D) \supset \exists C'$ 高々可算集合 s.t.

(1) $f, g \in C', a, b$ 有理数 $\Rightarrow af + bg \in C'$

(2) C' は $C_0(D)$ にあつて稠密 ($\sup \text{norm } \tau$)

証明 K. Ito [7] の p296 の lemma 2.

補題 5.3

$M_\infty \supset \exists M'$ 高々可算集合 s.t.

(1) $\varphi, \psi \in M', a, b$ 有理数 $\Rightarrow a\varphi + b\psi \in M'$

(2) M' は M_∞ にあつて稠密 ($\sup \text{norm } \tau$)

証明 補題 5.2 の C' をとり、 $M' = \{ \frac{G_t^2 + t}{G_t^2 + 1}; t \in C' \}$ が求め

るものとす。

定理 5.1

$$P: \overline{M} \longrightarrow L^\infty(V, \mathcal{F}, \nu)$$

(1) bounded linear (2) positive (3) $\|P\| \leq 1$

$\Rightarrow V$ の各点 ξ に対して、 D の M_∞ -compact 化 D^* ([1] の p. 96) 上の有界な測度 ($\mu(\xi, d\eta) \geq 0$) $\mu(\xi, d\eta)$ が存在して、次の (1), (2) をみたす;

(1) $\forall \varphi \in \overline{M}_\infty \quad \exists \nu\text{-a.e. } \xi \in V$

$$P\varphi(\xi) = \int_{D^*} \mu(\xi, d\eta) \varphi^*(\eta)$$

但し、 φ^* は D^* 上への φ の連続拡張函数である。

(2) $\nu\text{-a.e. } \xi \in V \quad \|P\|(\xi) = \mu(\xi, D^*)$

証明 は省く。(Hahn-Banach の定理を使う。)

補題 5.4 $\alpha > 0, f \in B(D) \ni x \in D, G_\alpha^1 f(x) = \frac{G_\alpha^0(f \cdot G_\beta^0 1)(x)}{G_\beta^0 1(x)}$

とおくとき、 $\{G_\alpha^1; \alpha > 0\}$ は

(1) $G_\alpha^1(B(D)) \subset B(D)$, (2) linear (3) positive (4) $\alpha G_\alpha^1 \leq 1$

(5) $G_\alpha^1 - G_\beta^1 + (\alpha - \beta) G_\alpha^1 G_\beta^1 = 0$ (6) $G_\alpha^1(C(D)) \subset C(D)$

(7) $\forall f \in C(D) \quad \forall x \in D \quad \alpha G_\alpha^1 f(x) \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} f(x)$

(8) $\mathcal{R} = \{G_\alpha^1 f; \alpha > 0, f \in C(D)\}$ は D の点を分離する。

(9) $\mathcal{R}$ は $C(D)$ の linear subspace である。 (10) $\mathcal{R} \subset M_\infty$

(11) $\overline{\mathcal{R}} = M_\infty$

証明は省く。(11) は $f \in C_\infty(D)$ に対し $\varepsilon > 0$ は、

$\alpha G_\alpha^1 f \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} f$ (一様) が成り立つことよりである。

補題 5.5 D の M_∞ -compact 化を D^* とする。

$f \in C(D^*), \alpha > 0$ に対し $G_\alpha^* f = [G_\alpha^1(f|_D)]^*$ とおく。

($G_\alpha^1(f|_D) \in \mathcal{R} \subset M_\infty$ であるから、その連続拡大 $[G_\alpha^1(f|_D)]^*$ は存在する。) このとき、 $\{G_\alpha^*; \alpha > 0\}$ は

(1) $G_\alpha^*(C(D^*)) \subset C(D^*)$ (2) linear (3) positive (4) $\alpha G_\alpha^* \leq 1$

(5) $G_\alpha^* - G_\beta^* + (\alpha - \beta) G_\alpha^* G_\beta^* = 0$

(6) $\alpha G_\alpha^* f(x) \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} f(x) \quad (f \in C(D^*), \underline{x \in D})$

証明は省く。(これは容易である。)

補題 5.6 $\mathcal{R}^* \equiv \{g^*; g \in \mathcal{R}\}$, $\mathcal{M}_\infty^* \equiv \{g^*; g \in \mathcal{M}_\infty\}$

(g^* は g の連続拡大) とおくと、

$$(1) \mathcal{R}(G_\alpha^*) \subset \mathcal{R}^* \subset \mathcal{M}_\infty^*$$

$$(2) \overline{\mathcal{M}_\infty^*} = (\overline{\mathcal{M}_\infty})^*, \quad \overline{\mathcal{R}^*} = (\overline{\mathcal{R}})^*$$

$$(3) \overline{\mathcal{R}(G_\alpha^*)} = \overline{\mathcal{R}^*} = \overline{\mathcal{M}_\infty^*}$$

証明は省く。

補題 5.7 $\mathcal{R}(G_\alpha^*)$ は 内部の点同志、entrance boundary の点 ($\in D^* - D$) 同志 を分離する。

証明 $\mathcal{M}_\infty$ -compact 化 の定義と 補題 5.5 の (6), 5.6 より。

仮定 (κ_2) $\{f \in C(D^*); \forall \alpha > 0, \alpha G_{\alpha+\frac{1}{2}}^* f \leq f\}$ が D の点と $D^* - D$ の点とも分離する。

補題 5.8

(1) D^* の各点 x に対して、次の性質をもつ subadditive 測度 $\mu_2(x, dy)$ が唯一つ存在する；

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha G_\alpha^* f(x) = \int_{D^*} \mu_2(x, dy) f(y) \quad \forall f \in C(D^*)$$

(2) $\forall f \in C(D^*), \forall \alpha > 0, \forall x \in D^*$

$$G_\alpha^* f(x) = \int_{D^*} \mu_2(x, dy) G_\alpha^* f(y)$$

(3) $\forall E \text{ Borel } \subset D^*$ に対して、 $\mu_2(\cdot, E)$ は Borel 可測

(4) $D_b^* \equiv \{x \in D^*; \mu_2(x, dy) \neq \delta_x(dy)\}$ とおくと、

D_b^* は F_σ -set であり、かつ $\forall x \in D^*$ に対して、

$$\mu_2(x, D_b^*) = 0$$

$$(5) \quad D_b^* \subset D^* - D$$

証明 補題 5.7 と 我々の仮定 $(*)_2$ より $\{G_\alpha^*; \alpha > 0\}$ が Ray の仮定を満たすから、[9] より、(D^* は compact metrizible space である。) (5) は 補題 6.5 の (6) より。

定理 5.2

$$P: \overline{M} \longrightarrow L^\infty(V, \mathcal{F}, \nu)$$

$$(1) \text{ bounded linear} \quad (2) \text{ positive} \quad (3) \|P\| \leq 1$$

$\Rightarrow V$ の各点 ξ に対して、 D^* 上の 測度 $\mu(\xi, d\eta)$ が存在し

て、次の (1), (2), (3) を満たす;

$$(1) \quad \forall \varphi \in \overline{M}_\infty \quad \nu\text{-a.e. } \xi \in V \quad P\varphi(\xi) = \int_{D^*} \mu(\xi, d\eta) \varphi^*(\eta)$$

但し、 φ^* は D^* 上への φ の連続拡張函数である。

$$(2) \quad \nu\text{-a.e. } \xi \in V \quad \mu(\xi, D^*) \leq \|P\|(\xi)$$

$$(3) \quad \forall \xi \in V \quad \mu(\xi, D_b^*) = 0$$

上の (1), (2), (3) を満たす $\mu(\xi, d\eta)$ は ν -測度 0 の ξ を除いて一意である。

証明 定理 5.1 により、2 得た測度を $\mu_1(\xi, d\eta)$ とし、

補題 5.8 の $\mu_2(\eta, d\eta)$ を使い、各点 $\xi \in V$ に対して、

$$\mu(\xi, E) = \int_{D^*} \mu_1(\xi, d\eta) \mu_2(\eta, E) \quad (E \text{ Borel } \subset D^*)$$

と D^* 上の有界測度を作る。これが求めるものであることは

補題 5.8 より分る。一意性も $D^* - D_b^* \ni \forall \gamma$ に交り

$$\alpha G_\alpha^* f(\gamma) \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} f(\gamma) \quad (f \in C(D^*)) \quad (\text{補題 5.8 の (1)})$$

が成り立つことより分る。

§ 6

$\mathbb{P}$ の表現 (II)

今度は、§ 3 までは戻り、 $\{G_\alpha^*; \alpha > 0\}$ は § 1 のそれとし、

$V \equiv \partial D$, $\mathcal{F} \equiv \text{Borel field}$, $\nu \equiv \mathbb{P}$ の canonical measure とし、

§ 5 における仮定を § 6 においてもおくとする。即ち、

§ 5 の (vi), (vii), 仮定 (κ_2) をおくのである。

補題 6.1 ∂D の各点 z に交り、 $\tilde{S}_z \equiv \{\eta \in D^*; z \in \forall U \text{ neighborhood}$

of $z, \overline{U \cap D} \ni \eta\}$ (closure は D^* における) とおくと、

$$(1) \tilde{S}_z = \bigcap_{\varepsilon > 0} \{x \in D; \text{dist}(x, z) < \varepsilon\} \quad (\text{closure は } D^* \text{ における})$$

$$(2) \tilde{S}_z \subset D^* - D$$

証明 (1) は明白である。(2) は D が D^* 中の homeo. に $\lambda \rightarrow \infty$

による。

補題 6.2

$$\mathcal{L}_+ \equiv \{f \in C(D^*)^+; \forall \alpha > 0 \quad \alpha G_{\alpha+\frac{1}{2}}^* f \leq f\}$$

$$\mathcal{L} \equiv \{f_1 - f_2; f_1, f_2 \in \mathcal{L}_+\} \quad \text{とおく。}$$

$$(1) \{G_{\frac{1}{2}}^* f; f \in C(D^*)^+\} \subset \mathcal{L}_+ \subset \mathcal{L} \subset C(D^*)$$

(2) $\mathcal{L}$ は $C(D^*)$ の vector lattice で、1 を含み、 D^* の点を分離する

$$(3) \overline{\mathcal{L}} = C(D^*)$$

$$(4) \quad \mathcal{L}_+ \ni \forall f \quad \alpha G_{\alpha+\frac{1}{2}}^* f \uparrow_{(d)}$$

証明 (1) は補題 5.5 の (5) より. (2) は $\mathcal{L}_+ = \gamma u_2$, $\mathcal{L}_+ \ni f, g \Rightarrow f+g, fg, af \in \mathcal{L}_+ (a \geq 0)$, $\mathcal{L}_+ \ni]$ を満たすことによる。 D^* の点を分離することとは、補題 5.7 と仮定 (A_2) による。(3) は Stone-Weierstrass の定理である。(4) は補題 5.5 の (5) より分る。

定理 6.1 $(\mu(\beta, d\eta)$ の support)

$$V\text{-a.e. } \beta \in \partial D \text{ に対し } \mu(\beta, D^* - \beta_3) = 0$$

証明 最後まで述べたいのですか、かなり長く、面倒なので省略します。(頁数も多くあったので)。key point は補題 3.5 で、補題 6.2 の (3) をうまく使うことにあります。

以上、証明を省略した所は、どこかに発表されると思います。

文献

- [1] C. Constantinescu and A. Cornea ; Ideale Ränder
Riemannscher Flächen , Springer-Verlag, 1963
- [2] K. Kunita, K. Ito, M. Fukushima and M. Motoo ;
拡散過程と境界上のマルコフ過程 ,
Lectures on Probability Vol. 22, 1965
- [3] M. Motoo ; Representation of a certain class of excessive
functions and a generator of Markov processes

Scientific Papers of the College of General Education University of Tokyo,

Vol. 13, 1963, p143-159

- [4] M. Motoo ; マルコフ過程の additive functional
Seminar on Probability, Vol. 15, 1963
- [5] M. Motoo ; The sweeping-out of additive functionals
and processes on the boundary,
Ann. Inst. Stat. Math., 16 (1964), 317-345
- [6] M. Motoo ; Application of additive functionals to the boundary
problem of Markov processes (Lévy system of
U-processes), Proc. 5-th. Berkeley Symp., Vol. 2, 1967,
P75-110
- [7] K. Ito ; 確率論 (岩波) 1953
- [8] Robert R. Phelps; Lectures on Choquet's Theorem .
D. Van Nostrand Company, Inc. 1966
- [9] D. Ray ; Resolvents, transition functions and strongly
Markovian processes, Ann. of Math. (2), 70 (1959),
43-72
- [10] K. Sato ; A decomposition of Markov processes,
J. Math. Soc. Japan, Vol. 17, NO. 3, 1965,
- [11] S. Watanabe; On discontinuous additive functionals P 219-243
and Levy measures of a Markov process, Japan. J. Math., Vol. 34 (1964), 53-70