

講義ノート

1 次元非対称単純排他過程の厳密解¹

東京工業大学 理工学研究科 笹本 智弘²

(2002 年 12 月 16 日受理)

1 次元非対称単純排他過程 (asymmetric simple exclusion process (ASEP)) と呼ばれる非平衡統計力学模型の物理的・数理的性質について解説する. ASEP は, 1 次元の格子上を体積排除の相互作用の下に多数の粒子が拡散するという単純なモデルであるが, 境界条件による相転移や非等方的なスケーリングなど, 非平衡系特有の興味深い現象を示すことが知られている. さらに ASEP は厳密解が得られるという著しい性質を持っており, このノートではその部分を中心に解説する.

内容は大きく分けて 3 つあり,

1. ASEP とはどんな模型なのか [2 章]
2. 定常状態の性質 [3, 4 章]
3. 無限系におけるカレントの確率分布 [5, 6 章]

というようになっている. 2 番目の定常状態に関しては, 特に境界があってそこで粒子の出入りがある場合が物理的にも数理的にも面白いので, その場合を詳しく解説する. 3 番目は ASEP の時間発展の性質に関する話で, 一番基本的なカレントの確率分布に関して説明する.

1 Introduction

1.1 非平衡統計力学

普通, 単に統計力学と言えば平衡系に対する統計力学を指し, 学部の統計力学の授業でもほとんどの時間を平衡系の統計力学の議論に費やすが, 非平衡系に対する統計力学というのはどうなっているのだろうか?

平衡系に近い場合には, 線形応答理論という一般論があって, これは輸送係数のような量は平衡系における時間依存の相関関数から計算することが出来るという話である.

では, 平衡系から離れた場合はどうであろうか? 実はそのような場合については, 原理的なことはほとんど何も分かっていない, というのが現状なのである. それは定常状態に限ってもそうで,

¹この原稿は, 筆者が中央大学で集中講義を行う際にまとめた講義ノートに多少の訂正と加筆をしたものである. 文体が informal なところやどうでもいいことが書いてあるところもあるが, せっかくなのでそのまま残すことにした. 気になる読者もいるかもしれないが御容赦願いたい.

²E-mail: sasamoto@stat.phys.titech.ac.jp

* 本稿は, 編集部の方から特別にお願いして執筆していただいた記事である.

系がなぜそういう状態にしようとするのか?が分からない. つまり平衡系の場合のエントロピー最大化のような極大化原理が分からない.

このような状況において, 非平衡系に対するアプローチとしていくつかのものが考えられる. 原理的に考えて一番正しいと思われるのは, 多粒子系に対する Newton 方程式や Schrödinger 方程式から出発して系がどのような時間発展をするかを調べるものである. しかしそんなことを実際に実行することが出来ることはほとんど無いであろう. そこで自分の興味のある現象の本質を捕えていると考えられる非平衡系のモデルを確率過程として定式化し, その性質を調べるという方法も出てくる.

このノートでは後者を採用し, 非平衡系をモデル化した多粒子の確率過程を取り扱う. 特に, 厳密解を得られる 1 次元非対称単純排他過程 (asymmetric simple exclusion process (ASEP)) と呼ばれる模型に着目し, その性質を調べる.

しかし多粒子の問題に入る前にウォーミングアップとして 1 粒子のランダムウォークの話から始めることにする.

1.2 ランダムウォーク

ランダムウォークは, 日本語では酔歩 (または乱歩) といい, 酔っ払いが不規則によたよた歩くような状況を表すモデルである.

ランダムウォークは, 確率過程の一番基本的なものである. これは一体問題なので, 統計力学の問題とは言えないが, 揺らぎ (ウォーカーの確率的な動き) が周りの粒子からの影響の結果だと考えると, すでに非平衡統計力学の話でもある.

一口にランダムウォークと言っても, 空間や時間を離散的にとるか連続的にとるか, また空間を何次元に取るか, 境界条件をどうするか, によって色々なバージョンがある.

まず時間も空間も離散的で, 空間は無限に長い 1 次元格子の場合を考える. (このノートでは空間は 1 次元の場合のみ考える.) この場合, 酔っ払い (これからは粒子と呼ぶ) の動きは, まず時刻 0 で粒子は原点におり, そしてその後は各時間ステップ毎に確率 $1/2$ で右または左に 1 格子間隔だけ移動する, として定める. すると時刻 1 に粒子は各々確率 $1/2$ でサイト 1 またはサイト -1 にいる.

さて一般に時刻 t においてサイト x にいる確率 $P(x; t)$ を求めよう. 時刻 t までに右に移動した回数を R 回, 左に移動した回数を L 回とすると, $P(x; t) = \frac{1}{2^t} \binom{t}{R}$ であるが, $R + L = t, R - L = x$ が成り立つので

$$P(x; t) = \frac{1}{2^t} \binom{t}{\frac{t+x}{2}} \quad (1.1)$$

となる.

今は $P(x; t)$ を組合せ的に考えて出したが, $P(x; t)$ が満たす差分方程式と初期条件を考え, それを解くことによって求める事も出来る. すなわち, ランダムウォークのルールから, $P(x; t)$ は

$$P(x; t+1) = \frac{1}{2} P(x-1; t) + \frac{1}{2} P(x+1; t) \quad (1.2)$$

なる方程式と、 $P(x;0) = \delta_{x0}$ という初期条件を満たす事がわかる。これを解くことによって (1.1) を得る事が出来る。(問：確認せよ)

さて今は時間も空間も離散的な場合であったが、逆に時間も空間も連続的な場合には、粒子が時刻 t に位置 x にいる確率密度 $P(x;t)$ は、拡散方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x;t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x;t) \quad (1.3)$$

と初期条件 $P(x;t) = \delta(x)$ を満たす。これを解くと

$$P(x;t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \quad (1.4)$$

が得られる。(問：確認せよ)

次に時間連続・空間離散の場合を考えてみよう。さらに今度は、粒子が右に移動する割合と左に移動する割合が異なるような場合に一般化して考えることにする。すなわち、粒子が時刻 t にサイト x にいたとすると、時刻 $t+dt$ までの微小時間間隔 dt の間に右に移動する確率を $p_R dt$ 、左に移動する確率を $p_L dt$ として、一般には $p_R \neq p_L$ とする。すると、時刻 t に粒子がサイト x にいる確率 $P(x;t)$ が満たす微分差分方程式は

$$\frac{d}{dt} P(x;t) = p_R P(x-1;t) + p_L P(x+1;t) - (p_R + p_L) P(x;t), \quad (1.5)$$

初期条件は $P(x;0) = \delta_{x0}$ となる。

この微分差分方程式を解くには、母関数

$$G(\xi;t) = \sum_{x \in \mathbb{Z}} P(x;t) \xi^x \quad (1.6)$$

を導入する。すると $G(\xi;t)$ は

$$\frac{d}{dt} G(\xi;t) = (p_R \xi + p_L / \xi - (p_R + p_L)) G(\xi;t) \quad (1.7)$$

なる簡単な微分方程式を満たすことがわかるので簡単に解けて、

$$G(\xi;t) = e^{(p_R \xi + p_L / \xi - (p_R + p_L))t} \quad (1.8)$$

となる。

粒子の hopping が対称的 ($p_R = p_L = 1$) な場合は

$$\begin{aligned} G(x;t) &= e^{(\xi + \xi^{-1} - 2)t} \\ &= \sum_{x \in \mathbb{Z}} e^{-2t} I_x(2t) \xi^x \end{aligned} \quad (1.9)$$

となる。ただしここで $I_n(x)$ は変形 Bessel 関数で、

$$I_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}}{m!(n+m)!} \quad (1.10)$$

で与えられる。よって

$$P(x; t) = e^{-2t} I_x(2t) \quad (1.11)$$

となる。

また、もう一つ特別な場合として、粒子が右にしか hop しない場合 ($p_R = 1, p_L = 0$) には

$$G(x; t) = e^{(\xi-1)t} = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{t^x}{x!} e^{-t} \xi^x \quad (1.12)$$

であり、

$$P(x; t) = \frac{t^x}{x!} e^{-t} \quad (1.13)$$

となる。もちろんこれが微分差分方程式

$$\frac{d}{dt} P(x; t) = P(x-1; t) - P(x; t) \quad (1.14)$$

と初期条件 $P(x; t) = \delta_{x0}$ を満たしていることを確認するのは難しくない。[問： p_R, p_L が一般の場合には $P(x; t) = e^{-(p_R+p_L)t} \left(\frac{p_L}{p_R}\right)^{-(x-y)/2} I_{x-y}(2\sqrt{\frac{p_L}{p_R}}t)$ となることを示せ。]

これまで時刻 t に粒子がどこにいるのかということだけを問題にしたが、ここで、右にしか hop しない場合について、粒子があるサイトにとどまっている時間の確率分布というものを考えてみよう。右にしか hop しない場合、粒子は同じサイトに戻って来る事が無いので、あるサイトに入ってから右隣のサイトに hop するまでの時間の確率分布を考えれば良い。これは粒子が時刻 0 に原点にいた時、サイト 1 に hop する時刻 t の確率分布と言っても同じで、微小時間間隔 dt の間に粒子が hop する確率が dt であることを考えると、これはさらに時刻 0 に原点を出発した粒子が時刻 t に原点にいる確率に等しく、(1.13) で $x = 0$ とすることにより e^{-t} と分かる。つまり粒子に着目すると、粒子があるサイトに入ってから次のサイトに移動するまでの時間間隔は指数分布に従うのである。(この事実はノートの後半で出てくる事に関係しているのここで取り上げた。)

さてこれまで粒子が 1 つだけある場合を考えてきたのだが、それでは粒子が沢山あるときに見られる興味深い現象には手がでない。これは固体物理でも、一体近似で十分記述出来る場合もあるが電子間の相関が強い場合は一体近似では不十分、というのと同じことである。どういう事を想定しているかというと、例えばランダムウォーカーを自動車と見立てた場合に、渋滞という現象がどのようにして起こるのか? というような問題である。(車が 1 台しかなければ渋滞は起こらない!)

非平衡系にはもっともっと面白い現象が沢山知られている。特に、流体系においては対流がおこったり (例: Benard 対流), おもしろいパターンが見られたりする。しかし、このような現象をコンピュータシミュレーション以外の方法でミクロの話から再現するのは難しい。そこで、平衡系から遠く離れた非平衡系で、さらに詳しく色々な物理量を計算できる単純なモデルを詳しく解析することが重要になる。

2 ASEP とは?

1次元格子に、非対称な hop をするランダムウォーカーが沢山いる模型を考える。粒子間には体積排除の相互作用が働いているとする。すなわち、ある粒子が hop しようとした際に、行き先のサイトが既に別の粒子によって埋まっていた場合はその hop は起こらないとするのである。このようなモデルを asymmetric simple exclusion process (略して ASEP) という。日本語にすれば「非対称単純排他過程」と言ったところであろうがあまり認知度が高くないようなのでこの講義では ASEP と呼ぶことにする。(では何と読むのか? 人によって違うみたいだが、「エイセップ」と読む人が多いようなので筆者もそう読むことにしている。) 特に各粒子の左右の hopping rate が等しい ($p_R = p_L$) 場合は symmetric simple exclusion process (SSEP) と呼び、 $p_R = p_L = 1$ とおくことにする。また粒子が右にしか hop しない ($p_L = 0$) 場合は totally asymmetric simple exclusion process (TASEP) と呼び、この場合は $p_R = 1$ とおくことにする。

(ちなみに ASEP という略語は、たくさんの別の言葉の略語としても用いられているようで、ASEP を google で検索してみると American Sport Education Program, American Society of Exercise Physiologists, AUSTRIAN SENIOR EXPERTS POOL, accurate solutions of eigenvalue problems 等たくさん出てくる。これは全くどうでもいい話。)

さて上で述べたモデルの定義をもう少し具体的に記述しよう。そのために有限個の粒子がどこにいるかという情報が時間的にどう変わって行くのかを考える。言い替えると、無限に長い1次元格子に粒子が有限個 (N 個とする) だけある場合を考え、時刻 t でサイト $x_1, x_2, \dots, x_N$ (ただし $x_1 < x_2 < \dots < x_N$) に粒子がいる確率 $P(x_1, x_2, \dots, x_N; t)$ が満たす微分差分方程式を書き下してみる。

まず粒子が2個だけある場合を考えてみると、時刻 t でサイト x_1 と x_2 (ただし $x_1 < x_2$) に粒子がいる確率 $P(x_1, x_2; t)$ が満たす微分差分方程式は、 $x_2 - x_1 \geq 2$ の時は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} P(x_1, x_2; t) = & p_R P(x_1 - 1, x_2; t) + p_L P(x_1 + 1, x_2; t) \\ & + p_R P(x_1, x_2 - 1; t) + p_L P(x_1, x_2 + 1; t) - 2(p_R + p_L) P(x_1, x_2; t), \end{aligned} \quad (2.1)$$

$x_2 = x_1 + 1$ の時は

$$\frac{d}{dt} P(x_1, x_1 + 1; t) = p_R P(x_1 - 1, x_1 + 1; t) + p_L P(x_1, x_1 + 2; t) - (p_R + p_L) P(x_1, x_1 + 1; t) \quad (2.2)$$

となる。

より一般に N 粒子の場合は

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} P(x_1, x_2, \dots, x_N; t) \\ = & \sum_{j=1}^N [p_R P(x_1, \dots, x_j - 1, \dots, x_N; t) + p_L P(x_1, \dots, x_j + 1, \dots, x_N; t) \\ & - (p_R + p_L) P(x_1, \dots, x_N; t)] \end{aligned} \quad (2.3)$$

であり, $x_{j+1} - x_j = 1$ となる j がある場合にはそれに応じて変更しなくてはならない.

さて上に得られた N 粒子系に対する微分差分方程式が, 虚時間の Schrödinger 方程式の形をしていることに注意すると, 対応する "Hamiltonian" H があって, ASEP の時間発展は

$$\frac{d}{dt}|P(t)\rangle = -H|P(t)\rangle \quad (2.4)$$

という形に表される事がわかる. ここで H は遷移率行列, $|P(t)\rangle$ は確率密度を表すベクトルである.

もう少し具体的には次のようになっている. H や $|P(t)\rangle$ が住んでいる空間は, 各サイトに粒子がいるかいないかで指定することが出来るので, スピン $\frac{1}{2}$ 演算子を用いて記述することが出来る. 各サイトにおいてスピン $\frac{1}{2}$ 演算子

$$s^x = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad s^y = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad s^z = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

を定義する. これらは $su(2)$ 代数

$$[s^x, s^y] = is^z, \quad [s^y, s^z] = is^x, \quad [s^z, s^x] = is^y, \quad (2.6)$$

を満たす. これは,

$$s^+ = s^x + is^y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

$$s^- = s^x - is^y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

を定義すれば

$$[s^z, s^+] = s^+, \quad [s^z, s^-] = -s^-, \quad [s^+, s^-] = 2s^z, \quad (2.9)$$

とも書ける.

各サイトにおいて, 粒子がいないことを上向きスピンに対応させ粒子がいることを下向きスピンの対応させることにし, 1 つも粒子がいない (スピン系でいうと全てのスピンの上向きの) configuration を $|\Omega\rangle$ と書くことにすると粒子が $x_1, x_2, \dots, x_N$ にいる configuration は

$$s_{x_1}^- s_{x_2}^- \cdots s_{x_N}^- |\Omega\rangle \quad (2.10)$$

と書くことが出来る.

すると (2.4) に現れた $|P(t)\rangle$ は例えば 1 粒子のときは

$$|P(t)\rangle = \sum_x P(x; t) s_x^- |\Omega\rangle \quad (2.11)$$

2 粒子のときは

$$|P(t)\rangle = \sum_{x_1 < x_2} P(x_1, x_2; t) s_{x_1}^- s_{x_2}^- |\Omega\rangle \quad (2.12)$$

N 粒子のときは

$$|P(t)\rangle = \sum_{x_1 < x_2 < \dots < x_N} P(x_1, x_2, \dots, x_N; t) s_{x_1}^- s_{x_2}^- \dots s_{x_N}^- |\Omega\rangle \quad (2.13)$$

である. また H は ASEP における遷移率行列で

$$\begin{aligned} H_{\text{ASEP}} &= \sum_j \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_L & -p_R & 0 \\ 0 & -p_L & p_R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{j,j+1} \\ &= - \sum_j [p_R s_j^+ s_{j+1}^- + p_L s_j^- s_{j+1}^+ + (p_R + p_L) s_j^z s_{j+1}^z \\ &\quad + \frac{1}{2} (p_R - p_L) (s_j^z - s_{j+1}^z) - \frac{p_R + p_L}{4}] \end{aligned} \quad (2.14)$$

と与えられる. ただしここで添字の $j, j+1$ は, この行列が j 番目と $j+1$ 番目のサイトのみに nontrivial に作用し, それ以外のサイトの空間には identity として作用することを表している. (2.11), (2.12) を用いると (2.4) が粒子数 1 の空間においては (1.5), 粒子数 2 の空間においては (2.1), (2.2) と同じ内容を表していることを確認することが出来る. N 粒子の場合でも同様に, (2.4) は粒子数にかかわらず ASEP の dynamics を正しく表している. (量子力学での第 1 量子化と第 2 量子化の関係と同じ.)

ただしここで, ASEP という確率過程の時間発展が虚時間の Schrödinger 方程式で記述され, 時間発展の generator H がスピン演算子で書けるからと言って, 我々が量子系を考えている訳ではない事に注意しなければならない. ここでの対応はマスター方程式が虚時間の Schrödinger 方程式の形に書けると言う全く形式的なものである. $|P(t)\rangle$ は量子系でいう確率振幅を表してはいないし, さらに H はエルミートである必要もない. 実際 ASEP の H は symmetric ($p_R = p_L$) の場合を除いてエルミートではない. また $|P(t)\rangle$ の規格化は各成分の 2 乗和が 1 となること ($\langle P(t)|P(t)\rangle = 1$) ではなく, 各成分の 1 乗和が 1 となることである. (それにもかかわらずこのような定式化には Bethe ansatz のような厳密解の手法を適用することが出来るようになるといったメリットはある.)

さて今後は左右への hopping rate の比 p_L/p_R を q と書くことにし, また時間を rescale することにより $p_R = 1$ とおく. すると例えば上の H_{ASEP} は

$$H_{\text{ASEP}} = \sum_j h_{j,j+1}, \quad h = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & -1 & 0 \\ 0 & -q & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

となる.

またこれまで無限に長い 1 次元格子上で考えて来たが, 当然有限の格子上でも同様の確率過程が考えられる. それらについてはこれから出て来るたびに説明する.

3 定常状態

モデルの定義が終わったので、次にこの章と次の章で定常状態がどうなっているのかを調べる。これは、量子系で言えばハミルトニアンを定義した後で基底状態を調べるようなものである。

3.1 無限系

無限系においては、比較的簡単に見付けられる定常状態の系列が2つある。一方は current が有限の値を持ち、他方は current は0になる。粒子のカレントが重要な物理量になるところが非平衡的である。

3.1.1 一定密度

まず、 $0 \leq \rho \leq 1$ として、各サイト独立に、粒子がいる確率が ρ であるような状態 (Bernoulli measure と呼ばれる) は定常状態である。この場合粒子の流れは $J = (1-q)\rho(1-\rho)$ で与えられる。(問：確認せよ)

3.1.2 Shock 型

$0 < c < \infty$ として、各サイト独立に、サイト x に粒子がいる確率が

$$\rho_x = \frac{1}{1 + cq^x} \quad (3.1)$$

であるような状態は定常状態である。この場合の粒子の流れは $J = 0$ で与えられる。(問：確認せよ)

symmetric($q = 1$) の場合、これは 3.1.1 の一定密度の定常状態に一致してしまう。また totally asymmetric($q = 0$) の場合、これはあるサイトより右側のサイト全てが粒子で埋まった configuration になる。

3.2 有限系 : periodic & closed

格子数が有限の場合、系が取りうる configuration の数も有限になり、系は指数関数的に定常状態に近づく。さらに周期境界や左右で粒子の出入りの無い境界条件を取った場合は、粒子数が保存するので各粒子数毎に唯一の定常状態がある。遷移率行列 H は periodic の場合は $L+1$ を1と同一視して

$$H_{\text{ASEP}}^{(\text{periodic})} = \sum_{j=1}^L h_{j,j+1} \quad (3.2)$$

closed の場合は

$$H_{\text{ASEP}}^{(\text{closed})} = \sum_{j=1}^{L-1} h_{j,j+1} \quad (3.3)$$

である。

3.2.1 有限系 1 : symmetric の場合

symmetric の場合, 系は $SU(2)$ 対称性を持っている。

SSEP の遷移率行列を, スピン演算子で書き直せば

$$H_{\text{SSEP}} = -2 \sum_{j=1}^{L(\text{or } L-1)} \left[s_j^x s_{j+1}^x + s_j^y s_{j+1}^y + s_j^z s_{j+1}^z - \frac{1}{4} \right] \quad (3.4)$$

となる, これは 1 次元 Heisenberg 模型 (XXX 模型) のハミルトニアンと同じである。さて

$$S^x = \sum_{j=1}^L s_j^x, \quad S^y = \sum_{j=1}^L s_j^y, \quad S^z = \sum_{j=1}^L s_j^z \quad (3.5)$$

で定義すると, これらはやはり $su(2)$ 代数

$$[S^x, S^y] = iS^z, \quad [S^y, S^z] = iS^x, \quad [S^z, S^x] = iS^y, \quad (3.6)$$

満たし, さらに H_{SSEP} と可換であることを確認することが出来る。

粒子が 1 つもない状態 $|\Omega\rangle$ は明らかに定常状態である ($H|\Omega\rangle = 0$)。そして H と S^- は可換であるから, $|\Omega\rangle$ に $S^- = S^x - iS^y$ を N 回作用させたもの

$$|N\rangle := \frac{(L-N)!}{L!} (S^-)^N |\Omega\rangle \quad (3.7)$$

もやはり定常状態である。(右辺の係数は規格化のためにつけてある。) S^- は粒子の数を 1 つ増やすから, これが N 粒子系の定常状態である。(問: 確認せよ) 定常状態の相関関数はこれから計算できる。また定常状態は periodic でも closed でも同じである。

3.2.2 有限系 2 : periodic

asymmetric の場合は, periodic と closed の場合で明らかに定常状態が違う。これは, 流れのある系において, 境界条件の影響が大きいと言うことの簡単な例である。

symmetric の場合と違い, periodic な ASEP に「良い」対称性があるかどうかはわからない。それにもかかわらず, symmetric の時と全く同じ様な状態 (3.7) が定常状態になっていることを確かめることが出来る。(問: 確認せよ)

3.2.3 有限系 3 : closed

asymmetric で closed の場合は, 右側につまっているような定常状態が得られることが予想される。この場合の定常状態がどのように記述されるかは自明ではないが, 実は closed ASEP は $U_q(sl_2)$ と呼ばれる対称性を持ち, N 粒子系の定常状態はその対称性から得ることが出来る [7]。

まず,

$$e = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, f = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, k = \begin{bmatrix} q^{1/2} & 0 \\ 0 & q^{-1/2} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

と定義すると, これらは

$$[e, f] = \frac{k - k^{-1}}{q^{1/2} - q^{-1/2}}, ke = qek, kf = q^{-1}fk \quad (3.9)$$

なる代数関係を満たす事を確認できるが, この代数を $U_q(sl_2)$ と呼ぶ. この代数は $q \rightarrow 1$ の極限で通常の $su(2)$ 代数になることが分かる.

普通はこの e, f, k を用いて話を進めるのだが, ここでは $q \rightarrow 0$ の極限を取りやすくするため少し normalization を変えて

$$e = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, f = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, g = q^{1/2}k^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix}, \tilde{g} = q^{1/2}k = \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

で考えることにする. これらは

$$[e, f] = \frac{g - \tilde{g}}{1 - q}, eg = qge, fg = q^{-1}gf, e\tilde{g} = q^{-1}\tilde{g}e, f\tilde{g} = q\tilde{g}f \quad (3.11)$$

なる代数を満たすことが分かる.

さらに L サイトある場合は

$$E = e_1 + g_1 e_2 + \cdots + g_1 \cdots g_{L-1} e_L \quad (3.12)$$

$$F = f_1 \tilde{g}_2 \cdots \tilde{g}_L + f_2 \tilde{g}_3 \cdots \tilde{g}_L + \cdots + f_{L-1} \tilde{g}_L + f_L \quad (3.13)$$

$$G = g_1 \cdots g_L, \tilde{G} = \tilde{g}_1 \cdots \tilde{g}_L \quad (3.14)$$

と置くとこれらは $e, f, g, \tilde{g}$ と同じ代数を満たし [確認せよ], さらに H と可換であることが分かる [確認せよ]. つまり closed ASEP は $U_q(sl_2)$ 対称性を持つ.

asymmetric の場合でも, 粒子が 1 つもない状態 $|\Omega\rangle$ は明らかに定常状態である. F は H と可換だからこれに F を N 回作用させたもの

$$|N\rangle := \frac{(1-q)^N}{(q; q)_N} \binom{L}{N}_q^{-1} F^N |\Omega\rangle \quad (3.15)$$

もやはり定常状態であり, これが N 粒子系の定常状態である. ただしここで規格化定数に現れた $(q; q)_n, \binom{L}{N}_q$ は q -factorial, q -2 項係数と呼ばれ,

$$(q; q)_n = \prod_{j=1}^n (1 - q^j) \quad (3.16)$$

$$\binom{L}{N}_q = \frac{(q; q)_L}{(q; q)_N (q; q)_{L-N}} \quad (3.17)$$

で定義される.

closed ASEP の定常状態を別の方法で記述することも出来る. 定常状態が

$$|P\rangle = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \otimes \cdots \otimes \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

の形に書けるとする. するともし

$$h \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \quad (3.19)$$

つまり $yx = qxy$ なら $H_{\text{ASEP}}^{(\text{closed})}|P\rangle = 0$ となることが分かる.

4 粒子の出入りがある有限系の定常状態

4.1 モデル

系の長さは L とし, 系の左の境界では rate $\alpha(\gamma)$ で粒子が入り (出て行き), 右の境界では rate $\beta(\delta)$ で粒子が出て行く (入って来る) ものとする.

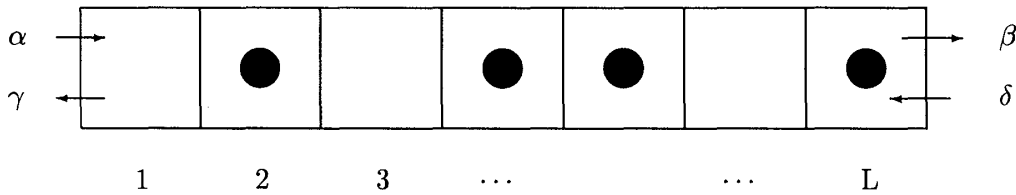


図1: 粒子の出入りのある ASEP

この場合, 遷移率行列 H は,

$$H_{\text{ASEP}}^{(\text{open})} = h_1^{(L)} + \sum_{j=1}^{L-1} h_{j,j+1} + h_L^{(R)} \quad (4.1)$$

ただし

$$h^{(L)} = \begin{bmatrix} \alpha & -\gamma \\ -\alpha & \gamma \end{bmatrix}, \quad h^{(R)} = \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\delta & \beta \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

で与えられる. 以下 $\gamma = \delta = 0$ の場合を考える.

4.2 何がおこるのか

さて, α, β の値を色々変えると何が起こるであろうか? Monte Carlo シミュレーションを行ってみると次頁のような図が得られる. 境界パラメータ α, β の値を変えることによって系の性質が著しく変わっている事が見て取れる. これから見て行くように, 厳密解を使えば粒子の流れや density profile を計算することができ, この変化が実際相転移であることを示すことが出来る. 境界パラメータの値を変化させるだけで系の bulk 部分での性質までこのように大きく変化するというのは非平衡系特有の現象である.

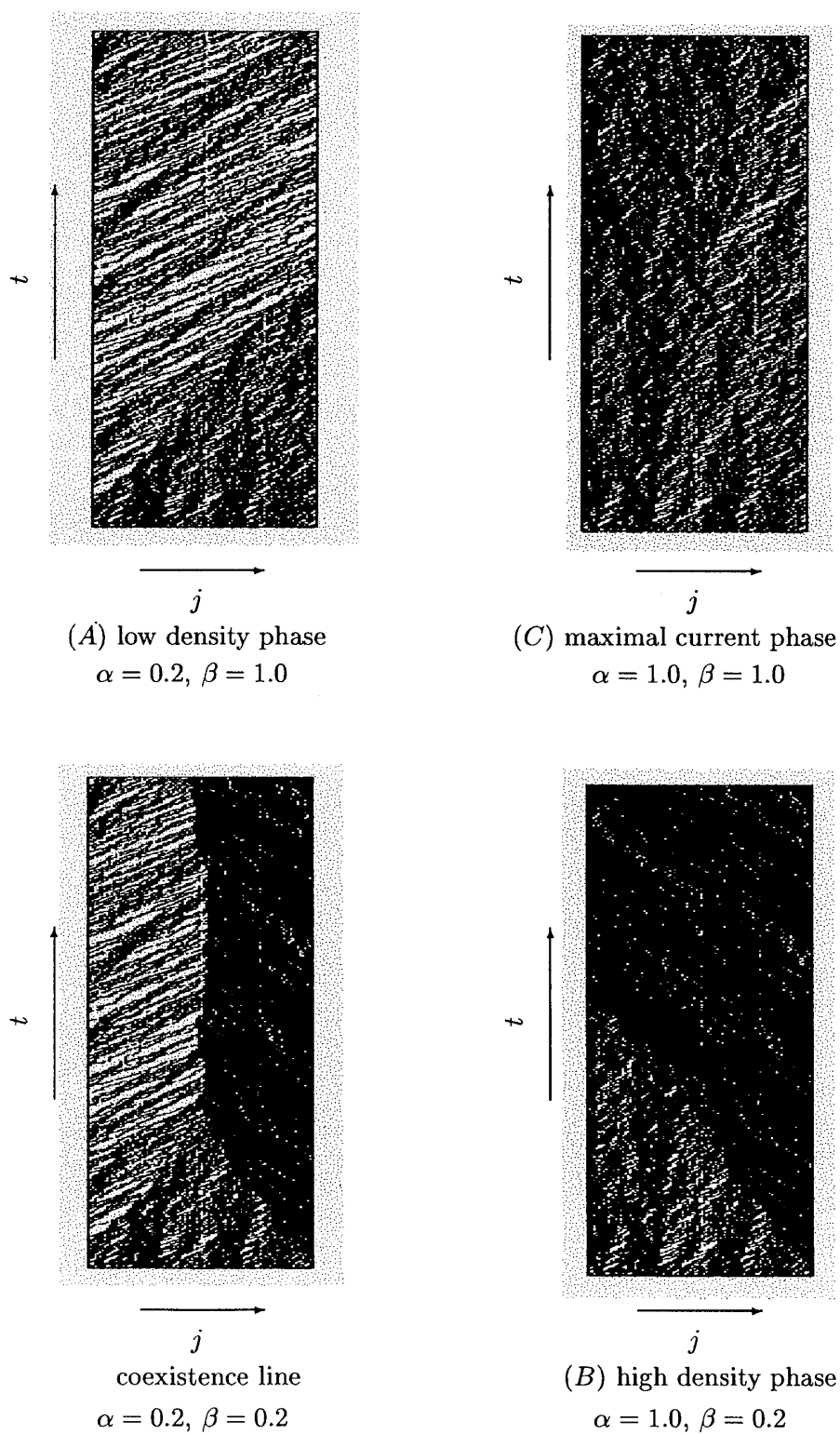


図2: コンピュータシミュレーションによる ASEP の時間発展の様子. 横軸はサイト番号, 縦軸は時間であり, 粒子は黒い点で表されている. 格子の長さは $L = 200$ としてある. また, ここでは $q = 0$ としてある.

ある程度時間がたった後で粒子密度を平均してみると次のような図が得られる。

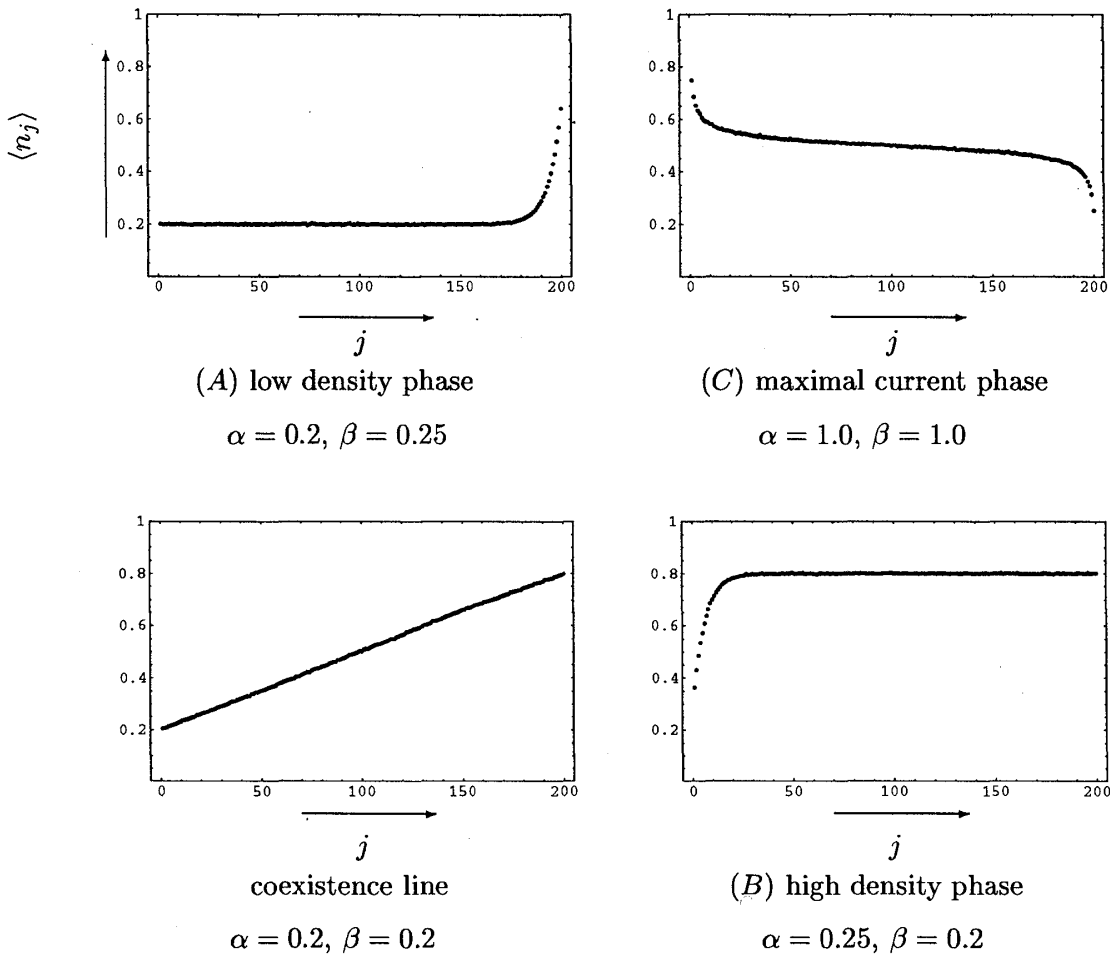


図3：定常状態における粒子密度の平均値の空間依存性のコンピュータシミュレーションによる結果。横軸はサイト番号，縦軸は粒子密度の平均値を表す。図2と同じく格子のサイズは $L = 200$ ，また $q = 0$ としてある。

[シミュレーションについて]

この講義では主に連続時間で話を進めているが，コンピュータ上でシミュレーションをする時は時間は離散化しなければならない。ASEPの時間の離散化には色々な可能性があるが，連続時間のモデルに似せてシミュレーションをするときは，ボンド（図1では隣り合う2つのサイトの間の壁）を等確率で選び両隣のサイトの configuration を見て例えば 01 であれば確率 q で 10 とする，というようにする。境界で粒子のあるモデルを考えているときは，左端と右端のボンドも含めて等確率でボンドを選び，内側のボンドが選ばれた時は上に書いたようにする。左端のボンドが選ばれたらサイト 1 に粒子がいるかどうかを見て例えば粒子がいなければ確率 α でサイト 1 に粒子を付け加える。右端も同様。

4.3 行列の方法

この模型の定常状態は, 行列の方法と呼ばれる方法を用いて厳密に求める事が出来る [14]. closed の場合の代数的な方法をヒントにして, 定常状態が

$$|P\rangle\rangle = \frac{1}{Z_L} \langle W | \begin{pmatrix} E \\ D \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} E \\ D \end{pmatrix} \otimes \cdots \otimes \begin{pmatrix} E \\ D \end{pmatrix} |V\rangle \quad (4.3)$$

の形に与えられるとしてみよう. ここで D, E はある空間の正方行列, $\langle W |, |V\rangle$ は同じ空間の行ベクトルと列ベクトルである. 混乱を避けるため確率密度のベクトルは 2 重ケットで表した. また Z_L は規格化定数で,

$$Z_L = \langle W | C^L |V\rangle \quad (4.4)$$

ただし

$$C = D + E \quad (4.5)$$

で与えられる. (4.3) は, 成分で書けば $\tau_j = 0, 1$ (サイト j に粒子がない, 又はいるに対応) として

$$P(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_L) = \frac{1}{Z_L} \langle W | \prod_{j=1}^L (\tau_j D + (1 - \tau_j) E) |V\rangle \quad (4.6)$$

とも書ける. すると, もし ζ を定数として $D, E, \langle W |, |V\rangle$ が

$$h \begin{pmatrix} E \\ D \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} E \\ D \end{pmatrix} = \zeta \left\{ \begin{pmatrix} \bar{E} \\ \bar{D} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} E \\ D \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} E \\ D \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \bar{E} \\ \bar{D} \end{pmatrix} \right\} \quad (4.7)$$

$$\langle W | h^{(L)} \begin{pmatrix} E \\ D \end{pmatrix} = -\zeta \langle W | \begin{pmatrix} \bar{E} \\ \bar{D} \end{pmatrix}, \quad h^{(R)} \begin{pmatrix} E \\ D \end{pmatrix} |V\rangle = \zeta \begin{pmatrix} \bar{E} \\ \bar{D} \end{pmatrix} |V\rangle \quad (4.8)$$

をみたせば $H|P\rangle\rangle = 0$ が満たされる事が分かる. $\bar{E} = -1, \bar{D} = 1$ と置けばこの条件は

$$DE - qED = \zeta(D + E) \quad (4.9)$$

$$\alpha \langle W | E = \zeta \langle W |, \quad \beta D |V\rangle = \zeta |V\rangle \quad (4.10)$$

と書き直せる. 以下この代数関係を満たす行列を構成し, 定常状態の性質を調べる. 上で $\bar{D} = -\bar{E} = 1$ とおいたのは, ASEP の場合は (4.9), (4.10) を満たす行列が実際に存在し, それを使えば定常状態を正しく表していることが分かるからである. モデルによってはより自明でない $\bar{E}, \bar{D}$ を取らなければならない場合もある. またここで行列 E, D とベクトル $\langle W |, |V\rangle$ の次元について気になるかも知れないが, むしろ代数関係の方が先にあって, その代数を満たす行列とベクトルがあればそれでいい (結果は同じだから) と考えて欲しい. (4.9), (4.10) に対してはすぐ下で見るように無限次元行列による表現が存在する. (パラメータが特別な関係を満たすときは有限次元表現も存在する.) 以下 ζ は規格化定数にしか効かないので以下 $\zeta = 1 - q$ とおく.

行列の言葉では, 定常状態における物理量は次のように表される.

- 粒子の流れ J_L

$$J_L = (1 - q) \frac{\langle W | C^{L-1} |V\rangle}{\langle W | C^L |V\rangle} = (1 - q) \frac{Z_{L-1}}{Z_L} \quad (4.11)$$

- 粒子密度 $\langle n_j \rangle_L$

$$\langle n_j \rangle_L = \frac{\langle W | C^{j-1} D C^{L-j} | V \rangle}{\langle W | C^L | V \rangle} \quad (4.12)$$

- 2点関数 $\langle n_j n_k \rangle_L$

$$\langle n_j n_k \rangle_L = \frac{\langle W | C^{j-1} D C^{k-j-1} D C^{L-k} | V \rangle}{\langle W | C^L | V \rangle} \quad (4.13)$$

次のような notation を用意する。

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} &= \frac{\alpha}{1-q}, & \tilde{\beta} &= \frac{\beta}{1-q} \\ a &= \frac{1-\tilde{\alpha}}{\tilde{\alpha}}, & b &= \frac{1-\tilde{\beta}}{\tilde{\beta}} \\ c_n &= (1-q^n)(1-abq^{n-1}) \end{aligned} \quad (4.14)$$

すると

$$D = 1 + \begin{bmatrix} b & \sqrt{c_1} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & bq & \sqrt{c_2} & 0 & \\ 0 & 0 & bq^2 & \sqrt{c_3} & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}, \quad (4.15a)$$

$$E = 1 + \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \sqrt{c_1} & aq & 0 & 0 & \\ 0 & \sqrt{c_2} & aq^2 & 0 & \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \end{bmatrix}, \quad (4.15b)$$

$$\langle W | = \langle 0 | := (1, 0, 0, \dots), \quad |V\rangle = |0\rangle := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (4.15c)$$

とおくとこれらが代数関係 (4.9), (4.10) を満たしていることが分かる。ここで平方根から来る曖昧さを避けるために、しばらく $|a|, |b| < 1$ と仮定する。計算を進めてゆくと平方根の無い表式が得られるので、 $|a|, |b| < 1$ 以外のパラメータ領域に対する表式は解析接続により得られる。

さてここで、規格化定数の計算に現れる行列 $C = D + E$ が

$$C = 2 + \begin{bmatrix} a+b & \sqrt{c_1} & 0 & 0 & \cdots \\ \sqrt{c_1} & (a+b)q & \sqrt{c_2} & 0 & \\ 0 & \sqrt{c_2} & (a+b)q^2 & \sqrt{c_3} & \\ 0 & 0 & \sqrt{c_3} & (a+b)q^3 & \ddots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

という実対称3重対角行列であると言う事実に注意する。これが、行列の方法と直交多項式の理論との接点となる。論文 [15] ではこのあたりについては文献を引用だけして詳細は書いてないので、このノートではその辺りについて少し詳しく解説を試みる。

4.4 Jacobi 行列と直交多項式の関係の一般論

半無限の実対称 3 重対角行列で, 非対角要素が正であるようなものを Jacobi 行列と言う. つまり

$$T = \begin{bmatrix} a_0 & b_0 & 0 & 0 & \cdots \\ b_0 & a_1 & b_1 & 0 & \\ 0 & b_1 & a_2 & b_2 & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}, \quad b_j > 0$$

という行列である. 実は Jacobi 行列は直交多項式の理論と深い関係がある. ここではその一部を紹介する [8, 9].

結果から言うと, Jacobi 行列が一つ与えられるとそれに付随した測度 $d\mu$ と直交多項式 $\{p_n(x)\}$ があり,

(a) モーメント関係式

$$\langle 0|T^n|0\rangle = \int x^n d\mu(x) \quad (4.17)$$

(b) 隣接 3 項間漸化式

$$\begin{bmatrix} a_0 & b_0 & 0 & 0 & \cdots \\ b_0 & a_1 & b_1 & 0 & \\ 0 & b_1 & a_2 & b_2 & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0(x) \\ p_1(x) \\ \vdots \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} p_0(x) \\ p_1(x) \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

(c) 直交関係式

$$\int p_m(x)p_n(x)d\mu(x) = \delta_{mn} \quad (4.19)$$

が成り立つのである. 以下これらの事について説明する.

まず測度 $d\mu$ がどのように決まるのかというところからはじめる.

$$G(z) = \langle 0|\frac{1}{T-z}|0\rangle \quad (4.20)$$

なる量を定義する. すると

$$\operatorname{Im}G(z) = \operatorname{Im}z \left\| \frac{1}{T-z}|0\rangle \right\|^2 \quad (4.21)$$

は, $\operatorname{Im}z > 0$ の時正であることがわかる. このように, 上半平面上の点を上半平面に写す解析関数は一般に Hergloz 関数と呼ばれるが, Hergloz 関数は次のような表示を持つ事が知られている.

$$G(z) = az + b + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{x-z} - \frac{x}{x^2+1} \right) d\mu(x) \quad (4.22)$$

ただし $a \geq 0, b \in \mathbb{R}, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu(x)}{1+x^2} < \infty$.

[証明] 変換

$$w = \frac{z-i}{z+i} \quad (4.23)$$

を考え,

$$g(w) = G\left(\frac{1+w}{1-w}i\right) \quad (4.24)$$

なる関数を定義すると, $g(w)$ は, 単位円内の点を上半平面に写す解析関数である.

そのような関数は次のような表示を持つ

$$g(w) = b + \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + w}{e^{i\theta} - w} \nu(d\theta) \quad (4.25)$$

[証明] $0 < r < 1$ に対し,

$$u_r(w) = \operatorname{Im} g(rw) \quad (4.26)$$

とおくと, $u_r(w)$ は単位円内で調和だから

$$\begin{aligned} u_r(w) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - |w|^2}{|e^{i\theta} - w|^2} u_r(e^{i\theta}) d\theta \\ &= \operatorname{Im} \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + w}{e^{i\theta} - w} u_r(e^{i\theta}) d\theta \end{aligned} \quad (4.27)$$

と書ける. よって $\nu_r(d\theta) = u_r(e^{i\theta})d\theta$ とおくと

$$g(rw) = b + \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + w}{e^{i\theta} - w} \nu_r(d\theta) \quad (4.28)$$

となるが, $w = 0$ とおくことにより

$$g(0) = b + \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \nu_r(d\theta) \quad (4.29)$$

よって

$$b = \operatorname{Re} g(0) \in \mathbb{R} \quad (4.30)$$

とわかる. また

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \nu_r(d\theta) = \operatorname{Im} g(0) \quad (4.31)$$

は r によらないから, Helly の選出定理によつて $r_n \rightarrow 1$ となる列 $\{r_n\}$ があつて, ν_{r_n} は $[0, 2\pi]$ 上の測度 ν に (弱) 収束する. $\square$

そこで

$$G(z) = g\left(\frac{z-i}{z+i}\right) \quad (4.32)$$

で $a = \frac{\nu(\{0\})}{2\pi}$ とおき, 変数変換

$$\frac{\mu(dx)}{1+x^2} = \frac{\nu(d\theta)}{2\pi} \quad (4.33)$$

$$e^{i\theta} = \frac{x-i}{x+i} \quad (4.34)$$

を行うと, 表式 (4.22) が得られる. $\square$

さて,

$$G(z) = \langle 0 | \frac{1}{T-z} | 0 \rangle \quad (4.35)$$

で定義された $G(z)$ の話に戻ると, これが Hergloz 関数であることから

$$G(z) = az + b + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{x-z} - \frac{x}{x^2+1} \right) d\mu(x) \quad (4.36)$$

と書ける. ここで, (4.35), (4.36) の 2 つの表示が $z \rightarrow \infty$ において

$$G(z) \sim -\frac{1}{z} + \dots \quad (4.37)$$

$$G(z) \sim az + \left(b - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+1} d\mu \right) - \frac{1}{z} \int_{-\infty}^{\infty} d\mu + \dots \quad (4.38)$$

と振舞うことに注意すると

$$a = b - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+1} d\mu = 0 \quad (4.39)$$

よって

$$G(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu(x)}{x-z} \quad (4.40)$$

と書けることがわかる.

z に関して展開すれば

$$\langle 0 | T^n | 0 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^n d\mu(x) \quad (4.41)$$

となる. これは (4.17) にほかならない.

次に, 隣接 3 項間漸化式 (4.18) を満たす多項式の系列 $\{p_n(x)\}$ が, 今得られた測度に関して正規直交関係 (4.19) を満たすことを確認する.

そのためにまず

$$p_n(T)|0\rangle = |n\rangle \quad (4.42)$$

が成り立つことを示す.

[証明] $n=0$ なら明らか. n の時正しいとする.

$$p_{n+1}(x) = \frac{1}{b_n} (xp_n(x) - a_n p_n(x) - b_{n-1} p_{n-1}(x)) \quad (4.43)$$

より

$$\begin{aligned} p_{n+1}(T)|0\rangle &= \frac{1}{b_n} (Tp_n(T) - a_n p_n(T) - b_{n-1} p_{n-1}(T))|0\rangle \\ &= \frac{1}{b_n} (T|n\rangle - a_n |n\rangle - b_{n-1} |n-1\rangle) \end{aligned} \quad (4.44)$$

であるが, ここで

$$T|n\rangle = b_{n-1}|n-1\rangle + a_n |n\rangle + b_n |n+1\rangle \quad (4.45)$$

に注意すると $p_{n+1}(T)|0\rangle = |n+1\rangle$ を得る. □

これから正規直交関係を得る.

$$\begin{aligned}
 \delta_{nm} &= \langle n|m \rangle \\
 &= \langle 0|p_n(T)p_m(T)|0 \rangle \\
 &= \int p_n(x)p_m(x)d\mu(x)
 \end{aligned} \tag{4.46}$$

4.5 Askey-Wilson 多項式

次に, Jacobi 行列 (4.16) に対応する measure は何なのか? 対応する直交多項式は何なのか? という事が問題となる. 話の順序から言えば, Jacobi 行列から出発して measure を求めるのが筋であるが, ここでは話を逆転させて, ある measure から出発してその measure に対する直交多項式を定義し, それらが満たす隣接 3 項間漸化式が Jacobi 行列 (4.16) に対応したものであることを見る.

4.5.1 q -World

以下話がいわゆる q 変型に関係して来るため, そのための notation と公式をいくつか用意する [10]. (q 変型と言うのは, 「普通の」数, 関数, リー代数等に対して q というパラメータが入って「変型された」数, 関数, リー代数等, を定義することが出来, $q \rightarrow 1$ とすると元に戻るという状況を表す. この小節の標題を q -World としたのは, q 変型されたもの達が住んでいる世界を専門家がそう呼んでいるのを聞いたことがあるからである.)

Notation

- q -shifted factorial

$$(a; q)_\infty = \prod_{j=0}^{\infty} (1 - aq^j) \tag{4.47}$$

$$\begin{aligned}
 (a; q)_n &= \frac{(a; q)_\infty}{(aq^n; q)_\infty} \\
 &= \prod_{j=0}^{n-1} (1 - aq^j) \\
 &= (1 - a)(1 - aq)(1 - aq^2) \cdots (1 - aq^{n-1}),
 \end{aligned} \tag{4.48}$$

$$(a; q)_0 = 1 \tag{4.49}$$

また $k = 0, 1, 2, \dots, \infty$ に対して

$$(a_1, a_2, \dots, a_r; q)_k = (a_1; q)_k (a_2; q)_k \cdots (a_r; q)_k \tag{4.50}$$

- basic hypergeometric series または q -hypergeometric series

$$\begin{aligned} {}_r\phi_s \left[\begin{matrix} a_1, \dots, a_r \\ b_1, \dots, b_s \end{matrix}; q, z \right] &= {}_r\phi_s(a_1, \dots, a_r; b_1, \dots, b_s; q, z) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1, \dots, a_r; q)_k}{(b_1, \dots, b_s; q)_k} \frac{((-1)^k q^{k(k-1)/2})^{1+s-r}}{z^k} z^k \end{aligned} \quad (4.51)$$

q -2 項級数

$${}_1\phi_0(a; -; q, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a; q)_k}{(q; q)_k} z^k = \frac{(az; q)_{\infty}}{(z; q)_{\infty}}, \quad |z| < 1 \quad (4.52)$$

[証明] $h_a(z) = {}_1\phi_0(a; -; q, z)$ とおくと,

$$(1-z)h_a(z) = (1-az)h_a(qz) \quad (4.53)$$

が成り立つ. これをくり返し使うと $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して

$$h_a(z) = \frac{(az; q)_n}{(z; q)_n} h_a(q^n z) \quad (4.54)$$

を得るが, これで $n \rightarrow \infty$ として $h_a(0) = 1$ を用いればよい. $\square$

Heine の公式

$${}_2\phi_1(a, b; c; q, z) = \frac{(b, az; q)_{\infty}}{(c, z; q)_{\infty}} {}_2\phi_1(c/b, z; az; q, b) \quad (4.55)$$

$$= \frac{(abz/c; q)_{\infty}}{(z; q)_{\infty}} {}_2\phi_1(c/a, c/b; c; q, abz/c) \quad (4.56)$$

[証明] まず q -2 項定理から

$$\frac{(cq^n; q)_{\infty}}{(bq^n; q)_{\infty}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(c/b; q)_m}{(q; q)_m} (bq^n)^m \quad (4.57)$$

よって

$$\begin{aligned} {}_2\phi_1(a, b; c; q, z) &= \frac{(b; q)_{\infty}}{(c; q)_{\infty}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a; q)_n (cq^n; q)_{\infty}}{(q; q)_n (bq^n; q)_{\infty}} z^n \\ &= \frac{(b; q)_{\infty}}{(c; q)_{\infty}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a; q)_n}{(q; q)_n} z^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(c/b; q)_m}{(q; q)_m} (bq^n)^m \\ &= \frac{(b; q)_{\infty}}{(c; q)_{\infty}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(c/b; q)_m}{(q; q)_m} b^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a; q)_n}{(q; q)_n} (zq^m)^n \\ &= \frac{(b; q)_{\infty}}{(c; q)_{\infty}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(c/b; q)_m}{(q; q)_m} b^m \frac{(azq^m; q)_{\infty}}{(zq^m; q)_{\infty}} \\ &= \frac{(b, az; q)_{\infty}}{(c, z; q)_{\infty}} {}_2\phi_1(c/b, z; az; q, b) \end{aligned} \quad (4.58)$$

これで (4.55) が示された. (4.56) は (4.55) を 2 回くり返し使うと得られる. $\square$

q -Saalschütz 公式

$${}_3\phi_2(a, b, q^{-n}; c, abc^{-1}q^{1-n}; q, q) = \frac{(c/a, c/b; q)_n}{(c, c/(ab); q)_n} \quad (4.59)$$

[証明] (4.52) より

$$\frac{(abz/c; q)_\infty}{(z; q)_\infty} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ab/c; q)_k}{(q; q)_k} z^k \quad (4.60)$$

これを用いると (4.56) の右辺は

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ab/c; q)_k (c/a, c/b; q)_m}{(q; q)_k (q, c; q)_m} \left(\frac{ab}{c}\right)^m z^{k+m} \quad (4.61)$$

と書ける. (4.56) の両辺の z の各次数の係数を比較して

$$\sum_{m=0}^n \frac{(q^{-n}, c/a, c/b; q)_m}{(q, c, cq^{1-n}/(ab); q)_m} q^m = \frac{(a, b; q)_n}{(c, ab/c; q)_n} \quad (4.62)$$

あとは a, b を $c/a, c/b$ で置き換えればよい. $\square$

4.5.2 Askey-Wilson 積分 [11, 12]

必要な notation と公式を導入したので,

$$w_{a,b,c,d}(z) = \frac{(z^2; z^{-2}; q)_\infty}{(az, a/z, bz, b/z, cz, c/z, dz, d/z; q)_\infty} \quad (4.63)$$

とおき, とりあえず $|a|, |b|, |c|, |d| < 1$ として次の積分を考える.

$$I_{a,b,c,d} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} w_{a,b,c,d}(z) \frac{dz}{z} \quad (4.64)$$

次が成り立つ.

$$I_{a,b,c,d} = \frac{1 - abcd}{(1 - ab)(1 - ac)(1 - ad)} I_{qa,b,c,d} \quad (4.65)$$

[証明] 積分

$$\oint \frac{w_{q^{1/2}a, q^{1/2}b, q^{1/2}c, q^{1/2}d}(z) dz}{z - z^{-1}} \quad (4.66)$$

を考えると, これは

$$\begin{aligned} & \oint \frac{w_{q^{1/2}a, q^{1/2}b, q^{1/2}c, q^{1/2}d}(q^{1/2}z) dz}{q^{1/2}z - q^{-1/2}z^{-1}} \frac{dz}{z} \\ &= \oint \frac{(1 - az)(1 - bz)(1 - cz)(1 - dz)w_{a,b,c,d}(z) dz}{q^{1/2}z(1 - z^2)} \frac{dz}{z} \end{aligned} \quad (4.67)$$

とも書き直せるし,

$$\begin{aligned} & \oint \frac{w_{q^{1/2}a, q^{1/2}b, q^{1/2}c, q^{1/2}d}(q^{-1/2}z) dz}{q^{-1/2}z - q^{1/2}z^{-1}} \frac{dz}{z} \\ &= - \oint \frac{(1 - a/z)(1 - b/z)(1 - c/z)(1 - d/z)w_{a,b,c,d}(z) dz}{q^{1/2}z^{-1}(1 - z^{-2})} \frac{dz}{z} \end{aligned} \quad (4.68)$$

とも書き直せる. (4.67) から (4.68) を引くと

$$\begin{aligned} 0 &= q^{-1/2} a^{-1} \oint \{-(1-abcd)(1-az)(1-az^{-1}) + (1-ab)(1-ac)(1-ad)\} w_{a,b,c,d}(z) \frac{dz}{z} \\ &= 2\pi i q^{-1/2} a^{-1} \{-(1-abcd)I_{qa,b,c,d} + (1-ab)(1-ac)(1-ad)I_{a,b,c,d}\} \end{aligned} \quad (4.69)$$

□

(4.65) をくり返し使うと

$$I_{a,b,c,d} = \frac{(abcd; q)_\infty}{(ab, ac, ad, bc, bd, cd; q)_\infty} I_{0,0,0,0} \quad (4.70)$$

となるので後は $I_{0,0,0,0}$ を評価すればよいが, $I_{1,q^{1/2},-1,-q^{1/2}} = 1$ (この場合 $|a| = |c| = 1 < 1$ となっていて上で書いた条件を満たさないが, (4.63),(4.64) に戻って計算できる.) に注意すれば $I_{0,0,0,0} = 2/(q; q)_\infty$ を得る. よって

$$I_{a,b,c,d} = \frac{2(abcd; q)_\infty}{(ab, ac, ad, bc, bd, cd, q; q)_\infty} \quad (4.71)$$

となる. これは $z = e^{i\theta}$ とおくと

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi w_{a,b,c,d}(e^{i\theta}) d\theta = \frac{(abcd; q)_\infty}{(ab, ac, ad, bc, bd, cd, q; q)_\infty} \quad (4.72)$$

と書き直せる. この積分を Askey-Wilson 積分と言う.

4.5.3 Askey-Wilson 多項式

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{(az, az^{-1}; q)_k}{(ac, ad; q)_k} \frac{(bz, bz^{-1}; q)_l}{(bc, bd; q)_l} w_{a,b,c,d}(z) \frac{dz}{z} &= \frac{I_{q^k a, q^l b, c, d}}{(ac, ad; q)_k (bc, bd; q)_l} \\ &= \frac{(ab; q)_{k+l}}{(abcd; q)_{k+l}} I_{a,b,c,d} \end{aligned} \quad (4.73)$$

に注意すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{I_{a,b,c,d}} \frac{1}{2\pi i} \oint \left\{ \sum_{k=0}^n \frac{(q^{-n}, q^{n-1}abcd; q)_k q^k}{(ab, q; q)_k} \frac{(az, az^{-1}; q)_k}{(ac, ad; q)_k} \right\} \frac{(bz, bz^{-1}; q)_l}{(bc, bd; q)_l} w_{a,b,c,d}(z) \frac{dz}{z} \\ = \sum_{k=0}^n \frac{(q^{-n}, q^{n-1}abcd; q)_k q^k}{(ab, q; q)_k} \frac{(ab; q)_{k+l}}{(abcd; q)_{k+l}} \\ = \frac{(ab; q)_l}{(abcd; q)_l} {}_3\phi_2 \left[\begin{matrix} q^{-n}, q^{n-1}abcd, q^l ab \\ ab, q^l abcd \end{matrix}; q, q \right] \\ = \frac{(ab; q)_l}{(abcd; q)_l} \frac{(q^{-n+1}c^{-1}d^{-1}, q^{-l}; q)_n}{(ab, q^{-n-l+1}/(abcd; q)_n)} = 0, \quad l = 0, 1, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (4.74)$$

を得る. ただしここで q -Saalschütz 公式を使った.

そこで

$$\begin{aligned} \frac{P_n(\cos \theta; a, b, c, d|q)}{a^{-n}(ab, ac, ad; q)_n} &= \sum_{k=0}^n \frac{(q^{-n}, q^{n-1}abcd; q)_k q^k}{(ab, q; q)_k} \frac{(ae^{i\theta}, ae^{-i\theta}; q)_k}{(ac, ad; q)_k} \\ &= {}_4\phi_3 \left[\begin{matrix} q^{-n}, q^{n-1}abcd, ae^{i\theta}, ae^{-i\theta} \\ ab, ac, ad \end{matrix}; q, q \right] \end{aligned} \quad (4.75)$$

と定義すると

$$(ae^{i\theta}, ae^{-i\theta}; q)_k = \prod_{j=0}^{k-1} (1 - 2aq^j \cos \theta + a^2 q^{2j}), \quad (4.76)$$

より P_n は $\cos \theta$ について n 次の多項式であることが分かり、最高次の係数は

$$P_n(x; a, b, c, d|q) = k_n x^n + \text{低次の項} \quad k_n = 2^n (q^{n-1}abcd; q)_n, \quad (4.77)$$

である。

さらに P_n たちは直交多項式である事が分かる。

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi P_n(\cos \theta) P_m(\cos \theta) w(\cos \theta) d\theta = \delta_{m,n} h_n \quad (4.78)$$

ただし

$$P_n(\cos \theta) = P_n(\cos \theta; a, b, c, d|q) \quad (4.79)$$

$$w(\cos \theta) = \frac{(e^{2i\theta}, e^{-2i\theta}; q)_\infty}{(ae^{i\theta}, ae^{-i\theta}, be^{i\theta}, be^{-i\theta}, ce^{i\theta}, ce^{-i\theta}, de^{i\theta}, de^{-i\theta}; q)_\infty} \quad (4.80)$$

$$\frac{h_n}{h_0} = \frac{(1 - q^{n-1}abcd)(q, ab, ac, ad, bc, bd, cd; q)_n}{(1 - q^{2n-1}abcd)(abcd; q)_n} \quad (4.81)$$

$$h_0 = \frac{(abcd; q)_\infty}{(q, ab, ac, ad, bc, bd, cd; q)_\infty} \quad (4.82)$$

直交多項式 $P_n(\cos \theta)$ は Askey-Wilson 多項式として知られ、 q -直交多項式の中で中心的な役割を果たすことが知られている。

また P_n たちの満たす隣接3項間漸化式は

$$2x P_n(x) = A_n P_{n+1}(x) + B_n P_n(x) + C_n P_{n-1}(x) \quad (4.83)$$

ただし

$$A_n = \frac{2k_n}{k_{n+1}} = \frac{1 - abcdq^{n-1}}{(1 - abcdq^{2n-1})(1 - abcdq^{2n})} \quad (4.84)$$

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{2k_{n-1}}{k_n} \frac{h_n}{h_{n-1}} \\ &= \frac{(1 - q^n)(1 - abq^{n-1})(1 - acq^{n-1})(1 - adq^{n-1})(1 - bcq^{n-1})(1 - bdq^{n-1})(1 - cdq^{n-1})}{(1 - abcdq^{2n-2})(1 - abcdq^{2n-1})} \end{aligned} \quad (4.85)$$

$$\begin{aligned} B_n &= a + a^{-1} - A_n a^{-1} (1 - abq^n)(1 - acq^n)(1 - adq^n) \\ &\quad - C_n a / ((1 - abq^{n-1})(1 - acq^{n-1})(1 - adq^{n-1})) \end{aligned} \quad (4.86)$$

となっていることを確認できる. A_n は, (4.83) で最高次の係数を (4.77) を用いて比較する. C_n は, (4.83) の両辺に $P_{n-1}(x)$ をかけて積分し, (4.78) を使う. B_n を求めるときは, P_n が $x = (a + a^{-1})/2$ のとき

$$P_n((a + a^{-1})/2; a, b, c, d | q) = a^{-n} (ab, ac, ad; q)_n \quad (4.87)$$

と計算できることを使う.

4.5.4 Al-Salam-Chihara 多項式 [13]

Askey-Wilson 多項式において $c = d = 0$ とおいた特別な場合は Al-Salam-Chihara 多項式と呼ばれ,

$$P_n(\cos \theta) = P_n(\cos \theta; a, b | q) = (ab; q)_n a^{-n} {}_3\phi_2 \left[\begin{matrix} q^{-n}, ae^{i\theta}, ae^{-i\theta} \\ ab, 0 \end{matrix}; q, q \right] \quad (4.88)$$

で与えられる. そしてこの場合隣接 3 項間漸化式 (4.83) は, 係数 A_n, B_n, C_n が

$$A_n = 1 \quad (4.89)$$

$$B_n = (a + b)q^n \quad (4.90)$$

$$C_n = (1 - q^n)(1 - abq^{n-1}) \quad (4.91)$$

となるので,

$$P_{n+1}(x) + (a + b)q^n P_n(x) + (1 - q^n)(1 - abq^{n-1})P_{n-1}(x) = 2xP_n(x) \quad (4.92)$$

となる. そこで

$$p_n(x) = \frac{P_n(x)}{\sqrt{(q, ab; q)_n}} \quad (4.93)$$

とおくと, $\{p_n(x)\}$ は Jacobi 行列 (4.16) に対して (4.18) で右辺の x を $2x$ にしたものを満たす事を確かめられる. つまり, 我々が考えていた Jacobi 行列 (4.16) に対応する直交多項式は本質的に Al-Salam-Chihara 多項式であることが分かった.

Al-Salam-Chihara 多項式の場合に, $|a|$ や $|b|$ が 1 より大きくなった場合にどうなるのか考えてみよう. これらの多項式の直交関係式は (4.78) より

$$\frac{(q, ab; q)_\infty}{4\pi i} \int_C \frac{dz}{z} \frac{(z^2, z^{-2}; q)_\infty p_n(\frac{z+z^{-1}}{2}) p_m(\frac{z+z^{-1}}{2})}{(az, a/z, bz, b/z; q)_\infty} = \delta_{mn} \quad (4.94)$$

のように表される. ここで C は複素平面上の経路であって, 基本的には単位円周を正の方向に一周するものであるが, 被積分関数の極のうち原点に収束するものと無限遠に発散してゆくものを分けるようなものである. まず $|a|, |b| < 1$ の場合は C は単位円周としてよかったが, それ以外の場合は極の移動に合わせて C を変形してゆく. 図 4 に $0 < b < a^{-1} < 1 < a < b^{-1}$ が満たされる場合の経路 C の例を与える. また (4.94) では平方根が現れないので, $|a|, |b| < 1$ という条件を外して考えて良いことが分かる.

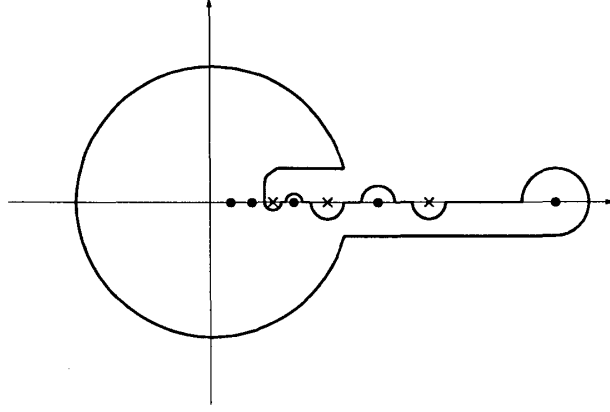


図4: $0 < b < a^{-1} < 1 < a < b^{-1}$ の場合の経路 C の例. 黒丸 (·) は原点に収束する極の列, ×印は無限遠に発散してゆく極の列 (の一部) を表す.

4.6 物理量の計算

後は物理量の計算であるが, このノートではカレントについての結果を引用するにとどめる. これまでの2節を辛抱強く読めば直交多項式や q 変型に対してかなり慣れてきていて, 後は論文を読めば何をやっているか分かると思う.

4.6.1 カレント J

粒子の流れは (4.11) で与えられるから, 熱力学極限における粒子の流れを計算するには規格化定数 Z_L の $L \rightarrow \infty$ での漸近的な振舞いを知ればよい. さて (4.17) を今の場合に適用すると,

$$Z_L = \frac{(q, ab; q)_\infty}{2\pi i} \int_C \frac{dz}{z} \frac{(z^2, z^{-2}; q)_\infty [(1+z)(1+z^{-1})]^L}{(az, a/z, bz, b/z; q)_\infty} \quad (4.95)$$

を得る. ここで C は複素平面上の経路で, Al-Salam-Chihara 多項式の直交関係の説明のところで述べたのと同じように取る. この Z_L の積分表示において L は指数として現れているので鞍点法 (最急降下法) を用いた漸近解析に適した形をしている. 実際に計算を進めると Z_L の漸近形はパラメータ a, b の値によって変化し, 次のように与えられる.

- The case A ($a > 1$ and $a > b$; $\tilde{\alpha} < \frac{1}{2}$ and $\tilde{\alpha} < \tilde{\beta}$)

$$Z_L \simeq \frac{(a^{-2}; q)_\infty}{(b/a; q)_\infty} [(1+a)(1+a^{-1})]^L \quad (4.96)$$

- The case B ($b > 1$ and $a < b$; $\tilde{\beta} < \frac{1}{2}$ and $\tilde{\alpha} > \tilde{\beta}$)

$$Z_L \simeq \frac{(b^{-2}; q)_\infty}{(a/b; q)_\infty} [(1+b)(1+b^{-1})]^L \quad (4.97)$$

- The case C ($0 < a, b < 1$; $\tilde{\beta} > \frac{1}{2}$ and $\tilde{\alpha} > \frac{1}{2}$)

$$Z_L \simeq \frac{(ab; q)_\infty (q; q)_\infty^3 4^{L+1}}{\sqrt{\pi} (a, b; q)_\infty^2 L^{\frac{3}{2}}} \quad (4.98)$$

よって熱力学極限における粒子の流れ $J = \lim_{L \rightarrow \infty} J_L$ もパラメータ空間 (α, β) において3つの領域で異なった解析的表示を持つ。そしてこの違いこそ、境界のパラメータの値の変化によって系の振舞いが変わったことに相当するのである。各相における J の具体的な表式は次のように与えられる。

- Phase A (low density phase ; $a > 1$ and $a > b$; $\tilde{\alpha} < \frac{1}{2}$ and $\tilde{\alpha} < \tilde{\beta}$)

$$J = (1 - q)\tilde{\alpha}(1 - \tilde{\alpha}) \quad (4.99)$$

- Phase B (high density phase ; $b > 1$ and $a < b$; $\tilde{\beta} < \frac{1}{2}$ and $\tilde{\alpha} > \tilde{\beta}$)

$$J = (1 - q)\tilde{\beta}(1 - \tilde{\beta}) \quad (4.100)$$

- Phase C (maximal current phase ; $0 < a, b < 1$; $\tilde{\beta} > \frac{1}{2}$ and $\tilde{\alpha} > \frac{1}{2}$)

$$J = \frac{1 - q}{4} \quad (4.101)$$

結局相図は下の図で与えられる。

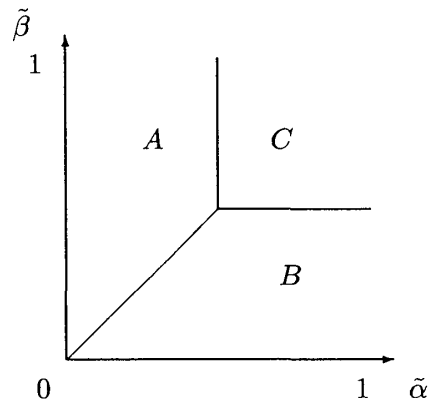


図5：粒子の流れ J の相図

5 Burgers 方程式

前章までずっと ASEP の定常状態の性質について調べて来た。これからの 2 章では時間に依存した量について考える。目的は ASEP 特に TASEP の非平衡揺らぎに関する性質を調べる事であるが、まずは揺らぎを無視した取り扱いを考えておく。

5.1 ASEP と Burgers 方程式

ASEP の 1 点関数の時間発展は次式で与えられる。

$$\frac{d}{dt}\langle n_j \rangle = \langle n_{j-1}(1 - n_j) \rangle - \langle n_j(1 - n_{j+1}) \rangle + q\langle (1 - n_j)n_{j+1} \rangle - q\langle (1 - n_{j-1})n_j \rangle \quad (5.1)$$

これは、形式的には ASEP に対するマスター方程式から得られるのであるが、時刻 t でサイト j に粒子がいる、という状況はそのほんの少し前の時刻での状況からどのようにして得られるか、ということを考えても得ることが出来る。(5.1) によると、1 点関数を計算するのに 2 点関数の情報が必要になる。そこで次に 2 点関数の時間発展を記述する式を書き下すと、今度は 3 点関数の情報が必要になることがわかる。結局相関関数を計算するには、無限個の方程式の階層を解かなければならないことになる。

しかしそれは普通に考えると無理な話なので、この章ではとりあえず相関を無視した取り扱いを考える。次の章では揺らぎも取り入れて考えるが、そこではカレントという一番簡単な量の確率分布のみを考える。さて上の式 (5.1) で $\langle AB \rangle$ を $\langle A \rangle \langle B \rangle$ に置き換えてしまうと

$$\frac{d}{dt}\langle n_j \rangle = \langle n_{j-1} \rangle - \langle n_{j-1} \rangle \langle n_j \rangle - \langle n_j \rangle + \langle n_j \rangle \langle n_{j+1} \rangle + q\langle n_{j+1} \rangle - q\langle n_j \rangle \langle n_{j+1} \rangle - q\langle n_j \rangle + q\langle n_{j-1} \rangle \langle n_j \rangle \quad (5.2)$$

となる。これは要するに平均場近似であり、1 点関数のみで閉じた式になっている。ただこれでも変数が離散で取り扱いが少々面倒なので連続極限も取ってしまうことにする。格子間隔 a を導入し、 $u(x; t) = u(ja; t) = \langle n_j \rangle$ とし、 a が小さいとしてその 2 次まで考えることにすると、

$$\langle n_{j+1} \rangle = u(x + a) \sim u + u_x a + \frac{1}{2} u_{xx} a^2 \quad (5.3)$$

と近似出来る。格子間隔 a を 0 に持って行くのと同時に、時間もスケールし直して at を改めて t と書くと

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -(1 - q) \frac{\partial}{\partial x} \{u(1 - u)\} + \frac{1}{2}(1 + q) u_{xx} a \quad (5.4)$$

となり、右辺第 2 項は $a \rightarrow 0$ の極限で無視できることが分かる。特に $q = 0$ の場合に $a \rightarrow 0$ の極限では

$$\frac{\partial}{\partial t} u + \frac{\partial}{\partial x} \{u(1 - u)\} = 0 \quad (5.5)$$

となるが、この方程式は inviscid Burgers 方程式とよばれ、非線型微分方程式の中では基本的な方程式の 1 つである。

5.2 Burgers 方程式の解法

Inviscid Burgers 方程式 (5.5) を

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases} \quad (5.6)$$

という初期条件の下に解くことを考えよう。ただし、このままでは解が一意に決まって来ないので、一旦 (5.4) の第 2 項に相当する項が残っている方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} u + \frac{\partial}{\partial x} u(1-u) = \epsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} u \quad (5.7)$$

(これを viscosity のある Burgers 方程式という) を初期条件 (5.6) の下で解き、その後で $\epsilon \rightarrow 0$ とすることを考える。

まず $v = u - 1/2$ なる変数変換を行うと

$$\frac{\partial}{\partial t} v = \epsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} v + \frac{\partial}{\partial x} v^2 \quad (5.8)$$

となるが、この方程式は Hopf-Cole 変換

$$v = \epsilon \frac{\partial}{\partial x} \log \varphi \quad (5.9)$$

を行うと拡散方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi = \epsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi \quad (5.10)$$

になってしまうので簡単に解ける。初期条件 (5.6) は φ では

$$\varphi(x, 0) = e^{-\frac{|x|}{2\epsilon}} \quad (5.11)$$

となるので

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon t}} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\frac{(x-y)^2}{4\epsilon t} - \frac{|y|}{2\epsilon}} \quad (5.12)$$

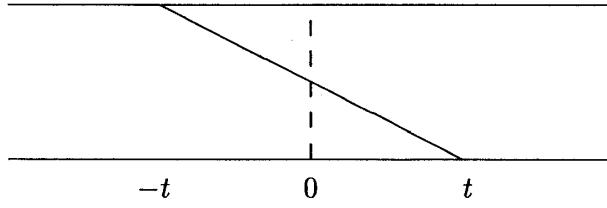
が得られ、

$$v(x, t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dz z e^{-\left(\frac{z^2}{4} + |z + \frac{x}{t}|/2\right) \frac{t}{\epsilon}}}{\int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-\left(\frac{z^2}{4} + |z + \frac{x}{t}|/2\right) \frac{t}{\epsilon}}} \quad (5.13)$$

となる。ここに現れた積分が $\epsilon \rightarrow 0$ でどのように振舞うかを調べることにより結局 $\epsilon \rightarrow 0$ で

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & x < -t \\ \frac{1}{2}(1 - x/t) & |x| < t \\ 0 & x > t \end{cases} \quad (5.14)$$

となる事がわかる (問：確認せよ)。図で書くと

図6：時刻 t での $u(x, t)$

のようになっている。原点より右側の部分の面積は $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times t = t/4$ である。

5.3 Burgers 方程式における初期条件の重要性

今度は、初期条件を少し一般化して

$$u(x, 0) = \begin{cases} \rho_- & x < 0 \\ \rho_+ & x > 0 \end{cases} \quad (5.15)$$

という場合を考える。 $\rho_- = 1, \rho_+ = 0$ が前小節で考えた場合に相当する。

先ほどと同様に計算を進めると、結果は次のようになる。

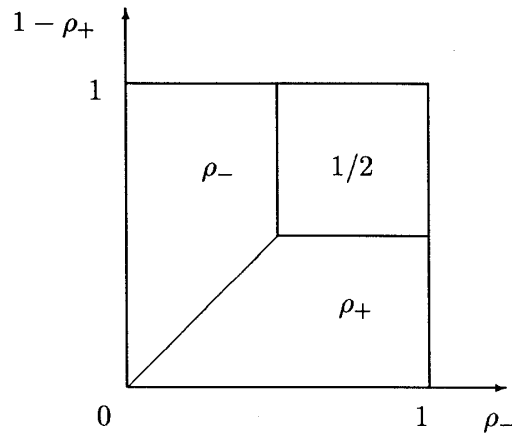
(i) $\rho_- > \rho_+$ の場合

$$u(x, t) = \begin{cases} \rho_- & x \leq -(2\rho_- - 1)t \\ \frac{1}{2}(1 - x/t) & -(2\rho_- - 1)t \leq x \leq (1 - 2\rho_+)t \\ \rho_+ & x \geq (1 - 2\rho_+)t \end{cases} \quad (5.16)$$

(ii) $\rho_+ > \rho_-$ の場合

$$u(x, t) = \begin{cases} \rho_- & x < (1 - \rho_+ - \rho_-)t \\ \rho_+ & x > (1 - \rho_+ - \rho_-)t \end{cases} \quad (5.17)$$

これによると原点での粒子密度は 初期条件の違いにより違う。それは下図のようになるが、図5と比較すると本質的に同じものであることが分かる。

図7：各 $\rho_{\pm}$ に対する原点での粒子密度

6 Current Fluctuation

6.1 カレント

次に ASEP の時間発展に関する揺らぎの問題を考える。以後系は無限格子とし、粒子は右のみに移動する ($q = 0$) TASEP の場合を考える。さらに初期条件としては原点 (サイト 0) より左側には粒子がつまっていて、右側には粒子がひとつも無いような、下図のようなものを考える。これは Burgers 方程式で言えば (5.6) の初期条件に相当する。

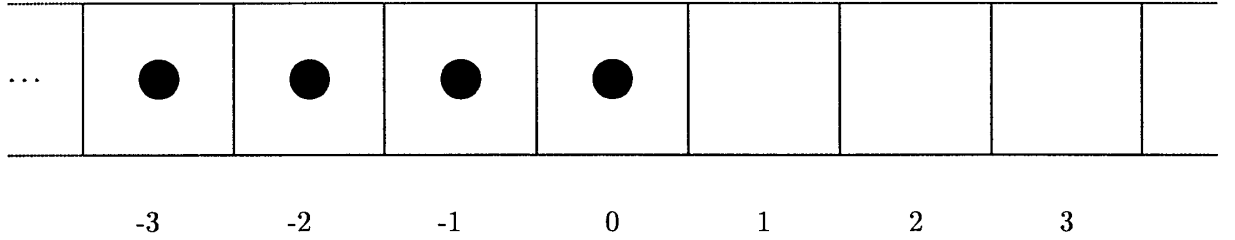


図 8：この章での初期条件

これから時刻 t までに原点を越えた粒子の数 $N(t)$ の確率分布を問題にする。これは Burgers 方程式で言えば原点より右側にある部分の面積に相当するので、 $N(t)$ の期待値を $\langle N(t) \rangle$ と書くと

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle N(t) \rangle}{t} = \frac{1}{4} \quad (6.1)$$

と予想されるが、その周りの揺らぎを問題にするのである。特に $t \rightarrow \infty$ の極限においてうまくスケールしてやれば universal な確率分布が得られると期待され、それがどんなものであるかに興味がある。もしそれが Gaussian であればありふれた話で、 σ を定数として揺らぎの部分を $\sqrt{t}$ でスケールして

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Prob}[N(t) \leq \frac{t}{4} + \xi \sigma \sqrt{t}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\xi} e^{-\eta^2/2} d\eta \quad (6.2)$$

というようになると考えられるが、ASEP の $N(t)$ に関してはそうではない分布が現れるのである。

6.2 準備

問題自体ははっきりしているのだが、実際に計算するのはかなり大変で、組合せ論、対称関数、ランダム行列の理論に関する知識が必要になってくる。しかし説明し出すとキリが無いので、この節では Young 図と Schur 関数と呼ばれる対称関数に関して最低限の事だけまとめておく。よく分からなかったり興味を持った場合は参考文献 [17] 等を見て欲しい。

6.2.1 分割と Young diagram

n を自然数とすると、 n の分割を

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) \quad (6.3)$$

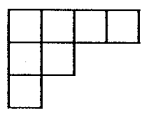
で表す。ただし λ_j ($j = 1, 2, \dots, k$) は自然数で

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j = n \quad (6.4)$$

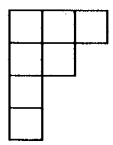
$$\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k \quad (6.5)$$

を満たすものである。このとき $\lambda \vdash n$ と書く。また k のことを $\ell(\lambda)$ と書く。

分割 (または λ) は Young diagram で表すことが出来る。例えば 7 の分割 $(4, 2, 1)$ は


(6.6)

と表すことが出来る。Young diagram λ の転置を λ' と書く。例えば $\lambda = (4, 2, 1)$ の転置 λ' は


(6.7)

n の分割全体を $\mathcal{P}_n$ と書くと、

$$\mathcal{P}_0 = \phi \quad (6.8)$$

$$\mathcal{P}_1 = \{1\} \quad (6.9)$$

$$\mathcal{P}_2 = \{2, 11\} = \{2, 1^2\} \quad (6.10)$$

$$\mathcal{P}_3 = \{3, 21, 111\} = \{3, 21, 1^3\} \quad (6.11)$$

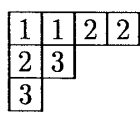
$$\mathcal{P}_4 = \{4, 31, 22, 211, 1111\} = \{4, 31, 2^2, 21^2, 1^4\} \quad (6.12)$$

$\vdots$

であり、さらに $\mathcal{P} = \cup_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_n$ とおく。

6.2.2 Semi-standard Young Tableaux (SSYT) と Schur 関数

Young diagram に、右に向かって weakly increasing, 下に向かって strictly increasing に自然数を埋めたものを Semi-standard Young Tableaux (SSYT) という。例えば次のようなものである。


(6.13)

SSYT T に対し, j が T に現れる回数を $\alpha_j(T)$ とし,

$$x^T = x_1^{\alpha_1(T)} x_2^{\alpha_2(T)} \dots \quad (6.14)$$

とおく. 例えば (6.13) の SSYT T に対しては

$$x^T = x_1^2 x_2^3 x_3^2 \quad (6.15)$$

である. また $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ を T の type といい $\alpha = \text{type}(T)$ と書く.

Schur 関数を

$$s_\lambda = \sum_T x^T \quad (6.16)$$

で定義する. ただし和は shape が λ であるような全ての SSYT にわたる,

例えば $\lambda = (2, 1)$ で $x_4 = x_5 = \dots = 0$ とした場合, 可能な SSYT は

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \quad (6.17)$$

だから

$$s_{21}(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2 + 2x_1 x_2 x_3 \quad (6.18)$$

となる.

s_λ は行列式による別な表式も知られていて, それは

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_n, 0, \dots) = \frac{\det(x_j^{\lambda_i + n - i})_{1 \leq i, j \leq n}}{\det(x_j^{n - i})_{1 \leq i, j \leq n}} \quad (6.19)$$

というものである. 証明は省略するが, 例えば $\lambda = (2, 1)$ の場合に

$$s_{21}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\begin{vmatrix} x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} \quad (6.20)$$

が成り立つことを確認することが出来る.

この Schur 関数の表式で $x = (1, x, \dots, x^{N-1}, 0, \dots)$ とおくと, $r = \sum_{i=1}^N (i-1)\lambda_i$ として

$$s_\lambda(1, x, \dots, x^{N-1}, 0, \dots) = x^r \prod_{1 \leq i < j \leq N} \frac{x^{\lambda_i - \lambda_j + j - i} - 1}{x^{j-i} - 1} \quad (6.21)$$

となる. これでさらに $x \rightarrow 1$ としたものを (6.16) で $x = (\underbrace{1, \dots, 1}_N, 0, \dots)$ としたものと等しいと

おくと, $[N] = \{1, 2, \dots, N\}$ の元を要素とするような shape λ の SSYT の数は

$$s_\lambda(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_N, 0, \dots) = \prod_{1 \leq i < j \leq N} \frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j - i} \quad (6.22)$$

で与えられることが分かる.

6.3 Growing Young Diagram と TASEP

下左図のように、 $i, j = 1, 2, \dots$ として格子点 (i, j) 上に非負整数 $w_{i,j}$ が書かれている状況を考える。

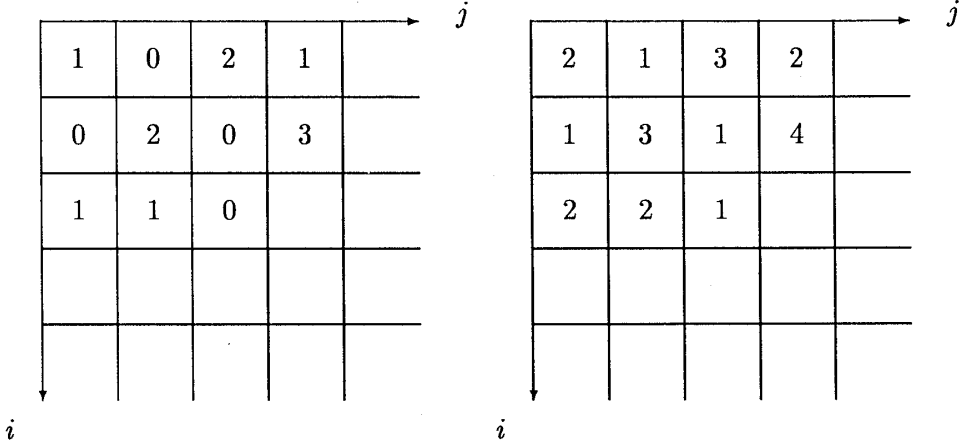


図9: $w_{i,j}, w_{i,j}^*$ の例

ここで $w_{i,j}$ を各格子点ごとに独立に幾何分布に従う確率変数とする。つまり

$$\text{Prob}(w_{i,j} = k) = (1 - q)q^k \quad (6.23)$$

ただし $k \in \mathbb{N}$, $0 < q < 1$ とする。(この章では TASEP のみを考えており, q は左への hopping rate ではない。)

次に (M, N) を1つ定め, $\Pi_{M,N}$ で $(1, 1)$ から (M, N) への right/down paths の集合を表す。また

$$G(M, N) = \max_{\pi \in \Pi_{M,N}} \left\{ \sum_{(i,j) \in \pi} w_{i,j} \right\} \quad (6.24)$$

とする。さらに $w_{i,j}^* = w_{i,j} + 1$ とし

$$G^*(M, N) = \max_{\pi \in \Pi_{M,N}} \left\{ \sum_{(i,j) \in \pi} w_{i,j}^* \right\} = G(M, N) + M + N - 1 \quad (6.25)$$

とおく。この場合 $w_{i,j}^*$ を書いたのが上右図である。

そして

$$A(t) = \{(M, N); G^*(M, N) \leq t\} \quad (6.26)$$

とおく。今の例では

$$\begin{aligned} G^*(1, 1) &= 2, & G^*(1, 2) &= 3, & G^*(1, 3) &= 6, & G^*(1, 4) &= 8 \\ G^*(2, 1) &= 3, & G^*(2, 2) &= 6, & G^*(2, 3) &= 7, & G^*(2, 4) &= 12 \\ G^*(3, 1) &= 5, & G^*(3, 2) &= 8, & G^*(3, 3) &= 9, & \dots \end{aligned}$$

だから

t	0	1	2	3	4	5	...
$A(t)$	ϕ	ϕ	$\square$	$\begin{array}{ c c }\hline \square & \square \\ \hline \square & \square \end{array}$	$\begin{array}{ c c }\hline \square & \square \\ \hline \square & \square \end{array}$	$\begin{array}{ c c }\hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \end{array}$	...

つまり $w_{i,j}$ が与えられたとき, $A(t)$ は Young diagram の成長を表す. さらに今は $w_{i,j}$ が確率分布に従うとしているので, 確率的な Young diagram の成長を考えていることになる.

$A(t)$ から成長のルールを考えると, $A(t+1)$ は $A(t)$ に 1 つ box をつけくわえてもやはり Young diagram であるような各点に独立に確率 $1 - q$ で box をつけくわえる事によって得られる. また, $G^*(M, N) = k$ は「 (M, N) がつけくわえられる時刻が k である」という事を意味している. (この辺りの事はすぐには分からないかも知れないので, よく考えて欲しい.)

以上で説明して来た確率的な Young diagram の成長は, 実は離散時間の TASEP とみなすことが出来る. そのために $A(t) =$

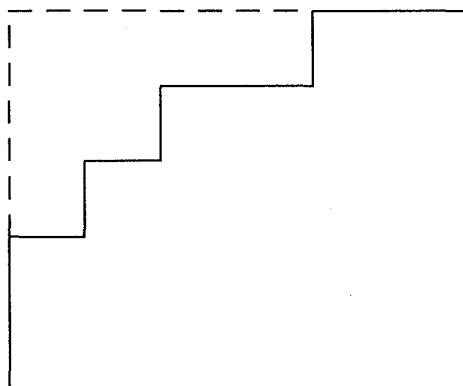
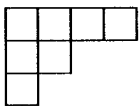


図 10 : Young diagram と縦線・横線

のように考え, 横線 $-$ には粒子のいるサイト, 縦線 $|$ には粒子のいないサイトを対応させ, 右上から左下の方向に見て行くと, 左から書いて行く. すると今の場合

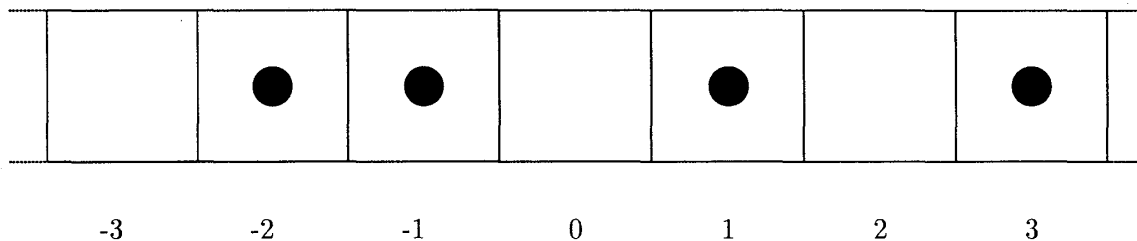


図 11 : 図 10 の Young diagram に対応する粒子の configuration

でサイト 4 より右には粒子はなく、逆にサイト -4 より左には粒子がつまっている configuration に対応していることがわかる。そして $A(t)$ の成長のルールは、各粒子が、右隣に粒子がいなければ確率 $1 - q$ で右隣に hop するということに対応する。これは時間の離散的な TASEP である!

また、 $G^*(M, N) = k$ は「右から N 番目の粒子が M 回目の hop をする時刻が k である」という事を意味していることになる。すると離散時間と連続時間の違いを除けば目標の $N(t)$ の分布に関して

$$\text{Prob}(N(t) \leq N) = \text{Prob}[G^*(N+1, N+1) > t] \quad (6.27)$$

と書ける事が分かるので、次に右辺を書き直すことを考える。

6.4 Combinatorics とランダム行列表示

6.4.1 一般化された permutation

$M \times N$ 行列 $w = (w_{i,j})$ で、各成分 $w_{i,j}$ が非負整数であるようなものの全体の集合を $\mathcal{M}_{M,N}$ と書く。また、 $\mathcal{M}_{M,N}$ の要素 w のうち、さらに $\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N w_{i,j} = k$ を満たすものの全体の集合を $\mathcal{M}_{M,N}^k$ で表す。例えば

$$w = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3,3}^7 \quad (6.28)$$

である。

また一般化された permutation を

$$\sigma = \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ j_1 & \cdots & j_k \end{pmatrix} \quad (6.29)$$

ただし $i_r < i_{r+1}$ または $i_r = i_{r+1}, j_r \leq j_{r+1}$ で定義する。上の行の要素が $[M]$ から、下の行の要素が $[N]$ から取ったような長さ k の一般化された permutation の集合を $\mathcal{S}_{M,N}^k$ とする。

すると $w \in \mathcal{M}_{M,N}^k$ の要素を左上から右、下の順序で見て行って (i, j) 成分 $w_{i,j}$ が 0 でなければ $w_{i,j}$ 個だけ $\binom{i}{j}$ をならべて行くことによって一般化された permutation σ_w を得ることが出来るが、これが $\mathcal{M}_{M,N}^k$ と $\mathcal{S}_{M,N}^k$ の一対一対応を与える事が分かる。例えば上の行列 w に対応する一般化された permutation は

$$\sigma_w = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_{3,3}^7 \quad (6.30)$$

である。

また $\ell(\sigma)$ を一般化された permutation σ の (下の段の) weakly longest increasing subsequence とすると

$$\max_{\pi \in \Pi_{M,N}} \sum_{(i,j) \in \pi} w_{i,j} = \ell(\sigma_w) \quad (6.31)$$

が成り立つ。例えば上の例の場合は両辺とも 4 である。

6.4.2 RSK アルゴリズム

$S_{M,N}^k$ はさらに同じ shape $\lambda \vdash k$ を持ち, 各要素が $[N]$ と $[M]$ の要素であるような, 2つの SSYT の pair (P, Q) と 1 対 1 対応している. その対応を与えるのは RSK(Robinson-Schensted-Knuth) アルゴリズムと呼ばれ, ルールは以下のようなものである. (ご存じの人も多いと思うが, Knuth はこの原稿を用意するのにもお世話になっている $\text{\TeX}$ を作ったことでも有名.) σ_w の下の列に並んでいる数字を左から見ていき, 順々に右側からぶつけていく (inserting). そしてぶつかったとき左側の数字が自分以下であればそのままくっつける. そうでないときはそこから左をみて一番近い自分以下の数字の右隣の数字を 1 つ下の列に弾き飛ばし (bumping), 自分はその位置に収まる. そして弾き飛ばされた数字は一つ下の段で同じ事をする.... これを繰り返すと σ_w の下の列に並んでいた数字達で構成される Young tableaux が 1 つ出来上がり, それを P とする. もう 1 つの Young tableaux Q は, P が段々出来上がっていく各ステップで新しく数字がくつittedところに, 対応する σ_w の上の列の数字を置いて行くことにより作る.

しかしこれでは何を言ってるのかよく分からないだろうから, (6.30) の例で説明する.

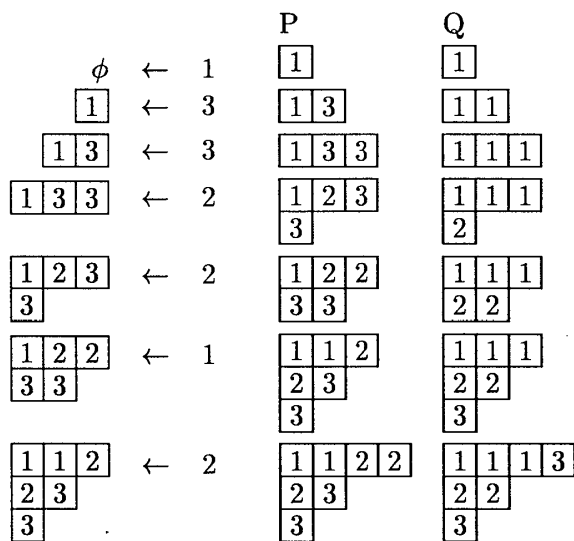


図 12: RSK アルゴリズム

とりあえず P が段々出来上がって行く手順を考える.

第 1 列: σ_w の下の列の一番左端にある 1 をおき, P の所を書く.

第 2 列: σ_w の下の列の左から 2 番目にある 3 を右側から insert する. これは 1 より大きいのでそのままくっつけたものを P の所を書く.

第 3 列: σ_w の下の列の左から 3 番目にある 3 を右側から insert する. これもそのままくっつけたものを P の所を書く.

第 4 列: σ_w の下の列の左から 4 番目にある 2 を右側から insert するが, 今度はそのままくっつけるのではなく, 1 の右隣にある 3 を bump しその場に収まる. そして bump された 3 は 1 つ下の段に行くのである.

ここまでで上で書いたルールは分かったと思う。後はルール通りに続けて行くと一番下に見えるPを得る。またQはPが出来上がって行く各ステップで新たに数字がくつittedところに σ_w の上の列の数字を置いて行ったものであり、その作り方から明らかにPと同じ形をしていることが分かる。

さらにこの対応において、 $\ell(\sigma)$ は、対応するSSYTのshape λ の一段目の長さ λ_1 に等しい事が分かり、(6.28),(6.30)の例でも対応するSSYTでは確かに $\lambda_1 = 4$ となっている。

6.4.3 ランダム行列表示

以上の対応を用いて $\text{Prob}[G(M, N) \leq t]$ を書き直す。まず

$$S(M, N) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N w_{i,j} \quad (6.32)$$

とおく。

$$\text{Prob}[G(M, N) \leq t] = \sum_{k=0}^{\infty} \text{Prob}[G(M, N) \leq t | S(M, N) = k] \text{Prob}[S(M, N) = k] \quad (6.33)$$

ここで

$$\text{Prob}[S(M, N) = k] = \#\mathcal{M}_{M,N}^k (1-q)^{MN} q^k \quad (6.34)$$

また

$$\begin{aligned} & \text{Prob}[G(M, N) \leq t | S(M, N) = k] \\ &= \frac{\# \text{ of } M \times N \text{ matrices s.t. } S(M, N) = k \text{ \& } G(M, N) \leq t}{\# \text{ of } M \times N \text{ matrices s.t. } S(M, N) = k} \end{aligned} \quad (6.35)$$

であるが、分母は $\#\mathcal{M}_{M,N}^k$ であり、分子はRSKアルゴリズムから $\sum_{\lambda \vdash k} L(\lambda, M, N)$ という形に書ける。ただしここで $L(\lambda, M, N)$ はshapeが λ で要素が $[N], [M]$ であるようなSSYTのpair (P, Q) の数である。(6.22)を用いると $L(\lambda, M, N)$ は次のように表される。

$$\begin{aligned} L(\lambda, M, N) &= s_{\lambda}(\underbrace{1, \dots, 1}_M, 0, \dots) s_{\lambda}(\underbrace{1, \dots, 1}_N, 0, \dots) \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq M} \frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j - i} \prod_{1 \leq i < j \leq N} \frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j - i} \\ &= \prod_{j=0}^{N-1} \frac{1}{j!(M-N+j)!} \prod_{1 \leq i < j \leq N} (h_i - h_j)^2 \prod_{i=1}^N \frac{(h_i + M - N)!}{h_i!} \end{aligned} \quad (6.36)$$

ただし $h_i = \lambda_i + N - i$ とした. よって

$$\begin{aligned}
 & \text{Prob}[G(M, N) \leq t] \\
 &= (1-q)^{MN} \sum_{k=0}^{\infty} q^k \sum_{\substack{\lambda \vdash k \\ \lambda_1 \leq t}} L(\lambda, M, N) \\
 &= (1-q)^{MN} \sum_{k=0}^{\infty} q^k \sum_{\substack{\lambda \vdash k \\ \lambda_1 \leq t}} s_{\lambda}(\underbrace{1, \dots, 1}_M, 0, \dots) s_{\lambda}(\underbrace{1, \dots, 1}_N, 0, \dots) \\
 &= \frac{(1-q)^{MN}}{N!} q^{-N(N-1)/2} \prod_{j=0}^{N-1} \frac{1}{j!(M-N+j)!} \\
 &\quad \times \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{h \in \mathbb{N}^N \\ \sum h_i = k + N(N-1)/2 \\ \max\{h_i\} \leq t + N - 1}} \prod_{1 \leq i < j \leq N} (h_i - h_j)^2 \prod_{i=1}^N \frac{(h_i + M - N)!}{h_i!} q^{\sum_{i=1}^N h_i} \\
 &= \frac{1}{Z_{M,N}} \sum_{\substack{h \in \mathbb{N}^N \\ \max\{h_i\} \leq t + N - 1}} \prod_{1 \leq i < j \leq N} (h_i - h_j)^2 \prod_{i=1}^N \binom{h_i + M - N}{h_i} q^{h_i}
 \end{aligned} \tag{6.37}$$

$$\tag{6.38}$$

ただし

$$Z_{M,N} = \frac{q^{\frac{1}{2}N(N-1)}}{(1-q)^{MN}} \prod_{j=1}^N j!(M-N+j-1)! \tag{6.39}$$

6.4.4 連続時間極限

$w_{i,j}$ が従う確率分布は幾何分布であった. パラメータが $q = 1 - 1/\gamma$ の場合の幾何分布に従う変数 X_γ があったとすると, $\frac{1}{\gamma}X_\gamma$ は, $\gamma \rightarrow \infty$ の極限で, パラメータ 1 の指数分布に従う確率変数になることが分かる. これが元々考えていた連続時間の TASEP に相当する.

そこで, $u_{i,j}$ を各格子点ごとに独立に指数分布に従う確率変数とする. つまり

$$\text{Prob}(u_{i,j} = x) = e^{-x} \tag{6.40}$$

とする. また $G(M, N)$ の代わりに

$$H(M, N) = \max_{\pi \in \Pi_{M,N}} \sum_{(i,j) \in \pi} u_{i,j} \tag{6.41}$$

とする. このとき (6.38), (6.39) で極限を取ることによって

$$\text{Prob}[H(M, N) \leq t] = \frac{1}{Z_{M,N}} \int_{[0,t]^N} \prod_{1 \leq i < j \leq N} (x_i - x_j)^2 \prod_{j=1}^N x_j^{M-N} e^{-x_j} dx \tag{6.42}$$

ただし

$$Z_{M,N} = \prod_{j=1}^N j!(M-N+j-1)! \tag{6.43}$$

となる。ところが (6.42) の右辺は Laguerre Unitary Ensemble (LUE) と呼ばれるランダム行列の最大固有値が t 以下である確率に等しい。

ここでランダム行列について少し述べておく [16]。行列要素がランダムであるような行列をランダム行列という。その中でも特に性質がよく重要な行列のアンサンブルとして Gaussian Unitary Ensemble (GUE) というものがある。これは、 $N \times N$ のエルミート行列で、各要素が独立にガウス分布に従っているようなランダム行列である。GUEにおいては、 $\lambda_{\max}$ を GUE から取って来た $N \times N$ ランダム行列の最大固有値として

$$\text{Prob}[\lambda_{\max} \leq t] = \frac{1}{Z_N} \int_{(-\infty, t]^N} \prod_{1 \leq i < j \leq N} (x_i - x_j)^2 \prod_{i=1}^N e^{-2Nx_i^2} d^N x \quad (6.44)$$

が成り立つことが知られている。これと (6.42) の右辺を比較するとその類似性は明らかであろう。そしてランダム行列理論において最大固有値の位置の確率分布については既に調べられていたのである！

我々は特に原点を越えた粒子の数 $N(t)$ の確率分布を考えていたのであるが、それは

$$\begin{aligned} \text{Prob}[N(t) \leq N] &= \text{Prob}[H(N+1, N+1) > t] \\ &= 1 - \text{Prob}[H(N+1, N+1) < t] \end{aligned} \quad (6.45)$$

で与えられる。あとは計算はランダム行列理論の方では標準的な方法によって $N(t)$ の確率分布のスケールリング極限を求める事が出来る。以下はその導出の概説である。

6.5 Fredholm 行列式

$$\begin{aligned} F_N(t) &= \text{Prob}[H(N, N) \leq t] \\ &= \frac{1}{Z_{N,N}} \int_{[0, t]^N} \prod_{1 \leq i < j \leq N} (x_i - x_j)^2 \prod_{j=1}^N e^{-x_j} d^N x \end{aligned} \quad (6.46)$$

とおく。

すると

$$F_N(t) = \det(1 - K_N) \quad (6.47)$$

が成り立つ。ただしここで K_N は積分作用素で

$$(K_N f)(x) = \int_t^\infty K_N(x, y) f(y) dy \quad (6.48)$$

$$K_N(x, y) = \sum_{j=0}^{N-1} \varphi_j(x) \varphi_j(y) \quad (6.49)$$

で与えられる。ただし $\varphi_n(x)$ は

$$\varphi_n(x) = (-1)^n L_n(x) e^{-x/2} \quad (6.50)$$

で $L_n(x)$ は Laguerre 多項式であり,

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{x^k}{k!} \quad (6.51)$$

で定義される. $\varphi_n(x)$ は $[0, \infty)$ で正規直交化されている. また "det" は Fredholm 行列式を表し,

$$\det(1 - K_N) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_t^{\infty} dx_1 \cdots \int_t^{\infty} dx_k \det(K_N(x_i, x_j))_{i,j=1}^k \quad (6.52)$$

で定義される. ただしここで右辺の det は通常の行列に対する行列式である.

[(6.47) の証明] まず c_N を定数として

$$\begin{aligned} & \prod_{1 \leq i < j \leq N} (x_i - x_j) \prod_{j=1}^N e^{-x_j/2} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{N-1} & x_2^{N-1} & \cdots & x_N^{N-1} \end{vmatrix} \prod_{j=1}^N e^{-x_j/2} \\ &= c_N \begin{vmatrix} \varphi_0(x_1) & \varphi_0(x_2) & \cdots & \varphi_0(x_N) \\ \varphi_1(x_1) & \varphi_1(x_2) & \cdots & \varphi_1(x_N) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_{N-1}(x_1) & \varphi_{N-1}(x_2) & \cdots & \varphi_{N-1}(x_N) \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (6.53)$$

が成り立つ. よって

$$\begin{aligned} & \int_{[0,t]^N} d^N x \prod_{1 \leq i < j \leq N} (x_i - x_j)^2 \prod_{j=1}^N e^{-x_j} \\ &= c_N^2 \int_{[0,t]^N} d^N x \det(\varphi_i(x_j))_{0 \leq i \leq N-1, 1 \leq j \leq N} \det(\varphi_i(x_j))_{0 \leq i \leq N-1, 1 \leq j \leq N} \\ &= c_N^2 N! \det\left(\int_0^t \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx\right)_{0 \leq i, j \leq N-1} \\ &= c_N^2 N! \det(\delta_{i,j} - \int_t^{\infty} \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx)_{0 \leq j, k \leq N-1} \end{aligned} \quad (6.54)$$

となるがここで

$$\det(\delta_{i,j} - \int_t^{\infty} \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx)_{0 \leq j, k \leq N-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_{[t,\infty)^k} dx^k \det(K_N(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq k} \quad (6.55)$$

が成り立つ.

よって

$$\begin{aligned} F_N(t) &= \frac{1}{Z_{N,N}} \int_{[0,t]^N} d^N x \prod_{1 \leq i < j \leq N} (x_i - x_j)^2 \prod_{j=1}^N e^{-x_j} \\ &= \frac{c_N^2 N!}{Z_{N,N}} \det(1 - K_N) \\ &= \tilde{c}_N \det(1 - K_N) \end{aligned} \quad (6.56)$$

となるが, $t \rightarrow \infty$ の極限で

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F_N(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \text{Prob}[H(N, N) \leq t] = 1 \quad (6.57)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \det(1 - K_N) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_{[t, \infty)^k} dx^k \det(K_k(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq k} = 1 \quad (6.58)$$

となるので $\tilde{c}_N = 1$, よって (6.47) を得る. $\square$

積分核 (6.49) は

$$K_N(x, y) = N \frac{\varphi_N(x)\varphi_{N-1}(y) - \varphi_N(y)\varphi_{N-1}(x)}{x - y} \quad (6.59)$$

とも書ける.

[証明] 4.4 の話で,

$$J_N = \begin{bmatrix} a_0 & b_0 & 0 & 0 & \cdots \\ b_0 & a_1 & b_1 & 0 & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & & b_{N-2} & a_{N-1} \end{bmatrix}, \quad (6.60)$$

$|v_N(x)\rangle = {}^t(p_0(x), p_1(x), \dots, p_{N-1}(x))$ とおくと, (4.18) から

$$J_N |v_N(x)\rangle = x |v_N(x)\rangle - b_{N-1} p_N(x) |N\rangle \quad (6.61)$$

が成り立つ. これと $|v_N(y)\rangle$ との内積をとると

$$\langle v_N(y) | J_N |v_N(x)\rangle = x \langle v_N(y) | v_N(x)\rangle - b_{N-1} p_N(x) p_{N-1}(y). \quad (6.62)$$

これで x と y を入れ換えたものもつくり, 辺々引くと, J_N が対称行列であることに注意すれば左辺は 0 で,

$$\sum_{n=0}^{N-1} p_n(x) p_n(y) = \frac{b_{N-1}(p_N(x) p_{N-1}(y) - p_N(y) p_{N-1}(x))}{x - y} \quad (6.63)$$

を得る. これを Christoffel-Darboux 公式と言う.

今の場合は $p_n(x) = (-1)^n L_n(x)$ であり, $L_n(x)$ の満たす 3 項間漸化式

$$n L_{n-1}(x) + (x - 2n - 1) L_n(x) + (n + 1) L_{n+1}(x) = 0 \quad (6.64)$$

から $b_{N-1} = N$ と分かるので (6.59) となる. $\square$

6.6 Laguerre 多項式の漸近形

次に $N \rightarrow \infty$ を考えるので Laguerre 多項式の漸近形が必要になるが, その求め方については [8] 等を見てもらうことにして詳細は省略する. Laguerre 多項式の漸近的な振舞いは $x \sim 4N$ の辺りで急激に変化し, おおざっぱには $0 < x < 4N$ で振動的, $x > 4N$ で減衰的, $x \sim 4N$ でそれらをつ

なぐようになっている。これから必要になるのは $x \sim 4N$ のところでの漸近形で,

$$\varphi_N(4N + 2^{\frac{4}{3}}N^{\frac{1}{3}}\xi) \sim \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}N^{\frac{1}{3}}} \text{Ai}(\xi) \quad (6.65)$$

$$\varphi_{N-1}(4N + 2^{\frac{4}{3}}N^{\frac{1}{3}}\xi) \sim \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}N^{\frac{1}{3}}} \text{Ai}(\xi) + \frac{2^{\frac{1}{3}}}{N^{\frac{2}{3}}} \text{Ai}'(\xi) \quad (6.66)$$

となっている。ここで $\text{Ai}(x)$ は Airy 関数である。Airy 関数は量子力学の WKB 近似で現れた事を思いだして欲しい。そのときは古典的に粒子の来られるところでの振動的な波動関数と、来られないところでの減衰的な波動関数をつなぐものとして出てきたのだが、Laguerre 多項式の漸近形が (6.65), (6.66) となるのも本質的に同じことである。

6.7 Tracy-Widom 分布関数

Laguerre 多項式の漸近形を積分核 $K_N(x, y)$ に入れてみると

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} 2^{\frac{4}{3}}N^{\frac{1}{3}}K_N(4N + 2^{\frac{4}{3}}N^{\frac{1}{3}}\xi, 4N + 2^{\frac{4}{3}}N^{\frac{1}{3}}\eta) \\ &= \frac{\text{Ai}(\xi)\text{Ai}'(\eta) - \text{Ai}(\eta)\text{Ai}'(\xi)}{\xi - \eta} := K_{\text{Airy}}(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (6.67)$$

となる事が分かる。よって

$$\lim_{N \rightarrow \infty} F_N(t = 4N + 2^{\frac{4}{3}}N^{\frac{1}{3}}s) = \det(1 - K_{\text{Airy}}) \quad (6.68)$$

を得る。ただし K_{Airy} は積分作用素で

$$(K_{\text{Airy}}f)(x) = \int_s^\infty K_{\text{Airy}}(x, y)f(y)dy \quad (6.69)$$

である。ここで (6.68) の右辺に現れた関数

$$F(s) = \det(1 - K_{\text{Airy}}) \quad (6.70)$$

は、Tracy-Widom 分布関数として知られる分布関数である。以上により

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Prob}[H(N, N) \leq 4N + 2^{\frac{4}{3}}N^{\frac{1}{3}}s] = F(s) \quad (6.71)$$

となることが示された。

また TASEP で原点を越えた粒子の数 $N(t)$ の確率分布で言えば,

$$N = \frac{t}{4} + 2^{\frac{4}{3}}N^{\frac{1}{3}}\xi \quad (6.72)$$

と置いて結局

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Prob}[N(t) \leq \frac{t}{4} + \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}} \xi t^{\frac{1}{3}}] = 1 - F(-\xi) \quad (6.73)$$

を得る。これを (6.2) と比較してみると、 $N(t)$ の揺らぎは $\sqrt{t}$ ではなく $t^{1/3}$ でスケールされ、確率分布は誤差関数ではなく Tracy-Widom 分布関数 $F(s)$ で記述されることが分かった。

(6.73) が、我々がこの章で目標としていたもので、Johansson が [18] で得た結果である。ASEP の dynamics に関連して $1/3$ という exponent が出てくるといのは厳密解、繰り込み群、数値計算といった様々な解析から分かっていたが、カレントという重要な量に関する確率分布がこのようにきちんと計算され、さらにそれがランダム行列理論の Tracy-Widom 分布関数に他ならないということは、(少なくとも筆者には) 非常な驚きであった。

6.7.1 Painlevé II の解による表示

関数 $F(s)$ は、Fredholm 行列式 (6.70) で定義されているが、実は次のような表示も持つことが知られている。

$$F(s) = \exp\left[-\int_s^\infty (x-s)u(x)^2 dx\right] \quad (6.74)$$

ただしここで $u(x)$ は Painlevé II 方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u = 2u^3 + xu \quad (6.75)$$

の解で、

$$u(x) \sim \text{Ai}(x), \quad x \rightarrow \infty \quad (6.76)$$

を満たすものである。

関数 $F(s)$ がこのような表示を持つことを発見したのは Tracy と Widom であり、関数 $F(s)$ が Tracy-Widom 分布関数と呼ばれるのはそのような事情からである [19]。Tracy-Widom 分布関数は最初ランダム行列理論で現れたのであるが、その後ランダムな置換を考えたときの longest increasing subsequence の問題を始め種々の組み合わせの問題にも現れることが見いだされ [20], ASEP のカレントに関する (6.73) もその発展の中で得られた結果である。

7 興味を持った人へ

このノートを読んで興味を持った人のために、このノートに関連していてかつ重要と思われる最近の話題を2つ挙げておく。

1. 非平衡定常状態における揺らぎ

平衡系において自由エネルギーは示量的であるが、非平衡系定常状態ではどうなっているのだろうか？という疑問を ASEP で調べてみると、やはり平衡系とは違うことが分かった、ということが [21] 等で議論されている。定常状態としては当然行列の方法で構成したものを使う。

2. ASEP の dynamics に関する2点相関関数等の計算

このノートではカレントの揺らぎの計算のみ紹介したが、当然他の量はどうなっているかにも興味がある。2点相関関数に関しては [22] 等で計算されている。

最後に厳密解ということを行わなければ、物理的には粒子間に引力等の相互作用が入っているモデルや、高次元 (2 次元, 3 次元) でもモデルの性質を調べる事が重要である。その場合にも ASEP のようなモデルは厳密解の得られる極限的な状況としての重要性があるであろう。

謝辞

まずこのようなマニアックな内容に関して講義をする機会を与えてくださった中央大学の香取眞理教授と、その際筆者の拙い講義に最後まで辛抱強く出席して下さった方々に心から感謝致します。このノートの内容に関しては、これまで多くの方々との議論して頂いた事を元を書いてあります。数が多くなるのでここに名前を挙げることはしませんが、議論の相手になって頂いた方々に深く感謝致します。また原稿を読んで分かりにくい点や誤植を指摘して下さった日永田泰啓氏、齊藤圭司氏、佐藤正寛氏、光藤哲也氏にお礼申し上げます。

参考文献

- [1] T. M. Liggett, *Interacting Particle Systems* (Springer-Verlag, New York, 1985).
[ASEP を含む無限粒子系についての基本的文献。数学の本.]
- [2] T. M. Liggett, *Stochastic Interacting Systems: Contact, Voter, and Exclusion Processes* (Springer-Verlag, New York, 1999).
[上記基本文献の続編。行列の方法についても記述あり.]
- [3] H. Spohn, *Large Scale Dynamics of Interacting Particles* (Springer-Verlag, New York, 1991).
[Part I と Part II に分かれていて、後半が確率的格子ガス模型について。物理的なことも数学的なことも書いてある.]
- [4] G. M. Schütz, *Exactly Solvable Models for Many-Body Systems Far from Equilibrium, in Phase Transitions and Critical Phenomena*, Vol 19, C. Domb and J. Lebowitz eds. (Academic, London, 2001).
[1 次元の解ける非平衡モデルを主題とした本.]
- [5] B. Schmittmann and R. K. P. Zia, *Statistical mechanics of driven diffusive systems, in Phase Transitions and Critical Phenomena*, Vol 17, C. Domb and J. Lebowitz eds. (Academic, London, 1994).
[厳密解には拘らず、面白い性質を示す格子ガス模型について書いてある.]

- [6] J. Krug and H. Spohn, Kinetic Roughening of Growing Surfaces in *Solids Far From Equilibrium*, C. Godrèche ed. (Cambridge University Press, Cambridge, 1992).
[ASEP と同じ universality クラスに入るモデルについて, 界面成長を中心に議論してある.]
- [7] S. Sandow and G. M. Schütz, *Europhys. Lett.* **26** (1994), 7-12.
- [8] G. Szegő, *Orthogonal Polynomials*, 4th ed., American Mathematical Society, Colloquium Publications No.23 (American Mathematical Society, Providence, 1975).
- [9] P. A. Deift, *Orthogonal Polynomials and Random Matrices: A Riemann-Hilbert Approach*, Courant Lecture Notes in Mathematics, 1999.
- [10] G. Gasper and M. Rahman, *Basic Hypergeometric Series* (Cambridge, Cambridge, 1990).
- [11] R. A. Askey and J. A. Wilson, *Memoirs Amer. Math. Soc.* **319** (1985).
- [12] T. H. Koonwinder, *q-Special Functions*, A Tutorial, math.CA/9403216
- [13] R. A. Askey and M. E. Ismail, *Memoirs Amer. Math. Soc.* **300** (1984).
- [14] B. Derrida, M. R. Evans, V. Hakim and V. Pasquier, *J. Phys. A* **26** (1993), 1493-1517.
- [15] T. Sasamoto, *J. Phys. A* **32** (1999), 7109; *J. Phys. Soc. Jpn.* **69** (2000), 1055-1067.
- [16] M. L. Mehta, *Random Matrices*, 2nd ed., (Academic Press, Boston, 1991)
- [17] R. P. Stanley, *Enumerative Combinatorics, volume 2*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1999)
- [18] K. Johansson, *Commun. Math. Phys* **209** (2000), 437-476.
- [19] C. A. Tracy and H. Widom, *Commun. Math. Phys* **159** (1994), 151-174.
- [20] J. Baik, P. Deift and K. Johansson, *J. Amer. Math. Soc.* **12** (1999), 1119-1178.
- [21] B. Derrida, J. L. Lebowitz and E. R. Speer, *Phys. Rev. Lett.* **87** (2001), 150601; *J. Stat. Phys.* **107** (2002) 599-634; cond-mat/0205353; cond-mat/0203161.
- [22] M. Prähofer and H. Spohn, In Sidoravicius Vladas, eds, *In and out of equilibrium*, vol. 51 of *Progress in Probability*, (2002) 185-204; *J. Stat. Phys.* **108** (2002), 1071-1106; cond-mat/0212519.