

ねじれた安定性と同変換

吉岡 康太 (神户大学理学部)

§1 Twisted stability

(X, H) を偏極多様体とする

局所自由層 E_0 を固定する

Def. X を曲面とすると、連接層 E に対し
ねじれた階数, 次数, オイラー標数 χ を次で定義する

$$\left\{ \begin{array}{l} rk_{E_0} E := rk(E \otimes E_0^\vee) \\ deg_{E_0} E := deg(E \otimes E_0^\vee) = (c_1(E \otimes E_0^\vee), H) \\ \chi_{E_0}(E) := \chi(E \otimes E_0^\vee) \end{array} \right.$$

又一般の X の場合に

Def. 連接層 E の E_0 -twisted Hilbert 多項式を

$$\begin{aligned} \chi_{E_0}(E(m)) &:= \chi(E \otimes E_0^\vee(m)) \\ &= a_0(E) \binom{n+d}{d} + a_1(E) \binom{n+d-1}{d-1} + \dots \end{aligned}$$

で定義する

すると普通の安定性と同様, E_0 -twisted stability が
次の様に def. できる

Def. E = purely d -次元(連接)層が E_0 -twisted stable (resp. semi-stable) とは

$$0 \subsetneq F \subsetneq E \quad 1\text{-文片}$$

$$\frac{\chi_{E_0}(F(n))}{a_0(F)} < \frac{\chi_{E_0}(E(n))}{a_0(E)} \quad n \gg 0$$

($\leq$)

が成立する事とする

- X が 曲面上で E = torsion free の場合、 E_0 -twisted Hilbert 多項式の代わりに $\left\{ \left(\frac{\deg_{E_0}(E)}{rk_{E_0}(E)}, \frac{\chi_{E_0}(E)}{rk_{E_0}(E)} \right) \right\}$ に '辞書式' 順序を入れたもので stability を決める事もできる

Simpson の考えを使って 次の定理が示せる

Th E_0 -twisted semi-stable sheaf のモジュライ空間

$$\overline{M}_X^{P, E_0} = \left\{ E \mid E: E_0\text{-twisted semi-stable}, \chi_{E_0}(E(n)) = P(n) \right\} / \sim_{S\text{-同値}}$$

が存在する。

さて twisted stability と普通の stability の関係であるが、

まず容易にわかるのは、次の関係である :

$$\mu\text{-stable} \Rightarrow E_0\text{-twisted stable} \Rightarrow E_0\text{-twisted semi-stable} \Rightarrow \mu\text{-semi-stable}$$

又 $E_0 = \mathcal{O}_X$ のときが 通常の stability である

今 X は 曲面 としよう。すると, E_0 -twisted stability は

$\frac{c_1(E_0)}{\deg E_0} \in NS(X) \otimes \mathbb{Q}$ 1- のみ 依存 する 事 が わかる。この事から

E_0 -twisted stability は $\mathbb{Q}$ -line bundle $\mathcal{O}_X(\frac{c_1(E_0)}{\deg E_0})$ を $\otimes$ して (通常) stability を 計ったもの = 松本-Wentworth の stability

と一致する事 が わかる。

注意 μ -stability は 直線束の $\otimes$ で不変であるが, 通常の stability は 変化する。より詳しくは,

- H が 一般の位置 にあれば, twisted stability は E_0 に無関係に定まる
- H が 特別の位置 にあれば, twisted stability は E_0 に依存し。この概念を導入する意味がある

実際 元々は Donaldson 不変量の計量 (偏極) 依存性を解析するため 特別な位置 にあつた偏極 による場合の解析が必要となり, その道具として twisted stability という概念が導入されたわけである。

§2 向井格子

$X \subset K3$ 曲面 又は $abel$ 曲面 とす

Def. (向井格子)

$$H^{ev}(X, \mathbb{Z}) := \bigoplus_{i=0}^2 H^{2i}(X, \mathbb{Z}) \text{ に pairing } \langle \rangle$$

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &:= - \int_X x^v \wedge y \\ &= \int_X (x_1 \wedge y_1 - x_0 \wedge y_2 - x_2 \wedge y_0) \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{例} \quad \text{とす} \quad \text{---} \quad x = (x_0, x_1, x_2) \in H^0 \oplus H^2 \oplus H^4 \text{ に対し} \\ x^v = (x_0, -x_1, x_2) \end{aligned}$$

これを向井格子という。

向井格子は格子とい は 次の様 に なる :

$$(H^{ev}(X, \mathbb{Z}), \langle, \rangle) = \begin{cases} (-E_8)^{\oplus 2} \oplus \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)^{\oplus 4} & X = K3 \\ \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)^{\oplus 4} & X = abel \end{cases}$$

Def (向井バクトル)

E : X 上の 連接層 に対し

$$\begin{aligned} v(E) &:= ch(E) \sqrt{\det x} \\ &= (rk E, c_1(E), (X(E) - E \cdot rk E) \rho_X) \end{aligned}$$

$$\text{と } E \text{ の 向井バクトル とい} \quad \text{---} \quad E = \begin{cases} 1 & X = K3 \\ 0 & X = abel \end{cases}$$

$$\sum_X \rho_X = 1.$$

すなわち Riemann-Roch の定理は次で与えられる

Thm 連接層 E, F に対して $\chi(E, F) = \sum_{i=0}^2 (-1)^i \dim \operatorname{Ext}^i(E, F)$

とあると,

$$\chi(E, F) = - \langle v(E), v(F) \rangle$$

Def. $v = (v_0, v_1, v_2) \in H^{\text{ev}}(X, \mathbb{Z})$ に対して $\left\{ \begin{array}{l} h_2 v = v_0 \\ c_1(v) = v_1 \end{array} \right.$ とある。

Def. $v \in H^{\text{ev}}(X, \mathbb{Z})$ が $h_2 v \geq 0$ かつ $c_1(v) \in \operatorname{NS}(X)$ とするとき

$$M_H(v) := \left\{ E \mid E = \text{stable w.r.t. } H, v(E) = v \right\}$$

$$T_H(v) := \left\{ E \mid E = \text{semistable w.r.t. } H, v(E) = v \right\} / S\text{-同値}$$

とある。

このとき次が成立する。

Thm (向井)

$M_H(v)$ は 非特異代数的スキームで,

$$\dim M_H(v) = \langle v, v \rangle + 2$$

更に $M_H(v)$ は 正則シンプレクティック型式をもつ

この様に 向井格子 (ベクトル) は モジライ空間の不変量を表すのに適している。実際、適当な条件下、変形型が $\langle v^2 \rangle = \langle v, v \rangle$ で決まってしまう事がわかっている。

その過程で重要な役割を果たすのが、向井格子の同型群である。

向井格子の同型群 $O(H^{ev}(X, \mathbb{Z}))$

X を 2 次元曲面 としよう。このとき次の写像は格子の同型である。

$$\textcircled{1} N \in \text{Pic}(X) \text{ に対し } T_N: H^{ev}(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^{ev}(X, \mathbb{Z})$$

$$\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow$$

$$x \longmapsto x \cdot \text{ch } N$$

$$\textcircled{2} H^{ev}(X, \mathbb{Z}) = H^2(X, \mathbb{Z}) \perp \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ であり}$$

$$O(H^2(X, \mathbb{Z})) \subset O(H^{ev}(X, \mathbb{Z})) \text{ と思える。}$$

$$\textcircled{3} v_0 \in H^{ev}(X, \mathbb{Z}), \langle v_0^2 \rangle = -2 \text{ に対し}$$

$$R_{v_0}: H^{ev}(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^{ev}(X, \mathbb{Z})$$

$$\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow$$

$$x \longmapsto x + \langle x, v_0 \rangle v_0$$

は v_0 に関する鏡映変換、よって格子の同型である。

次に述べる向井変換も格子の同型を導く。

§3 向井変換

X, Y を 多様体, $D(-)$ を 有界かつ連続なコホモロジー層をもつ複体から成る導来圏とする。

$E \in D(X \times Y)$ に対し, 積分関手

$$f_E: D(X) \longrightarrow D(Y)$$

$$\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow$$

$$x \longmapsto R p_{Y*}(p_X^*(x) \overset{L}{\otimes} E)$$

$$\begin{array}{ccc} & X \times Y & \\ p_X \swarrow & & \searrow p_Y \\ X & & Y \end{array}$$

を考へる

Def $\mathcal{F}_E$ が 圏同値を与えとき, $\mathcal{F}_E$ を 向井変換 といふ。

例1 (自明な例)

$$X = \mathcal{Y} \quad E = \mathcal{O}_\Delta \text{ は 明らか, 圏同値を与え} \\ (\mathcal{F}_E = 1)$$

より一般に $L \in \text{Pic}(X)$ に対し

$$E = \mathcal{O}_\Delta \otimes L \text{ とすれば } \mathcal{F}_E(x) = x \otimes L \\ \text{により これも 圏同値を与える}$$

例2 (向井)

X : abel 多様体

$$\mathcal{Y} := \{ L \mid L : X \text{ 上の直線束, } c_1(L) = 0 \}$$

おくと, $\mathcal{Y}$ は X の dual abel 多様体。

$$\exists p = \bigcup_{y \in \mathcal{Y}} p_y : X \times \mathcal{Y} \text{ 上の直線束, } y \mapsto p_y|_{X \times \{y\}} \\ (\text{普遍族})$$

$$\mathcal{F}_E : D(X) \longrightarrow D(\mathcal{Y}) \text{ は 圏同値}$$

例3 (向井)

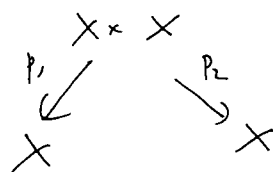
X : K3 曲面 とする

E_0 : 単純かつ, 変形をもたないベクトル束 とする

つまり

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Hom}(E_0, E_0) = \mathbb{C} \\ \mathrm{Ext}^1(E_0, E_0) = 0 \\ \mathrm{Ext}^2(E_0, E_0) = \mathbb{C} \end{array} \right. \quad \begin{array}{c} \nearrow \\ \text{Serre dual} \\ \searrow \end{array}$$

このとき $p_1^*(E_0) \otimes p_2^*(E_0) \xrightarrow{\mathrm{ev}} \mathcal{O}_\Delta$



は全射で $\mathcal{E} := \ker(\mathrm{ev})$ は 局所自由な層

$\mathcal{F}_\mathcal{E} : D(X) \rightarrow D(Y)$ は 圏同値を与える。

これを 向き鏡映変換という。

さて $\mathcal{F}_\mathcal{E}^H = H^{\mathrm{ev}}(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^{\mathrm{ev}}(Y, \mathbb{Q})$ を

$$\mathcal{F}_\mathcal{E}^H(x) := p_{Y*} (p_X^*(x) \cdot \mathrm{ch} \mathcal{E} \cdot p_X^* \mathrm{td}_X p_Y^* \mathrm{td}_Y)$$

で定めると、これは $\mathbb{Z}$ 上定義され、更に 格子の同型となる。

又 Grothendieck-Riemann-Roch の定理により、次の可換図式を得る

$$\begin{array}{ccc} D(X) & \xrightarrow{\mathcal{F}_\mathcal{E}} & D(Y) \\ \downarrow \nu & \hookrightarrow & \downarrow \nu \\ H^{\mathrm{ev}}(X, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\mathcal{F}_\mathcal{E}^H} & H^{\mathrm{ev}}(Y, \mathbb{Z}) \end{array}$$

ところで例 3 の場合、 $\langle \nu(E_0)^2 \rangle = -\chi(E_0, E_0) = -2$

$\therefore \nu(E_0)$ は -2 -vector となる。更に $\mathcal{F}_\mathcal{E}^H = -R_{\nu(E_0)}$ がわかる。

これが $\mathcal{F}_\mathcal{E}$ を 鏡映変換と呼ぶ理由である。

向き変換における最も重要な定理は Bridgeland の次の定理であろう。

Thm (Bridgeland)

- $Y = X$ 上の sheaf の moduli space, $\dim Y = \dim X$
- 普遍族 $\mathcal{E}$ があつて次をみたす。

$$* \quad \mathcal{E}|_{X \times \{y\}} \otimes K_X \cong \mathcal{E}|_{X \times \{y\}} \quad \forall y \in Y$$

$$** \quad \mathcal{E}|_{\{x\} \times Y} \otimes K_Y \cong \mathcal{E}|_{\{x\} \times Y} \quad \forall x \in X$$

このとき $\mathcal{F}_{\mathcal{E}}: D(X) \rightarrow D(Y)$ は 圏同値と与えらる。

Cor 1 X が 楕円曲線 または abel 曲線 の場合は,

$$\dim Y = \dim X, \quad \exists \mathcal{E}: \text{普遍族}$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{E}}: \text{圏同値}$$

Cor 2 同様の設定の下

$$\mathcal{H}_{\mathcal{E}}: \begin{array}{ccc} D(X) & \longrightarrow & D(Y)_{op} \\ \downarrow & & \downarrow \\ x \longmapsto & R\text{Hom}_Y(P_X^*(x), \mathcal{E}) & \end{array}$$

は 圏同値 と与えらる。

さて, $\mathcal{F}_{\mathcal{E}}$ または $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ は 導来圏の間の同値と与えらるが, 連接層の圏の間の同値と与えらるわけではない。つまり, (安定)層が (安定)層に移るとは限らな...わけである。

そこで考えられる事は,

- (層だけでなく) 考える対象を広げる

これについては稲場さんが 導来圏の単純対象のモジュライ空間を構成している。詳しくは稲場さんの原稿をごらん下さい。

- 一つ層が層に移るか? 又その場合 安定性は保たれるか? という問題 も考えられる。

この問題を考えるにしても、対象を広げる事は見過しと置くのであろうと思われるが、ここでは直接的にこの問題へアプローチする事とする。

§4 拡大した安定性と同変換

仮定 $\textcircled{\ast}$ $\mathcal{E}|_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times Y} : \text{stable w.r.t. } H$.

ここで H は H から自然に誘導される Y 上の ample な直線束
又 $X, Y, \mathcal{E}$ は §3 Cn 1.2 の仮定をみたすとする。

$$\text{今 } \left\{ \begin{array}{l} G_1 := \mathcal{E}|_{X \times \mathbb{P}^1} \\ G_2 := \mathcal{E}|_{\mathbb{P}^1 \times Y} \end{array} \right. \quad \text{とおく。}$$

このとき 次の Thm が成立する。

Thm 仮定 $\textcircled{\ast}$ をみたすとする。

E を $\deg_{G_1}(E) = 0$ をみたす G_1 -twisted semi-stable sheaf とする。このとき

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H}_E^i(E) = 0 \quad i \neq 1 \\ \mathcal{H}_E^1(E) = \text{Ext}_{P_r}^1(P_X^*(E), E) \text{ は } \hat{H}=1 \text{ 關し } G_2\text{-twisted semi-stable} \end{array} \right.$$

特に $\mathcal{H}_E$ は 同型

$$\overline{M}_H^{G_1}(w) \xrightarrow{\sim} \overline{M}_H^{G_2}(\mathcal{H}_E^H(w))$$

を誘導する。

群 $O(H^{\text{ev}}(X, \mathbb{Z}))$ を使って (残念ながら今のところこの群の作用があるわけではない) 次のように示す。

Cor $\overline{M}_H(w)$ は 空 でなければ 正則代数多様体
特に 既約である。ただし H は一般の偏極

(向井ベクトル $v = m(1, 0, -n)$ の場合は '順序させよ') (文献②参照)

問題 $\overline{M}_H(w) \neq \emptyset \iff \langle v^2 \rangle \geq -2\varepsilon$
(H : 一般)

を (なるべく易く) 示す

知られている事

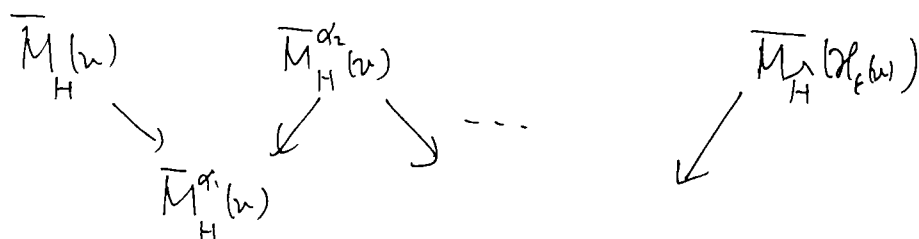
X : abel 曲面 のときは OK

X : K3 曲面 の場合は $h^1(w) > 0$

$h^1(w) = 0, c_1(w) = \text{nef}$

$\Rightarrow$ OK.

Cor $\deg_{G_1}(E) = 0$ のとき $\bar{M}_H(u)$ と $\bar{M}_H(\mathcal{H}_E^H(u))$ の関係は
Mumford-Thaddeus type flip で与えられる。



今 $\deg_{G_1}(E) = 0$ の場合を考えれば、他の場合はどうだろうか？

• $\deg_{G_1}(E) = 1$ (あるいは最小 > 0) のとき.

* $\mathcal{E}$: 局所自由 $\Rightarrow$ OK $\chi_{G_1}(E) > 0 \Rightarrow \mathcal{H}_E = \text{Isom}$

$\chi_{G_1}(E) \leq 0 \Rightarrow \mathcal{H}_E = \text{Isom}$

(文献④)

* $\mathcal{E}$: 局所自由でない $\Rightarrow$ “一般化した” 向井の基本変換になる。
(Markman) (文献③)

• 他の次数では??

実は反例あり.

• 漸近的挙動

E : 連接層とすると, $H^i(X, E(m)) = 0 \quad m \gg 0, i > 0$

$\Rightarrow \mathcal{H}_E(E(m)), m \gg 0$ は連接層となる。

問題 安定性は保たれるか? (適当に *twisted semistability* は保たれるか?)

今のところわかっていないのは次の事実だけである。

Thm (文献①) $h_E \leq 2$ なら OK.

参考文献

- K. Yoshioka :
- ① math. AG/0112267
 - ② math. AG/0106118
 - ③ Crelle 515, 97-123
 - ④ math. AG/0009001 (Math. Ann. 321, 817-884)

他の文献は ④の文献をみればよい。