

4. $\text{He}^3 - \text{He}^4$ 混合液の有限温度におけるエネルギー スペクトル

東教大・理 宗 田 敏 雄

混合液の中にはボゾンによる素励起とフェルミオンの素励起とそれにボゾンとフェルミオンの密度のゆらぎによる相互作用がある。

系のハミルトニアンは

$$H = H_B + H_F + H_{FB} \quad (1)$$

で、こゝでボゾンの素励起の創生演算子 b_{λ}^{+q} 消滅演算子 b_{λ}^q とそのエネルギー ω_{λ}^q とし、 λ は第 1 分枝と第 2 分枝の純粹の He^4 での、混合液での He^4 の密度を持つ励起を表わすと、フェルミオンのそれを a_{μ}^{+q} 、 a_{μ}^q 及びエネルギーを ϵ_{μ}^q とする。但し、 μ は一対励起、零音波励起等のボゾン型励起を表わすとする。そうすると

$$H_B = \sum_{\lambda, q} \omega_{\lambda}^q b_{\lambda}^{q*} b_{\lambda}^q \quad (2)$$

$$H_F = \sum_{\mu, q} \epsilon_{\mu}^q a_{\mu}^{q*} a_{\mu}^q \quad (3)$$

また密度のゆらぎを ρ_q^B と ρ_q^F とすると ($\rho_q = \rho_{-q}^*$)、相互作用は

$$H_{FB} = \sum_q v_q \rho_q^B \rho_{-q}^F \quad (4)$$

v_q はボゾンとフェルミオン間相互作用ポテンシャルである。今この ρ_q も各々の素励起演算子で展開すると

$$\rho_q^B = \sum_{\lambda} (B_{\lambda}^{q*} b_{\lambda}^{q*} + B_{\lambda}^{-q} b_{\lambda}^{-q}) \quad (5)$$

$$\rho_q^F = \sum_{\mu} (A_{\mu}^{q*} a_{\mu}^{q*} + A_{\mu}^{-q} a_{\mu}^{-q}) \quad (6)$$

となる。こゝで B_{λ}^q 、 A_{μ}^q とかは展開係数である。(5)と(6)を(4)に代入して(1)の永年方程式を解くと、ボゾン・フェルミオンの合成系のエネルギー E^q が次の方程式の解として求まる¹⁾。

$$g(E^q) = 1 - v_q^2 \sum_{\lambda} \frac{2\omega_{\lambda}^q |B_{\lambda}^q|^2}{E^q - \omega_{\lambda}^q} \sum_{\mu} \frac{2\varepsilon_{\mu}^q |A_{\mu}^q|^2}{E^q - \varepsilon_{\mu}^q} = 0 \quad (7)$$

こゝで v_q の大きさを $T=0$ で He^3 の濃度 6.4% で合成系がようやく安定になる ($E^q < 0$ より $E^q = 0$ になる) 点と考えて Sum rule によってしめる²⁾。更に $|B_{\lambda}^q|^2$ の大きさを Sum rule を用いて第 1 分枝のエネルギー ω_1 と第 2 分枝のエネルギー ω_2 と構造因子 S_q で表わすと³⁾ 次の様になる。こゝで N_B はボゾン数, $\langle H \rangle_q$ は平均励起エネルギー $-q^2/2m S_q$ である。

$$|B_1^q|^2 / N_B = S_q (\omega_2 - \langle H \rangle_q) / (\omega_2 - \omega_1) \quad (8)$$

$$|B_2^q|^2 / N_B = S_q (\langle H \rangle_q - \omega_1) / (\omega_2 - \omega_1) \quad (9)$$

更に (7) の第 2 項のフェルミオンの項について, 粒子空孔の対励起が一番効くとして

$|A_{\mu}^q|^2 = 1$ と置き, $\varepsilon_{\mu}^q = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}}{m} + q^2/2m$ と置くと, 第 2 項は次の形になる。

$$\sum_{\mathbf{p}} \frac{2(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}}{m} + q^2/2m)}{E^q - (\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}}{m} + q^2/2m)} f_{\mathbf{p}} \equiv N_F I(q, T) \quad (10)$$

こゝに $f_{\mathbf{p}}$ は分布関数である。前述の v_q の大きさは

$$v_q^2 = m_B m_F S_F^c S_B^2 / N_c^F N_B \quad (11)$$

で与えられる。こゝに m は質量で S は等温音速で, 添字の c は He^3 の濃度が 6.4% を表わし, N は粒子数。

今, 合成系での純粋の時の第 1 分枝からのエネルギーのずれを Δ_1^q とすると, (7) 式に Δ_1^q を小さいとして

$$E^q = \omega_1^q + \Delta_1^q \quad (12)$$

を代入して Δ_1^q を求めると

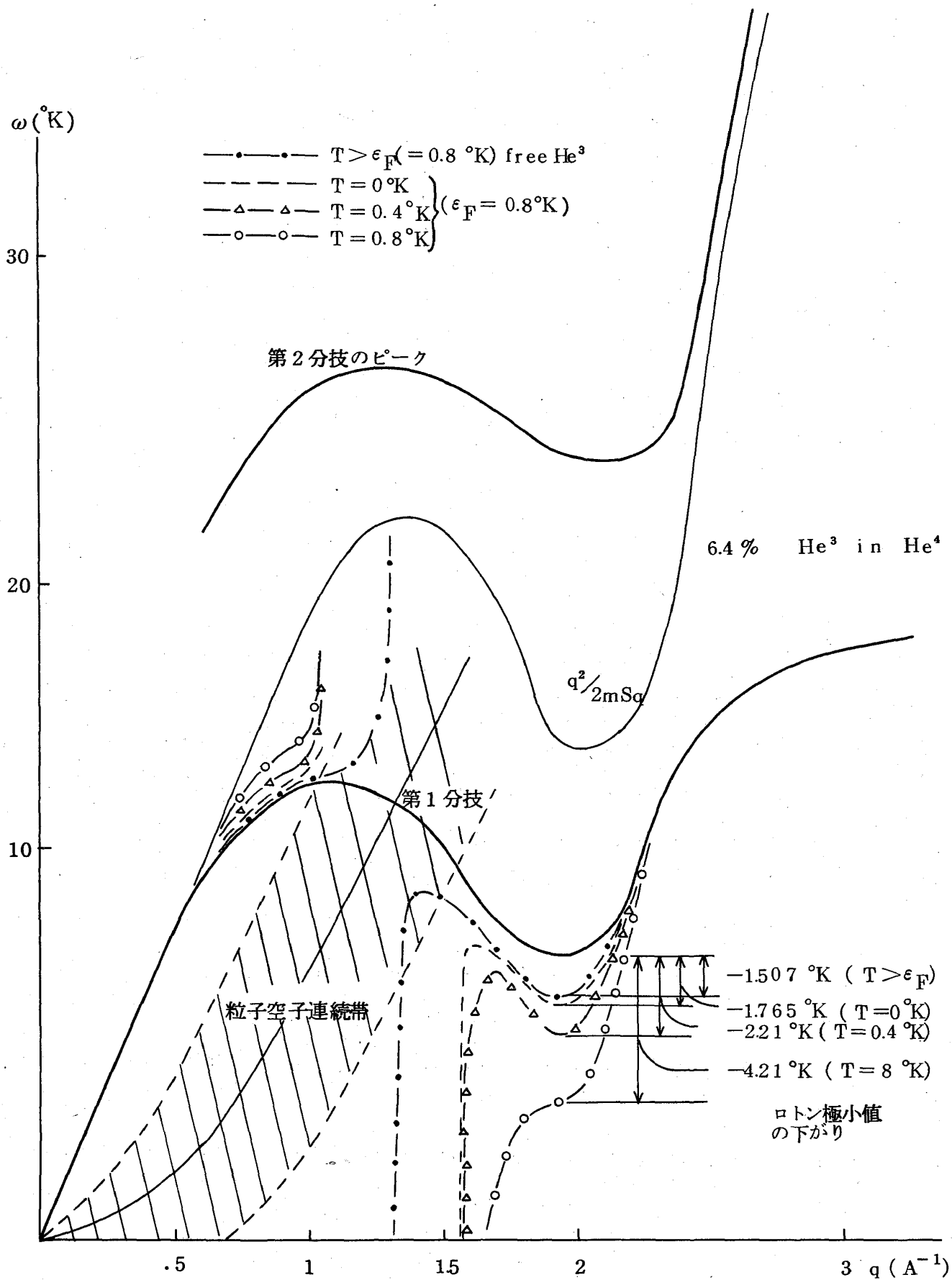
$$A_1^q = \frac{\frac{1}{2}m_F S_F^{c2} (S_B^c)^2 (N^F/N_c^F) I(q \cdot T) \frac{\omega_1^q}{\langle H \rangle_q} \frac{\omega_2 - \langle H \rangle_q}{\omega_2^q - \omega_1^q}}{1 + m_F S_F^{c2} (S_B^q)^2 (N^F/N_c^F) I(q \cdot T) \frac{\omega_2}{\langle H \rangle_q} \frac{\langle H \rangle_q - \omega_1}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \frac{1}{\omega_2 - \omega_1}} \quad (13)$$

となる。今 $T < \epsilon_F$ なら $I(q \cdot T)$ を Sommerfeld 展開を, $T > \epsilon_F$ で $q \gg p_F$ なら, フェルミスペクトルから He^3 の不純物スペクトルに移行して

$$\begin{aligned} I(q \cdot T) &\simeq \frac{1}{N_F} \sum_p e^{-\frac{\epsilon_p - \epsilon_F}{T}} \left(\frac{1}{\omega - q^2/2m_F} + \frac{1}{\omega + q^2/2m_F} \right) \\ &= \frac{1}{\omega - q^2/2m_F} + \frac{1}{\omega + q^2/2m_F} \end{aligned} \quad (14)$$

と置ける。6.4%の He^3 の濃度でフェルミ温度 $\epsilon_F = p_F^2/2m = 0.8^\circ\text{K}$ に対して $T = 0^\circ\text{K}$, 0.4°K , 0.8°K 及び $T \gg 0.8^\circ\text{K}$ での第1分枝のずれを図示すると第1図の様になる。 $T = 0.8^\circ\text{K}$ での大きなずれはフェルミ面のくずれ T が ϵ_F のオーダーで大きいことを示している。こゝではずれ A_1^q の1次のセツ動しか取らないが、もしくりこみを入れて高次のセツ動を入れると、ずれの曲線はいづれも連続帯の上下の境界曲線に接て来る筈である。

- 1) T.Nagata, T.Sode and K.Sawada, Prog.Theor. Phys. 38 (1967) 1023
- 2) T.Soda, K.Sawada and T.Nagata, Prog Theor, Phys. 44 (1970) 524
- 3) T Soda, K.Sawada and T.Nagata, Prog.Theor. Phys, 44 (1970) 860



第1図

宗田氏の研究報告に対する質疑応答

- 碓井氏 One Phonon branch と two phonon branch を独立に扱ってもよいのか？
- 宗田氏 互いに独立の素励起と して取扱って良い。
- 栗原氏 Soda - Sawada - Nagata の phase separation の仕事との関連はどうなっているか？
- 宗田氏 v_q として、そこで定められたものを用いた。
- 栗原氏 phase separation line を定める際に、unstable になった mode と今のものとの関連は、どうなっているのか？
- 宗田氏 前の仕事で、unstable になる mode は $\text{He}^3 - \text{He}^4$ 系の collective mode であって、今回は $\text{He}^3 - \text{He}^4$ 相互作用を入れることによって one-phonon branch のずれを計算 した。