

波面の幾何学

—その内的双対性と Gauss-Bonnet の定理への応用—

梅原 雅顕 (大阪大学・大学院理学研究科)*

概 要

数理解析研究所研究集会「可微分写像の特異点論とそれに関連する幾何学」(2009 年 12 月 7 日～10 日, 日本大学文理学部) で最近の筆者と佐治健太郎氏 (岐阜大学) と山田光太郎氏 (東京工業大学) との共同研究について講演をしました. その内容の発展として, 2010 年 3 月に慶應義塾大学で開催された春の数学会の企画特別講演用に, 筆者はアブストラクトを執筆したのですが, 紙数制限があって, 特に後半部分に詳しい解説を書くことができませんでした. この論説は, 学会のアブストラクトの後半部分に大幅な加筆を行い, より詳しい解説に仕上げたものです.

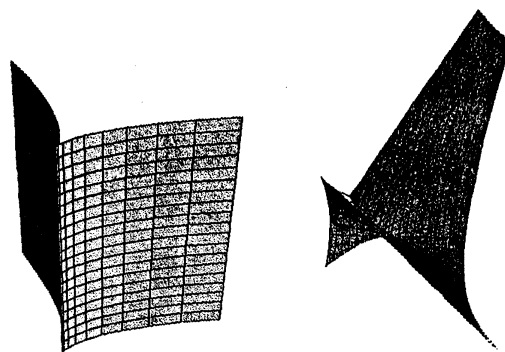


図 1: カスプ辺 (cuspidal edge) とツバメの尾 (swallowtail)

一般に, $\mathbf{R}^3$ 内の正則曲面を波面と思って, 曲面の単位法線ベクトル場 ν の方向への曲面の時間発展を考えると, t 時刻経過後の波面として平行曲面 $f_t := f + t\nu$ が得られ, 図 1 のような「カスプ辺」と「ツバメの尾」が現れます. 筆者は北大の泉屋氏のホロ球に立脚した双曲空間の曲面の幾何学に触発されて「3次元双曲型空間の平坦な曲面」に現れる特異点に興味を抱き, 東京電機大学の國分氏, 東工大の山田氏, 神戸大の Rossman 氏, 岐阜大の佐治氏等と行った共同研究 [15] が, この方面の研究を始めたきっかけです. ここでは, その後, 佐治氏, 山田氏と一緒に行った波面としての曲面あるいは超曲面に関する筆者等の最近の研究について紹介します. 特に, $\mathbf{R}^3$ の閉曲面に関する古典的な Gauss-Bonnet の定理の波面への拡張の内的定式化の帰結として, 閉じた波面に関する 2 つの Gauss-Bonnet 型の公式と, その Gauss 写像に関する 2 つの Gauss-Bonnet 型の公式と合わせて, 合計 4 個の独立な Gauss-Bonnet 型の公式を導きます. さらに, その応用について解説します.

*e-mail: umehara@math.sci.osaka-u.ac.jp

1. 波面と C^∞ -写像の特異点

n 次元多様体 M^n から $n+1$ 次元多様体 N^{n+1} への C^∞ -写像 $f: M^n \rightarrow N^{n+1}$ が、点 p に特異点をもつとは、点 p における写像の微分 $(df)_p$ の階数が n より小さくなることを云う。特に f が、 M^n 上で特異点を持たないことと「 f がはめ込み」であることは同値である。

定義 1 $n+1$ 次元多様体 N^{n+1} に Riemann 計量 g を与える。 C^∞ -写像 $f: M^n \rightarrow N^{n+1}$ が、波面であるとは、 f が以下の 2 つの性質を満たすことである。

- (1) f に沿う単位ベクトル場 ν が存在して、接空間の像 $df(TM^n)$ と ν とが直交する。(この ν は、 f の単位法線ベクトル場と呼ばれる。)
- (2) N^{n+1} の単位接束 (大きさ 1 の接ベクトルの全体) を T_1N^{n+1} とし、この ν を写像 $\nu: M^n \rightarrow T_1N^{n+1}$ とみなすと、はめ込みを与える。

注意 2 少し定義を弱めて C^∞ -写像 $f: M^n \rightarrow N^{n+1}$ について、任意の点 $p \in M^n$ に対して、適当な近傍 U が存在して f の U への制限が、この原稿の意味での波面になっている場合に波面とよぶことがある。この場合、 ν が大域的にとれるとき、余向き付け可能であるという。余向き付け可能性は、多様体 M^n の向き付け可能性とは独立の概念である。この立場では、この論説で扱う波面は、すべて余向き付け可能である。

(N^{n+1}, g) を $n+1$ 次元の Riemann 多様体とし、 $T_1^*N^{n+1}$ をその単位余接束とすると、 $T_1^*N^{n+1}$ には大域的に定義された接触 1 次微分形式 η が定まるが、 N^{n+1} の Riemann 計量 g を通して、 $T_1^*N^{n+1}$ は単位接束 T_1N^{n+1} と同一視できる。波面 f の単位法線ベクトル場の誘導する写像 $\nu: M^n \rightarrow T_1N^{n+1}$ は、Legendre はめ込みとなる。(はめ込み L が Legendre であるとは、 L による η の引き戻しが消えるときを云う。) この観点から云うと「波面とは、Legendre 部分多様体の射影である」ということができる。ここで、波面として 2 つの具体例を挙げよう。

例 1 (サイクロイド) 平面曲線 $\gamma(t) = a(t - \sin t, 1 - \cos t)$ ($a > 0$) は $t \in 2\pi\mathbb{Z}$ に特異点 (3/2-カusp点) をもつ。これは $\mathbb{R}^2$ 内の波面になっている。実際、単位法線ベクトル場は $\nu(t) := (\cos(t/2), -\sin(t/2))$ で与えられる。明らかに $\nu(t)$ の微分 $\dot{\nu}(t)$ は至る所消えないから $\gamma(t)$ は、平面曲線としての波面の例を与える。

例 2 (平行超曲面) 多様体 M^n からの はめ込み $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ が与えられたとする。いま M^n は向き付け可能であるとし、 M^n 上で大域的に定義された単位法線ベクトル場を ν とするとき、与えられた実数 t に対して $f_t := f + t\nu$ で定まる C^∞ -写像 $f_t: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ は、 f の平行超曲面とよばれ、波面となることが簡単にチェックできる。実際 ν は、すべての f_t に共通の単位法線ベクトルになっている。また f_t は、元の超曲面 f の像を波面と思ったとき、Huygens の原理にしたがって t 時間経過後に生ずる新たな波面を表す。波面 (wave front, front) という命名は、この現象と関係がある。元の超曲面 f に特異点がなくても f_t には

特異点が現れる可能性がある。図2は、楕円の平行曲線である。この場合4つのカस्प点が生ずる。

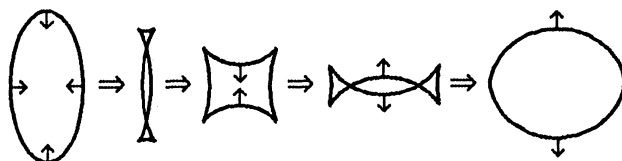


図 2: 楕円の平行曲線

C^∞ -写像 $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ が波面であったとすると、 f と $\mathbb{R}^{n+1}$ の微分同相写像との合成写像もまた、波面となる。このように、波面は「はめ込み」より緩やかな特異点を許容する超曲面のクラスとして自然な概念である。

2. A_{k+1} 特異点

$k \geq 1$ を自然数とする。 A_{k+1} の特異点の定義を与える前に、特異点の間の写像芽としての同値関係を与えておこう。

定義 3 いま $p, q \in \mathbb{R}^n$ の近傍をそれぞれ U, V とし、その上の2つの C^∞ -写像

$$f: (U, p) \rightarrow (\mathbb{R}^{n+1}, f(p)), \quad g: (V, q) \rightarrow (\mathbb{R}^{n+1}, g(q))$$

が(写像芽として)右左同値であるとは、 U から V の近傍への $\mathbb{R}^n$ 上の局所微分同相写像 φ と、 $f(p)$ の近傍から $g(q)$ の近傍への $\mathbb{R}^{n+1}$ 上の局所微分同相写像 Φ が存在し、 $\Phi \circ f = g \circ \varphi$ を満たすときを云う。この関係を $f \sim g$ で表す。

f が波面で $f \sim g$ ならば g も波面となるので、この写像芽の同値関係は波面のカテゴリーとも相性がよい。この事実に注意して、 $k = 1, 2, 3, \dots$ のとき

$$f_k(t, x_2, \dots, x_n) := \left((k+1)t^{k+1} + \sum_{j=2}^k (j-1)t^j x_j, -(k+2)t^{k+1} - \sum_{j=2}^k j t^{j-1} x_j, x_2, \dots, x_n \right)$$

で定まる C^∞ -写像を考える。 f_k は原点に特異点をもつ。そこで、この写像の原点における写像芽と右左同値である C^∞ -写像の特異点のことを A_{k+1} 特異点とよぶ。まず、この写像 f_k の像は、多項式

$$P(t, x) := x_0 + x_1 t + x_2 t^2 + \dots + x_k t^k + t^{k+2}$$

が多重根をもつような係数の集合と一致する、但し $x = (x_0, \dots, x_k)$ とする。つまり

$$\text{Im}(f_k) = \left\{ x \in \mathbb{R}^{k+1}; t \in \mathbb{R} \text{ が存在し } P(t, x) = \frac{\partial P}{\partial t}(t, x) = 0 \text{ が成り立つ.} \right\}$$

と表される。

(A_2 -特異点) $k = 1$ のとき

$$f_1(t, x_2, \dots, x_n) = (2t^3, -3t^2, x_2, \dots, x_n)$$

であるから, f_1 の像は (つまり A_2 特異点とは), $3/2$ -cusp と $\mathbb{R}^{n-1}$ の直積である. 特に $n = 1$ (つまり平面曲線) のときは, サイクロイドに現れる特異点 $3/2$ -cusp と同値であり, $n = 2$ のときはこの原稿の最初のページの左側の図「cuspidal edge」と同値である.

(A_3 -特異点) $k = 2$ のとき

$$f_2(t, x_2, \dots, x_n) = (3t^4 + t^2x_2, -4t^3 - 2tx_2, x_2, \dots, x_n)$$

であるから, f_2 の像は, (つまり A_3 特異点とは), ツバメの尾と $\mathbb{R}^{n-2}$ の直積である. 特に $n = 2$ (つまり空間内の曲面) のときは, A_3 特異点は原稿の最初のページの右側の図「ツバメの尾」と同値である.

3. A_{k+1} 特異点の判定法

特異点の判定は, 局所的な話なので U を $(\mathbb{R}^n, u_1, \dots, u_n)$ の領域とし, 波面 $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ を考える. ここで $\nu : U \rightarrow S^n$ を, U 上における f の単位法線ベクトル場とする. いま

$$f_{u_j} := \frac{\partial f}{\partial u_j} \in \mathbb{R}^n \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

を列ベクトルとみなして, 行列式で定まる U 上の実数値関数

$$\lambda := \det(f_{u_1}, \dots, f_{u_n}, \nu)$$

を考える. これは超曲面としての f の体積密度関数であるが, U 上における f の特異点は, ちょうど λ の零点に対応する.

定義 4 波面 f の特異点 $p \in U$ (つまり $\lambda(p) = 0$) が, 非退化 (non-degenerate) であるとは, 外微分 $d\lambda$ が点 p で消えないときを云う.

点 p が非退化であると, 陰関数定理により, 定義域 U において, f の特異点の集合 Σ_f は, U 内に埋め込まれた超曲面となる. これを, 特異超曲面 (singular hypersurface) とよぶ.

いま, 必要ならば定義域 U を縮小して Σ_f 全体が U 内に埋め込まれた超曲面であるとして一般性を失わない. このとき, 各 $q \in \Sigma_f$ について, 零でない接ベクトル $\eta_q \in T_q U$ が, 定数倍を除いて一意的に存在し, $df_q(\eta_q) = 0$ を満たす. このベクトルを, 点 q における退化ベクトル (null vector) とよび, その方向を退化方向 (null direction) という. また, 各特異点に対して, 退化方向を与える滑らかな切断 $\eta : \Sigma_f \ni q \mapsto \eta_q \in T_q U$ のことを (Σ_f に沿う) 退化ベクトル場という. このようなベクトル場は (零点をもたない) 関数倍を除いて一意的に定まる. 我々の得た判定条件は以下のように述べられる.

定理 5 ([15],[25]) $f: U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ を波面とし, $p \in U$ を非退化な特異点とする. また η を退化ベクトル場とし, $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{n-1})$ を, 特異超曲面 Σ_f の tangent frame field とする. 各 $\mathbf{v}_j$ を, Σ_f に沿う定義域 U 上のベクトルとみなして

$$\mu := \det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \eta) \quad (1)$$

によって Σ_f 上の C^∞ -関数を定義すると, 以下の主張が成り立つ.

- (1) p が A_2 特異点であるための必要充分条件は $\mu(p) \neq 0$ となること, つまり, 退化方向が Σ_f に横断的であることである.
- (2) p が A_3 特異点であるための必要充分条件は $\mu(p) = 0$ かつ $d\mu_p(\eta) \neq 0$ が成り立つことである¹.

この主張は $n = 2$ のとき, つまり $\mathbb{R}^3$ の曲面に現れる A_2, A_3 型の特異点に対して与えた判定条件 [15] の一般化である. さらに, 一般に A_{k+1} 特異点の判定法もほぼ似たような記述の方法で与えることができる (文献 [25]). これらの特異点の判定法の利点は, 「内的」であること, つまり, 写像の定義域における特異点集合の情報のみから判定している点である. 後で, 波面の内的な定式化を行う際には, 外の空間が存在しないので, 逆に, この定理における判定条件を, 内的な A_2 あるいは A_3 特異点の定義として採用する. 2次元多様体から $\mathbb{R}^3$ への C^∞ -写像に頻繁に現れる特異点として, 図3の Whitney の傘 ($f(u, v) := (u^2, u, uv)$ が典型例で交叉帽子ともよばれる) が有名だが, 近づく方向によって, 単位法線ベクトルの極限が異なるため, 波面にはならない.

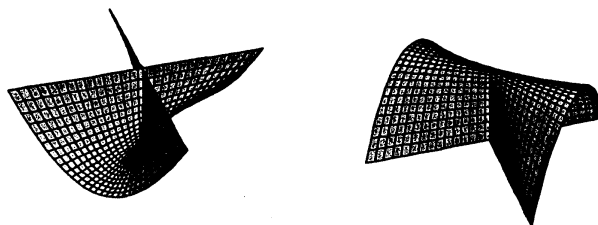


図 3: Whitney の傘

4. 特異曲率

ここでは, $\mathbb{R}^3$ の波面としての曲面に特異点として現れるカスプ辺 (A_2 -特異点) に新しい曲率の概念を定義することを考える. 具体的には図4の左のカスプ辺が負曲率となり, 右のカスプ辺が正曲率となるような「特異曲率」という不変量を導入する. ここで述べたことは, 少しの修正で, 外の空間を任意の3次元Riemann多様体の場合に拡張することができる ([23]). より一般に超曲面としての波面についても, 特異曲率の一般化として「特異主曲率」が定義され, 曲面の場合はその

¹ここで $\mu(p) = 0$ であることから $\eta_p \in T_p v$ となり $d\mu_p(\eta)$ が定義可能であることに注意.

特別な場合と考えることができるが ([27]), 今回の話の中心である Gauss-Bonnet の定理は, 今のところ曲面の場合しかできていないので, ここでは 2 次元の波面に限定して話を進める.

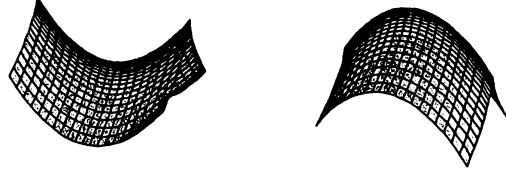


図 4: 負と正のカスプ辺

U を uv -平面 $\mathbb{R}^2$ の領域とし, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ を波面, ν をその単位法線ベクトル場とする. いま

$$\lambda := \det(f_u, f_v, \nu) \quad (2)$$

によって U 上の実数値関数を定義し, これを符号つき面積密度関数とよぶ. 関数 $\lambda(u, v)$ の零点が, 写像 $f(u, v)$ の特異点に対応する. $p \in U$ を非退化な特異点とする. 非退化な特異点の (充分小さな) 近傍 U で, 特異点集合 $\{\lambda = 0\}$ は正則曲線となる. これを 特異曲線 と呼ぶ. この特異曲線に沿って, 退化ベクトル場 (すなわち, 至る所消えない滑らかな退化方向の場合) $\eta(t)$ をとることができる.

いま, 特異点集合として $\gamma(t)$ 上には, カスプ辺以外の特異点は現れないと仮定する. すると, 定理 5 により, 退化方向と特異方向が横断的となるので, 特にカスプ辺の像としての空間曲線 $\hat{\gamma}(t) := f(\gamma(t))$ は, 正則曲線になることがわかる. また, 退化方向と特異方向が異なること, 特異曲線が関数 λ の等高線であることに注意すると, 関数 λ の η 方向の方向微分 $\lambda_\eta := d\lambda(\eta)$ は零にならないことがわかる. そこでその符号 $\text{sgn}(\lambda_\eta)$ が定義できる. いま, 退化方向の滑らかなベクトル場 $\eta(t)$ を, $(\dot{\gamma}(t), \eta(t))$ が, U の自然な向きに同調するようにとる. このとき,

$$\kappa_s := \text{sgn}(\lambda_\eta) \frac{\det(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \nu)}{|\dot{\gamma}|^3} \quad (3)$$

によって定義される値を, カスプ辺 $\hat{\gamma}(t)$ 上の特異曲率という. 実際, ここで幾何学的な意味を考えると

$$\text{sgn}(\lambda_\eta) = \begin{cases} 1 & (\gamma \text{ の左側が } \lambda > 0 \text{ のとき}), \\ -1 & (\gamma \text{ の左側が } \lambda < 0 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (4)$$

となる. もしも $\hat{\gamma}(t)$ が, 正則曲面上の単なる正則曲線の場合には $\det(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \nu)/|\dot{\gamma}|^3$ は, 曲線 $\hat{\gamma}(t)$ の測地的曲率に他ならない. この意味で, 特異曲率とは, 「測地的曲率の極限に, 適当な符号をつけて調節したもの」と考えることができる. これは, 以下の意味でカスプ辺の不変量と考えることができる.

命題 6 ([23]) 特異曲率 κ_s は, U の向き, 単位法線ベクトルの取り方, 特異曲線の向きに依存しない. また $\mathbf{R}^3$ の平行移動と回転, 折り返しで値を変えない.

特異曲線の像 $\hat{\gamma}(t)$ を曲面上の曲線と考えたとき, $\hat{\gamma}(t)$ の接方向と曲面の法線方向に直交する方向を, 余法線方向 (co-normal) という. $\hat{\gamma}(t)$ はカスプ辺なので, そこで曲面が折れているわけであるが, 曲面が折れている側の余法線方向を正の余法線方向とよぶことにすると,

「特異曲率は, 正の余法線方向に関する曲面 f 上の $\hat{\gamma}(t)$ の測地的曲率である」という意味づけを与えることが可能である. したがって, その形状は $\kappa_s > 0$ ならば丸みを帯びた刃物のようになり, $\kappa_s < 0$ ならば, 反り返った刃物のようになることを数学的に示すことができる (図 4).

M^2 を向きづけられた 2 次元多様体とし, さらに, 波面を与える C^∞ -写像 $f: M^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ を考える. M^2 の局所座標系 $(U; u, v)$ で, 多様体の向きに同調したものをとる. U 上に現れるカスプ辺に特異曲率が定義されて, 命題 6 により, それは向きに同調した局所座標系の取り方によらない. また,

$$dA := |\lambda| du \wedge dv \quad (5)$$

を波面の面積要素とよぶ. これも局所座標の取り方によらない. M^2 がコンパクトで境界をもたない 2 次元多様体のとき, f がカスプ辺とツバメの尾しかもたなかったとすると

$$\int_{M^2 \setminus \Sigma_f} K dA + 2 \int_{\Sigma_f} \kappa_s d\tau = 2\pi \chi(M^2) \quad (6)$$

が成り立つ. ここで $\chi(M^2)$ は M^2 の Euler 数である. また K は曲面の正則点における Gauss 曲率とし, $d\tau$ は, 特異曲線上の線素とする. これは Kossowski [14] により 2002 年に示された波面に関する Gauss-Bonnet 型の定理であるが, 特異曲率が曲面の位相に深く関わっているのがわかるだろう². 実際, 三角形分割を行って, Gauss-Bonnet の定理を証明する際に, 特異点集合が, 辺や頂点になるように分割を行う. 本来, すべての三角形からの曲率の寄与を足し合わせる際, 三角形の辺を挟んで, 左側の領域と右側の領域で, 辺の向きが異なるため, 測地的曲率の寄与が打ち消し合う. しかし, 辺がカスプ辺からなる場合には, 像においては, 値域における特異曲線の右側と左側の像は, 共に同じ側に貼り付いているため, 向きが異なるにも関わらず, 測地的曲率が一致し, 足し合わせる際に 2 倍となって特異曲率の積分として残る, という仕組みである. この際, ツバメの尾はカスプ辺が折れ曲がっているわけだが, その折れ曲がった一方の側から見ると, π だけ左に折れ曲がっているように見えるとする. すると, 反対側を左に見るように, 特異曲線の向きを逆転させると, もう一方の側は右に π だけ折れ曲がっているように見える. したがって, 両者の寄与が互いに打ち消しあうのである. この公式から, 我々の特異曲率の符号の選び方は, ごく自然なものであることもわかる.

²但し, Kossowski 氏は $\kappa_s d\tau$ を 1-form として扱っているため, 特異曲率は定義していない.

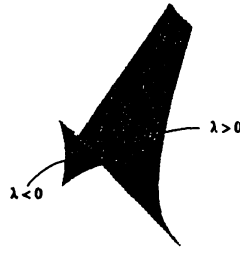


図 5: 正のツバメの尾 (この図では, 特異点集合の像としてのカスプの鋭角の側が $\lambda < 0$)

それでは, 面積要素を選ぶとき dA ではなく $d\hat{A} := \lambda(u, v)du \wedge dv$ を考えたらどうなるであろうか. この $d\hat{A}$ を符号つき面積要素という. この面積要素に関する Gauss 曲率の全積分を考えると, 今度はカスプ辺の両側で特異曲率が打ち消し合う. しかし, 今度はツバメの尾では, 先ほど打ち消し合う原理が逆に働いて, その情報が積分公式に残留する. 残留する際, ツバメの尾の特異曲線が, λ が正の部分集合

$$M_+ := \{p \in M^2; dA_p = d\hat{A}_p\} = \{p \in M^2; \lambda(p) > 0\}$$

の側に折れ曲がっているのか, または, 負の部分集合

$$M_- := \{p \in M^2; dA_p = -d\hat{A}_p\} = \{p \in M^2; \lambda(p) < 0\}$$

の側に折れ曲がっているのか, によって, 角度の和に差異が生じて, 以下のような式となる.

$$2\deg(\nu) = \frac{1}{2\pi} \int_{M^2 \setminus \mathcal{L}_f} K d\hat{A} = \chi(M_+) - \chi(M_-) + \#S_+ - \#S_- \quad (7)$$

ここで $\deg(\nu)$ は波面 f の Gauss 写像 $\nu: M^2 \rightarrow S^2$ の写像度を表す. 特にツバメの尾の数が偶数個であることがわかる. この式は Langevin-Levitt-Rosenberg [17] により 1995 年に指摘された³. ここで S_+ (S_-) は正 (負) のツバメの尾の数である. ツバメの尾はカスプ辺が折れ曲がった形をしており, この特異点付近で曲面が自己交叉するのだが, その自己交叉する側の裏側に対応する定義域の領域が $\lambda > 0$ となるときの正のツバメの尾といい (図5をみよ), そうでないとき負のツバメの尾という. 2つの Gauss-Bonnet 型の公式は, 曲面が特異点を持たない場合には古典的な Gauss-Bonnet の公式として一致する.

Gauss-Bonnet の定理は元来, 内的なものである. この論説の第6節で, 内的な波面の定式化を行い, その波面としての実現問題と, 波面の Gauss-Bonnet の定理の内的な定式化について述べる.

5. 特異点付近での Gauss 曲率の振る舞い

筆者等は, 特異曲率の基本的な性質として, 以下の3つの定理を得た.

³但し彼らは指摘しただけで, 最初の証明は Kossowski [14] が与えた.

定理 7 ([23]) R^3 の曲面に現れるカスプ辺が, (ツバメの尾などの) 別の非退化な特異点につながっているとき, 特異曲率は, 負の無限大に発散する.

この結果の超曲面への一般化は [27] に記されている.

(証明の概略) 本当の証明は計算を要するが, ここでは直観的な説明をする. 特にツバメの尾付近での特異曲率の振る舞いを観察しよう. ツバメの尾は, カスプ辺がカスプした状態と解釈される. 平面曲線では $3/2$ -カスプ付近で曲率関数が発散することが知られている. 我々の状況では, ツバメの尾の特異曲線は空間曲線であるが, 微少な範囲で考えると形としては, 平面曲線上の $3/2$ -カスプと非常に近い形をしている. 実際, ツバメの尾を法線に直交する平面に射影すると $3/2$ -カスプが得られる. したがって, 特異曲率が発散することは, これで説明がつく. 負に発散するのは, ツバメの尾はカスプ辺が折れている側に曲面が貼り付いていることと, 先ほどの特異曲率の形状的特徴づけを用いれば, 明らかであろう.

また, 以下が示せる. いま空間曲線 $\hat{\gamma}$ に対して, 各点 $\hat{\gamma}(t)$ において接線ベクトルと主法線ベクトルによって張られる平面を, 空間曲線の接触平面という. 雑な言い方をすると, 接触平面とは「 $\hat{\gamma}$ を最もよく近似する平面曲線を含む平面」と解釈される. これとは別に, もしも $\hat{\gamma}(t)$ が, 波面の特異点集合ならば, この各点で, 曲面の法線方向に直交する平面が定まる. この平面を, 特異点における接平面という. このとき次が成り立つ.

定理 8 ([23]) R^3 の曲面に現れるカスプ辺 $\hat{\gamma}(t)$ 付近で, もしも Gauss 曲率が有界ならば, $\hat{\gamma}$ の接触平面と (曲面の) 接平面は一致する. 一方, 接触平面と接平面が一致しないとき, $\hat{\gamma}$ を挟んで, 一方の側は, Gauss 曲率が $+\infty$ へ発散し, もう一方の側は $-\infty$ に発散する.

(証明の概略) ここでも直観的な説明を行う. 実際, 接触平面と接平面が一致しなかったとせよ. すると, $\hat{\gamma}$ は接平面の上側か下側のどちらかに横たわることになる. 一方, 特異曲線に直交する平面で, 曲面を切った切り口は, その平面上の $3/2$ -カスプになるので, 曲線の (余法線方向に関して) 曲がる方向は, 特異点を挟んで逆向きである. 一方, $\hat{\gamma}$ の曲がり方は, 接平面に対して同じ側なので, Gauss 曲率は, 特異曲線を挟んで異符号であることがわかる. (図 6 は, そのようなカスプ辺の例である. 同じ曲面を 2 つのアンクルから捉えている.) さらに, この切り口の $3/2$ -カスプの平面曲線としての曲率は無限大に発散することから, $\hat{\gamma}$ の両側で, Gauss 曲率が発散することもわかる.

定理 9 ([23]) R^3 の波面に現れるカスプ辺の付近で, Gauss 曲率の下限が正 (Gauss 曲率が非負) ならば, 特異曲率は負 (非正) となる.

この定理の証明は簡単ではない. しかし, 図 7 の曲率が正で一定の曲面と平坦な波面 (つるまき線の接線曲面) の絵を見れば定理の意味が納得できると思う. この結果の超曲面への一般化も [27] で示されている.

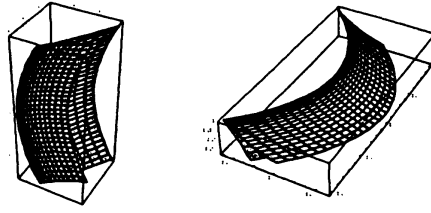
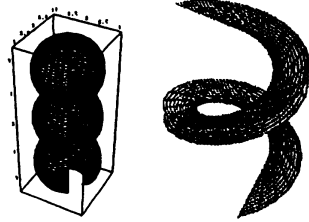


図 6: Gauss 曲率が非有界なカスプ辺

図 7: $K = 1$ なる回転面とつまき線の接線曲面

6. 内的定式化

波面の内的な定式化として、以下のように連接接束を定義する.

定義 10 M^n を n 次元多様体とし, TM^n をその接束とする. また, E を M^n 上の階数 n のベクトル束とする. また, E 上に内積 $\langle, \rangle$ と内積と両立する接続 D が存在しており, さらにベクトル束としての準同型写像 $\varphi: TM^n \rightarrow E$ が与えられているとせよ. このとき組 $(E, \varphi, \langle, \rangle, D)$ が連接接束 (coherent tangent bundle) であるとは, M^n 上の任意のベクトル場 X, Y に対して条件

$$D_X \varphi(Y) - D_Y \varphi(X) - \varphi([X, Y]) = 0 \quad (8)$$

が満たされるときを云う.

$(E, \varphi, \langle, \rangle, D)$ を連接接束とするとき, ベクトル束 E の内積の接束への引き戻し

$$ds_\varphi^2 := \varphi^* \langle, \rangle \quad (9)$$

を第一基本形式あるいは φ -計量とよぶ. これは, M^n 上の半正定値な対称共変テンソルとなるが, これが正定値となる点を φ -正則点 (あるいは単に正則点) といい, そうでないとき, φ -特異点 (あるいは単に特異点) という. ここで, 特異点の全体を Σ_φ で表す. 条件 (8) は, 接続 D の φ による引き戻しが, $M^n \setminus \Sigma_\varphi$ 上の Riemann 計量 ds_φ^2 の Levi-Civita 接続になっていることを意味する. この意味で連接接束は, Riemann 多様体の一般化とみなすことができる. 最近の筆者等の論文 [18] では, 連接接束の概念を用いて, 共形的に平坦な多様体の双対性を記述する枠組みを与えている. (実際, 共形的に平坦な計量に同伴する双対計量は半正定値になる.) 具体例を挙げよう.

例 3 M^n を n 次元多様体とし, (N^n, g) を同じ次元の Riemann 多様体とする. C^∞ -写像 $f: M^n \rightarrow N^n$ は, 以下のように連接接束を誘導する. まず, $E := f^*TN^n$ を N^n の接束 TN^n の f による引き戻しとする. すると, g から E に内積 $\langle, \rangle$ が誘導される. また g の Levi-Civita 接続の f による引き戻しは, 内積と両立する. いま $\varphi := df: TM^n \rightarrow E$, とおくと, これは M^n 上の連接接束の構造を与える.

例 4 (N^{n+1}, g) を $(n+1)$ -次元の Riemann 多様体とする. 波面 $f: M^n \rightarrow N^{n+1}$ が与えられているとせよ. ν を f の単位法線ベクトル場とすると, N^{n+1} の接束の M^n への引き戻し f^*TN^{n+1} において ν に直交するベクトルからなる M^n 上のベクトル束 E を考える. つまり $E := \{v \in f^*TN^{n+1}; \langle v, \nu \rangle = 0\}$ とおく. このベクトル束には g から誘導される内積 $\langle, \rangle$ が存在する. また (N, g) の Levi-Civita 接続の ν に直交する成分を取り出すことで E に $\langle, \rangle$ に両立する接続がとれる. このとき, ベクトル束の準同型 $\varphi: TM^n \ni X \mapsto df(X) \in E$ により $(E, \varphi, \langle, \rangle, D)$ は連接接束となる.

例 5 $(N^{n+1}(c), g)$ を $(n+1)$ -次元の (単連結かつ完備な) 定曲率空間とする. 波面 $f: M^n \rightarrow N^{n+1}(c)$ が与えられているとせよ. ν を f の単位法線ベクトル場とすると, 上述の写像 φ とは別にベクトル束の準同型 $\psi: TM^n \ni X \mapsto D_X \nu \in E$ が定まる. すると $(E, \psi, \langle, \rangle, D)$ も連接接束となる. 2つの準同型写像 φ と ψ との間には以下の対称性が成り立つ. (これは, 部分多様体論における第二基本形式の対称性と同等の条件である.)

$$\langle \varphi(X), \psi(Y) \rangle = \langle \varphi(Y), \psi(X) \rangle \quad (X, Y \in TM^n) \quad (10)$$

また 「 ν が単位余接束 T_1N^{n+1} へのはめ込みである」という条件は

$$\text{Ker}(\varphi) \cap \text{Ker}(\psi) = \{0\} \quad (11)$$

なる条件に翻訳される. 本論説のタイトルにある「内的双対性」とはこの φ と ψ との双対性のことである. φ に対する条件 (8) は, Levi-Civita 接続の条件に対応するが ψ に関する同じ条件は Codazzi の方程式の書き換えである. このように, 意味は違うのであるが, 2つの準同型写像は共通の性質を有している.

この 2つの準同型の存在は以下のように波面の特徴づけを与える. 次が成り立つ.

定理 11 [27] $(E, \varphi, \langle, \rangle, D)$ を連接接束とし, φ とは別にベクトル束の準同型写像 $\psi: TM^n \rightarrow E$ が存在し, $(E, \psi, \langle, \rangle, D)$ も連接接束であり, さらに 2つの条件 (10) と (11) を満たしており, しかも以下の Gauss 方程式

$$\langle R^D(X, Y)\xi, \zeta \rangle = c \det \begin{pmatrix} \langle \varphi(Y), \xi \rangle & \langle \varphi(Y), \zeta \rangle \\ \langle \varphi(X), \xi \rangle & \langle \varphi(X), \zeta \rangle \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \langle \psi(Y), \xi \rangle & \langle \psi(Y), \zeta \rangle \\ \langle \psi(X), \xi \rangle & \langle \psi(X), \zeta \rangle \end{pmatrix},$$

が成立していたとする, 但し R^D は, 接続 D の曲率テンソルとし $X, Y \in T_p M^n$, $\xi, \zeta \in E_p$, $p \in M^n$ は任意の点とする. このとき, 波面 $f: M^n \rightarrow N^{n+1}(c)$ が存在し, $\varphi = df$, $\psi = d\nu$ を満たす.

上の定理は「曲面論の基本定理」に相当する内的波面の実現定理であるが, 証明は動標構を用いて, 超曲面の場合とほぼ同様に示される. 先に述べた φ と ψ との内的双対性は, 外的には f とその単位法線ベクトル場 ν との双対性に対応する. 外的な立場でのこの双対性の接触幾何的な定式化が泉屋 [9] および [5] で与えられている. (言い換えると筆者等の内的双対性は泉屋氏の双対性の内的な対応物である.) また, これに伴う, ある種の平坦な曲面の双対性等が [11] で与えられている.

7. 内的な Gauss-Bonnet の定理の定式化

M^2 をコンパクトで向き付けられた 2 次元多様体とする. また $(E, \varphi, \langle, \rangle, D)$ を M^2 上の連接接束とし, E は (ベクトル束として) 向き付け可能であるとする. つまり M^2 から $E^* \wedge E^*$ への大域的な C^∞ -section μ で, E の正規直交枠 e_1, e_2 に対して $\mu(e_1, e_2) = \pm 1$ となるものが存在すると仮定する.

φ の特異点 $p \in M^2$ が非退化であるとは p のまわりの M^2 の向きに同調した局所座標系 $(U; u, v)$ 上で $\lambda := \mu(\partial/\partial u, \partial/\partial v)$ とおくとき, 外微分 $d\lambda$ が点 p において零でないときを云う. いま, $p \in M^2$ は ψ の非退化な特異点であるとする. すると点 p 付近で φ の特異点集合は M^2 上の正則曲線となる. それを $\gamma(t)$ ($t \in I$) で表す. ここで I は $t = 0$ を含むある開区間とし, $p = \gamma(0)$ とする. このとき, p に充分近い特異点はすべて非退化となるので, 各 t に対して, $\text{Ker}(\varphi)$ の元 $\eta(t)$ が存在して t に関して滑らかにできる. もしも $\dot{\gamma}(0)$ と $\eta(0)$ とが一次独立であるなら, $p = \gamma(0)$ は A_2 特異点であるという. また, A_2 特異点でなく, さらに uv -座標平面において

$$\left. \frac{d}{dt} \det(\dot{\gamma}(t), \eta(t)) \right|_{t=0} \quad (12)$$

が零でないとき A_3 特異点とよぶ. この定義は定理 5 のカスプ辺とツバメの尾の判定条件に立脚したもので, 連接接束 E が波面から誘導されたものであるときには, A_2, A_3 特異点は, それぞれこれはカスプ辺とツバメの尾に対応する. また曲面間の写像から誘導された場合には A_2, A_3 -特異点は, それぞれ折り目とカスプである. このように, 内的に同じ条件でも, 外の空間の違いによって別の特異点が現れる. 内的に波面を定式化すると, 異なる特異点を統一的に扱えるという利点がある.

波面あるいは曲面間の写像に生ずる A_2, A_3 -特異点以外の種々の特異点の判定条件については [12] と [22] を参照されたい. $\gamma(t)$ を, M^2 上の非退化な特異点を通る特異曲線とする. さらにすべての $t \in I$ に対して A_2 特異点であると仮定しよう. A_2 特異点の定義から $\dot{\gamma}(t)$ ($\dot{} = d/dt$) は, 退化方向と一致しないため $\varphi(\dot{\gamma}(t)) \neq 0$ である. いま $\gamma(t)$ に沿うベクトル束 E への大きさ 1 の断面 $\mathbf{n}(t)$ of E をとり $\{\varphi(\dot{\gamma})/|\varphi(\dot{\gamma})|, \mathbf{n}\}$ が, $\mu(\varphi(\dot{\gamma})/|\varphi(\dot{\gamma})|, \mathbf{n}) > 0$ を満たすようにすることが



図 8: 同じ内的特異点に対応する特異点の例

できる. (この $\mathbf{n}(t)$ は, $\varphi \circ \gamma(t)$ の E における向きに同調した単位法線ベクトル場と見なすことができる.) このとき

$$\kappa_\varphi(t) = -\text{sgn}(d\lambda(\eta(t))) \frac{\langle D_{\dot{\gamma}(t)} \mathbf{n}(t), \varphi(\dot{\gamma}(t)) \rangle}{|\varphi(\dot{\gamma}(t))|^2}, \quad (13)$$

を, 特異曲線 $\gamma(t)$ に沿う (内的な) 特異曲率とよぶ. ここで $\eta(t)$ は曲線 $\gamma(t)$ に沿う退化方向を与えるベクトル場で $\{\dot{\gamma}(t), \eta(t)\}$ が M^2 の向きに同調する TM^2 の基底の場を与えているものとする. いま

$$d\hat{A} = \lambda du \wedge dv, \quad dA = |\lambda| du \wedge dv \quad (14)$$

によって, M^2 上に2つの面積要素が定まり, これによって2つの M^2 の部分集合

$$M_+ := \{p \in M^2 : dA_p = d\hat{A}_p\}, \quad M_- := \{p \in M^2 : dA_p = -d\hat{A}_p\}$$

が定まる. すると, 先の2つの Gauss-Bonnet の定理の内的な版として

$$(\chi_E) = \frac{1}{2\pi} \int_{M^2} K d\hat{A}_\varphi = \chi(M_+) - \chi(M_-) + S_\varphi^+ - S_\varphi^-, \quad (15)$$

$$2\pi\chi(M^2) = \int_{M^2} K dA_\varphi + 2 \int_{\Sigma_\varphi} \kappa_\varphi d\tau_\varphi, \quad (16)$$

が得られる.

注意 12 実は, ここで紹介した2つの Gauss-Bonnet の公式に対して φ が条件 (8) を満たす, という仮定は不必要で, (15) も (16) も共に条件 (8) なしで成立する ([28]). 但し, その場合 K は, 曲面の Levi-Civita 接続から定まる Gauss 曲率には必ずしも一致しない. このことに気づくと, Riemann 幾何以外の範疇でも, 上の Gauss-Bonnet の定理が適用できる. 論文 [28] では, affine 幾何の立場から, 卵形面の Blaschke 法線写像のツバメの尾の個数に関する公式を上の Gauss-Bonnet の公式から導いている.

ここで $d\tau_\varphi$ は φ -特異点集合上の計量 ds_φ^2 に関する線素である. また S_φ^+ と S_φ^- は, 正と負の A_3 -特異点の個数を表す. (波面の場合には, A_3 -特異点は波面であり, 先に述べた正, 負の定義に一致する. 2次元多様体間の写像の場合には A_3 -特異点はカスプであるが, 特異点曲線の折れた側の領域が M_+ のときに正のカスプと定義する.) また χ_E は, $SO(2)$ ベクトル束 E の特性類としての Euler 類を表す.

内的な Gauss-Bonnet の定理の応用について, これから, いくつかの応用を紹介する.

8. 2次元多様体間の C^∞ -写像

すでに、例3で述べたように同じ次元間の多様体の C^∞ -写像は連接接束を誘導する。平面間の写像の芽

$$f(u, v) = (u^2, v)$$

は $(u, v) = (0, 0)$ に特異点を定める。これと右左同値な写像芽を折り目という。折り目は、§7で述べた内的な特異点としての解釈では A_2 -特異点に対応する。一方、写像の芽

$$f(u, v) = (uv + v^3, v)$$

は $(u, v) = (0, 0)$ に特異点を定める。これと右左同値な写像芽をカスプという。カスプは、§7で述べた内的な特異点としての解釈では A_3 -特異点に対応する。2次元多様体間の写像では、折り目とカスプはWhitney位相に関してジェネリックな特異点であることが知られている。したがって、与えられた写像が、この2つの特異点しか許容しないという仮定は自然なものである。まず、公式(15)の応用として次が成り立つ。

定理13 (Quine [21]) M^2 と N^2 を共にコンパクトで境界のない、向きづけられた2次元多様体とする。 $f: M^2 \rightarrow N^2$ を折り目とカスプのみをもつ C^∞ -写像とする。このとき、次が成り立つ。

$$\deg(f)\chi(N^2) = \chi(M_f^+) - \chi(M_f^-) + S_f^+ - S_f^-,$$

但し J_f を M^2, N^2 の向きに同調した座標を用いたときの f のヤコビ行列式とするとき、

$$M_f^+ := \{\det(J_f) > 0\}, \quad M_f^- := \{\det(J_f) < 0\}$$

であり、また S_f^+ は f の正のカスプの数、 S_f^- は負のカスプの数を表す。

実際、 f から誘導される連接接束のオイラー類は f の写像度倍されるので、この式が従う。また公式(16)の応用として次が成り立つ。

定理14 ([27]) M^2 と N^2 を共に境界のない、向きづけられた2次元多様体とする。また M^2 はコンパクトとし、 g を N^2 のリーマン計量とする。 $f: M^2 \rightarrow N^2$ を折り目とカスプのみをもつ C^∞ -写像とする。このとき、次が成り立つ。

$$2\pi\chi(M^2) = \int_{M^2} (K_{N^2} \circ f) |f^* dA_g| + 2 \int_{\Sigma_f} \kappa_s d\tau.$$

但し K_{N^2} は (N^2, g) のGauss曲率とする。

上記の定理で定まる特異曲率 κ_s は、特異曲線の f による像(曲線)に対して N^2 における測地的曲率の絶対値が定まるが、 f の像が横たわっている側が、曲線の曲がっている方向と連動しているかどうかによって、正負の符号をつけたものに他ならない。特異曲線に、 f の像を左手に見るような向きをつけると、特異

曲率は、特異曲線の測地的曲率に一致させることができる。特に、 (N, g) が 2 次元 Euclid 空間であった場合には、閉曲線の全測地的曲率は、回転数の 2π 倍となるので、以下の系が得られる。

系 15 (Levine [16]) M^2 を境界のない、向きづけられたコンパクト 2 次元多様体とする。 $f: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を折り目とカスプのみをもつ C^∞ -写像とする。このとき、 f の特異点集合を、 M^2 における正則曲線の和集合として

$$\Sigma_f = C_1 \cup \cdots \cup C_r \quad (\text{波面としての単純閉曲線の和})$$

と書く。各 C_j に、その像が $f(M^2)$ を左手に見る向きをつけると

$$\frac{\chi(M^2)}{2} = I(C_1) + \cdots + I(C_r).$$

が成り立つ。但し $I(C_j)$ は、曲線 $f(C_j)$ の回転数とする。

9. $\mathbb{R}^3$ の曲面への応用

M^2 を向き付けられた境界のないコンパクトな 2 次元多様体とし、波面 $f: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を考える。また $\nu: M^2 \rightarrow S^2$ を、その単位法線ベクトル場の定める Gauss 写像とする。すると f が波面として引き起こす接続接束から 2 つの Gauss-Bonnet 型の公式が得られ、 ν が Gauss 写像として引き起こす接続接束から、別に 2 つの Gauss-Bonnet 型の公式が得られるので、合計以下の 4 つの式が成り立つ。

$$(\chi_E =) \frac{1}{2\pi} \int_{M^2} K_f d\hat{A}_f = \chi(M_+^f) - \chi(M_-^f) + S_+^f - S_-^f, \quad (17)$$

$$(\chi_E =) \frac{1}{2\pi} \int_{M^2} K_\nu d\hat{A}_\nu = \chi(M_+^\nu) - \chi(M_-^\nu) + S_+^\nu - S_-^\nu, \quad (18)$$

$$\int_{M^2} K_f dA_f + 2 \int_{\Sigma_f} \kappa_s^f d\tau = 2\pi\chi(M^2), \quad (19)$$

$$\int_{M^2} K_\nu dA_\nu + 2 \int_{\Sigma_\nu} \kappa_s^\nu d\tau = 2\pi\chi(M^2), \quad (20)$$

ここで、 f の Gauss 曲率 K_f と ν の引き起こす曲率 K_ν の間には、 S^2 が単位球面であることと weingarten の公式に注意すると、以下の式が成り立つ。

$$K_f d\hat{A}_f = K_\nu d\hat{A}_\nu, \quad (21)$$

$$K_\nu = 1, \quad (22)$$

$$|K_f| dA_f = dA_\nu (= K_\nu dA_\nu) \quad (23)$$

古典的な閉曲面の Gauss-Bonnet の定理では、オイラー数の情報が得られるが、新たに得られた Gauss 写像の Gauss-Bonnet の定理と合わせると、例えば以下の情報が得られる

- (1) Gauss 曲率が負の部分の Euler 数 $\chi(\{p \in M^2; K_p < 0\})$,

(2) Gauss 曲率が負の部分の全曲率 $\int_{M^2} K^- dA$, 但し $K^- := \min(0, K)$.

まず, (1) に関する情報を与える以下の定理を導いてみよう.

定理 16 (Bleecker-Wilson [3]) M^2 を境界のないコンパクトで向きづけられた 2 次元多様体とし, $f: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を, はめ込みとする. また $\nu: M^2 \rightarrow S^2$ を f の Gauss 写像とし, ν は, 折り目とカスプのみを許容したとすると

$$2\chi(\{K_f < 0\}) = S_\nu^+ - S_\nu^-,$$

が成り立つ, 但し

$$S_\nu^+ := \{\nu \text{ の正のカスプの数} \}, \quad S_\nu^- := \{\nu \text{ の負のカスプの数} \}.$$

(証明) まず f は特異点を持たないので, 通常の Gauss-Bonnet の定理が成り立つ. つまり

$$\chi_E = \frac{1}{2\pi} \int_{M^2} K_f d\hat{A} = \chi(M) \quad (24)$$

が成り立つ. 一方, ν が誘導する接続接束 E は, 波面の内的双対性から, f から誘導されるものと同一である. したがって (18) により

$$\chi_E = \chi(M_+^\nu) - \chi(M_-^\nu) + S_+^\nu - S_-^\nu, \quad (25)$$

が成り立つ. ここで Gauss 写像 ν の Jacobi 行列式の正負は, f の Gauss 曲率の正負と連動していることに注意すると,

$$M_+^\nu = \{p \in M^2; K_p > 0\}, \quad M_-^\nu = \{p \in M^2; K_p < 0\} \quad (26)$$

が成り立つ. 一方 (24) より

$$\chi_E = \chi(M) = \chi(M_+^\nu) + \chi(M_-^\nu) \quad (27)$$

に注意して, (25) と合わせれば, 定理の主張が得られる. (証明終)

ところで, 上の Bleecker-Wilson の公式で f と ν の役割を逆転させることができる. つまり f がはめ込みであることを仮定する代わりに ν がはめ込みであるとする. すると f は卵形面の平行曲面でなければならない. 特に, 次の定理が上記の定理 16 の双対版となる.

定理 17 (双対版 Bleecker-Wilson の公式 [27]) $f: M^2(= S^2) \rightarrow \mathbb{R}^3$ を強い意味で凸な閉曲面とする. (つまり Gauss 写像 ν は微分同相写像であるとせよ.) ある実数 t において, f の平行曲面 f_t はカスプ辺とツバメの尾のみを許容したとすると, その t について

$$2\chi(\{K_{f_t} < 0\}) = S_{f_t}^+ - S_{f_t}^-$$

が成り立つ, 但し

$$S_{f_t}^+ := f_t \text{ 上の正のツバメの尾の数,}$$

$$S_{f_t}^- := f_t \text{ 上の負のツバメの尾の数.}$$

ここで、定理17の具体例を挙げよう。卵形面 f として、像が以下のような楕円面となるものを考える。

$$\text{Im}(f) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + z^2 = 1 \right\}.$$

この楕円面に対して ν を内向きの単位法線ベクトルとする。そして平行曲面

$$f_c := f + c\nu, \quad c := \frac{11}{2}$$

を考えると $\text{Im}(f_c)$ は図9のように、4つのツバメの尾をもち $\chi(\{K_c < 0\}) = -2$ となる。したがって、これらのツバメの尾はすべて負の属性をもつ。

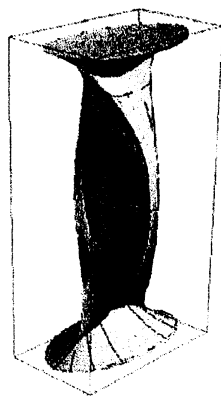


図 9: 楕円の平行曲面

今度は、Gauss 曲率が負の部分の全曲率に関する情報を与える定理を紹介する。

定理 18 ([27]) M^2 を境界のないコンパクトで向きづけられた 2 次元多様体とし、 $f: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を、はめ込みとする。また $\nu: M^2 \rightarrow S^2$ を f の Gauss 写像とし、 ν は、折り目とカスプのみを許容したとすると

$$\int_{\Sigma_\nu} \kappa_\nu d\tau = \int_{M^2} K^- dA (< 0),$$

が成り立つ、但し $K^- = \min(0, K)$ であり、 κ_ν は ν の特異曲率とする。

(証明) まず f は特異点を持たないので、通常の Gauss-Bonnet の定理が成り立つ。つまり (24) が成立する。一方、 ν が誘導する連接接束 E は、波面の内的双対性から、 f から誘導されるものと同一である。したがって (20), (26) により

$$\begin{aligned} \int_{K_f > 0} K_f dA_f - \int_{K_f < 0} K_f dA_f + 2 \int_{\Sigma_\nu} \kappa_\nu^\nu d\tau &= \int_{M^2} K_\nu dA_\nu + 2 \int_{\Sigma_\nu} \kappa_\nu^\nu d\tau \\ &= 2\pi\chi(M^2) = \int_{M^2} K_f dA_f \\ &= \int_{K_f > 0} K_f dA_f + \int_{K_f < 0} K_f dA_f \end{aligned}$$

となるので、定理の主張が得られる。 (証明終)

定理 17 は f と ν の役割の入れ替えによる定理 16 の双対版であった。同様に定理 18 の双対版として以下の定理が示せる。

定理 19 ([27]) $f : M^2 (= S^2) \rightarrow \mathbb{R}^3$ を強い意味で凸な閉曲面とする。(つまり Gauss 写像 ν は微分同相写像であるとせよ。) ある実数 t において、 f の平行曲面 f_t はカスプ辺とツバメの尾のみを許容したとすると、その t について

$$\int_{\Sigma_{f_t}} \kappa_{f_t} d\tau = - \int_{M^2} K_{f_t}^- dA_{f_t}$$

が成り立つ。ここで κ_{f_t} は f_t の特異曲率とする。

また、Gauss 曲率が有界な波面については、以下の著しい結果が成り立つ。(そのような曲面の具体例としては、平均曲率一定曲面の平行曲面などがある。)

定理 20 ([27]) M^2 を境界のないコンパクトで向きづけられた 2 次元多様体とし、 $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を、波面とし、特異点以外の場所で至る所 $K > 0$ あるいは $K < 0$ を満たしていたとすると次が成立する。このとき f とその単位法線ベクトル場の特異点集合は一致する。さらに、次が成り立つ。

$$(1) S_f^+ - S_f^- = \text{sgn}(K)(S_\nu^+ - S_\nu^-),$$

$$(2) \text{ もしも } K < 0 \text{ ならば } \chi(M^2) = 0 \text{ が成り立つ。}$$

この結果は、論文 [27] の中でも最も深い定理の 1 つである。

10. 共形的に平坦なリーマン多様体の双対性.

最後に、波面の内的双対性の超曲面の場合の応用を述べる。リーマン多様体 (M^n, g) ($n \geq 4$) が共形的に平坦とは、ワイルの曲率テンソル

$$W_{ijkl} := R_{ijkl} + (A_{ik}g_{jl} - A_{il}g_{jk} + A_{jl}g_{ik} - A_{jk}g_{il}) + \frac{R}{n(n-1)}(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})$$

が消えるときを云う。但し

$$A := \frac{1}{n-2} \sum_{i,j} \left(R_{ij} - \frac{R}{2(n-1)} g_{ij} \right) dx^i \otimes dx^j$$

は Schouten テンソルという。このとき第二 Bianchi の恒等式により A は Codazzi の方程式を満たす。一方 $n = 3$ のときには (M^3, g) が共形的に平坦であるとは、Schouten テンソル A が Codazzi テンソルのときをいう。共形的に平坦であることと、リーマン計量を共形的に変形して平坦にできることは同値である。以下のことが知られている。

Fact 21 (Brinkmann [4], Asperti-Dajczer [2]) 単連結な共形的平坦リーマン多様体 (M^n, g) ($n \geq 3$) は Lorentz-Minkowski 時空の光錐

$$Q_+^{n+1} := \{(t, x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}_1^{n+2}; \sum_{j=1}^{n+1} (x^j)^2 = t^2\}$$

への等長はめ込みを (一意的に) 許容する.

光錐の超曲面 f の単位法線ベクトル ν はまた光錐の超曲面となる. このことに着目し, 共形的に平坦な多様体上の双対性が Izumiya [9], Liu-Jung [8], および Espinar-G'alvez-Mira [6] によりそれぞれ別の見地から指摘された. これを, 外の空間を払拭して内的に定式化することができる. 以下のことが示せる.

定理 22 ([18]) 連接接束の言葉を用いて共形的平坦リーマン多様体の概念を特異点を許す対象に拡張し, 双対性をその枠組みの中の対合として定式化することができる. 特に共形的平坦リーマン多様体 (M^n, g) ($n \geq 3$) の双対計量

$$\hat{g}_{ij} = \sum g^{ab} A_{ia} A_{jb} du^i \otimes dv^j \quad (28)$$

は再び双対共形平坦計量を与える. 但し $(u^1, \dots, u^n)$ は局所座標系とする.

尚, 双対計量の式 (28) は, 論文 [18] で初めて与えられたものである. 最後に今回の話題と直接関係ないが, 特異点をもつ Gauss-Bonnet 曲率や平均曲率一定曲面については文献 [15], [19], [10], [13], [20], [7] およびその文献表を参考にいただければ幸いです. また, 今回の話題に関する入門としては, 最近の筆者の拙著「特異点をもつ曲線と曲面の幾何学」(慶応大学数理科学科講義録 47 巻) をご覧ください.

参考文献

- [1] V. I. Arnol'd, S. M. Gusein-Zade and A. N. Varchenko, *Singularities of differentiable maps*, Vol. 1, Monographs in Math. **82**, Birkhäuser, 1985.
- [2] A. R. C. Asperti and M. Dajczer, *Conformally flat Riemannian manifolds as hypersurfaces of the light cone*, Canad. Math. Bull. **32** (1989), 281–285.
- [3] D. Bleeker and L. Wilson, *Stability of Gauss maps*, Illinois J. of Math. **22** (1978) 279–289.
- [4] H. W. Brinkmann, *On Riemann spaces conformal to Euclidean space*, Proc. Nat. Acad. Sci **9** (1923), 1–3.
- [5] L. Chen and S. Izumiya, *A mandara of Legendrian dualities for pseudo-sphere in semi-Euclidean space*, Proc. Japan. Acad. **85** (2009) 49–54.
- [6] J. M. Espinar, J. A. G'alvez and P. Mira, *Hypersurfaces in H_{n+1} and conformally invariant equations; The generalized Christoffel and Nirenberg problems*, J. Eur. Math. Soc. **11** (2009), 903–939.
- [7] S. Fujimori, W. Rossman, M. Umehara, K. Yamada and S.-D. Yang, *New maximal surfaces in Minkowski 3-space with arbitrary genus and their cousins in de Sitter 3-space*, Results Math. **56** (2009) 41–82.
- [8] H. L. Liu and S. D. Jung, *Hypersurfaces in lightlike cone*, J. of Geom. and Phys. **58** (2008), 913–922.
- [9] S. Izumiya, *Legendrian dualities and spacelike hypersurfaces in lightcone*, Moscow Math. J. **9** (2009), 325–357.

- [10] G. Ishikawa, Y. Machida: *Singularities of improper affine spheres and surfaces of constant Gaussian curvature.*, Int. J. Math. **17** (2006), 269–293.
- [11] S. Izumiya and K. Saji, *The mandala of Legendrian dualities for pseudo-spheres of Lorentz-Minkowski space and “flat” spacelike surfaces*, preprint.
- [12] S. Izumiya, K. Saji and M. Takahashi, *Horospherical flat surfaces in hyperbolic 3-space*, to appear in J. Math. Soc. Japan.
- [13] Y. Kawakami, *Value distribution of the hyperbolic Gauss maps for flat fronts in hyperbolic three-space*, Preprint (arXiv:0908.1307).
- [14] M. Kossowski, *The Boy-Gauss-Bonnet theorems for C^∞ -singular surfaces with limiting tangent bundle*, Annals of Global Analysis and Geometry **21** (2002), 19–29.
- [15] M. Kokubu, W. Rossman, K. Saji, M. Umehara, and K. Yamada: *Singularities of flat fronts in hyperbolic 3-space*, Pacific J. Math. **221** (2005) 303–351.
- [16] H. Levine, *Mappings of manifolds into the plane*, Amer. J. Math. **88** (1966), 357–365.
- [17] R. Langevin, G. Levitt and H. Rosenberg, *Classes d’homotopie de surfaces avec rebroussements et queues d’aronde dans $\mathbb{R}^3$* , Canad. J. Math. **47** (1995), 544–572.
- [18] H. Liu, M. Umehara and K. Yamada, *The duality of conformally flat manifolds*, to appear in Bulletin of the Brazilian Math. Soc., arXiv:1001.4569.
- [19] S. Murata and M. Umehara, *Flat Surfaces with singularities in Euclidean 3-space*. J. Diff. Geometry **82** (2009), 279–316.
- [20] D. Nakajo, *A representation formula for indefinite improper affine spheres*. Results Math. **55** (2009), 139–159.
- [21] J. R. Quine, *A global theorem for singularities of maps between oriented 2-manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **236** (1978) 307–314.
- [22] K. Saji, *Criteria for singularities of smooth maps from the plane into the plane and their applications*, to appear in Hiroshima Math. J.
- [23] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Geometry of fronts*, Ann. of Math. **169** (2009), 491–529.
- [24] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Behavior of corank one singular points on wave fronts*, Kyushu Journal of Mathematics **62** (2008), 259–280.
- [25] K. Saji, M. Umehara K. Yamada, *A_k singularities of wave fronts*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, **146** (2009), 731–746.
- [26] K. Saji, M. Umehara K. Yamada, *The duality between singular points and inflection points on wave fronts*, to appear in Osaka Journal of Mathematics, arXiv:0902.0649.
- [27] K. Saji, M. Umehara K. Yamada, *The intrinsic duality on wave fronts*, preprint, arXiv:0910.3456.
- [28] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Singularities of Blaschke normal maps of convex surfaces*, to appear in Comptes rendus Mathematique, arXiv:1001.1200.