

Spherical functions and local densities on hermitian forms

広中 由美子 (Yumiko Hironaka)

信州大学理学部

§0 初めに

k を p 進体 $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大, $*$ を k の involution とする. $v = (v_{ij}) \in M_{mn}(k)$ に対して $v^* = (v_{ji}^*) \in M_{mn}(k)$ とおく.

$G = GL_n(k)$, $K = GL_n(\mathcal{O}_k)$, $X = \{x \in G \mid x^* = x\}$ とする. G は X に $g \cdot x = gxg^*$ で作用している.

これらの記号を用いると, 我々の目的は次のように述べられる.

(1) spherical functions on X , つまり $C^\infty(K \backslash X)$ 内の $\mathcal{H}(G, K)$ 同時固有関数を決定すること. ここで, $\Psi \in C^\infty(K \backslash X)$ が $\mathcal{H}(G, K)$ 同時固有関数であるとは

$f * \Psi = \omega(f)\Psi$ ($\forall f \in \mathcal{H}(G, K)$) をみたす $\mathbb{C}$ -algebra map $\omega: \mathcal{H}(G, K) \longrightarrow \mathbb{C}$ が存在するときに言う.

(2) (1) を用いて X 上の調和解析をすること.

(3) 応用として, 表現の局所密度の公式を明示すること.

これは, [H1-4] で考察したうち, 不分岐な場合のエルミート形式の球関数の理論を完成することになる. 交代形式については, [HS] で理論が構築されている.

§1 X 上の球関数

以下, 簡単の為, k は $k_0 = \{x \in k \mid x^* = x\}$ 上不分岐と仮定する. $\pi \in k_0$ を k の素元, $\mathfrak{p} = \pi\mathcal{O}$, $\#(\mathcal{O}_k/\mathfrak{p}) = q$, $||$ を $|\pi| = q^{-1}$ と正規化した k 上の付値とし, 便宜上 $|0| = 0$ としておく. $x \in X$ に対し, $d_i(x)$ で x の左上の i 次小行列式を表す.

さて, $x \in X$ と $s = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{C}^n$ に対し次の積分を考える.

$$\omega(x; s) = \int_K \prod_{i=1}^n |d_i(k \cdot x)|^{s_i} dk.$$

ここで dk は $\int_K dk = 1$ と正規化した K 上の Haar 測度である.

これは, 以前 [H1] で X 上の球関数として導入したもので, 次の事実が分かっている. k/k_0 を不分岐と仮定したので, [H1,2,3] の結果は $p=2$ でもそのまま成立する. 但し, ここでは $|O/p| = q$ としていることに注意.

[1] 右辺は $\operatorname{Re}(s_1), \dots, \operatorname{Re}(s_{n-1}) \geq 0$ ならば絶対収束し, $q^{s_1}, \dots, q^{s_n}$ の有理関数に解析接続される ([H1]).

[2] $\omega(x; s)$ は $\mathcal{H}(G, K)$ -同時固有関数である ([H1]). より詳しく言うと以下のようになっている.

G 上の関数 $\Psi_\nu(g)$ ($\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{C}^n$) を次で定義する:

$$\Psi_\nu(g) = \prod_{i=1}^n |a_i|^{\nu_i}. \text{ 但し } g = k \begin{pmatrix} a_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}, k \in K.$$

このとき, $\nu_z = (2z_n, \dots, 2z_1)$ として次の $\mathbb{C}$ -algebra isomorphism (佐武同型) を得る:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \mathcal{H}(G, K) &\xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[q^{\pm 2z_1}, \dots, q^{\pm 2z_n}]^{S_n} \\ f &\longmapsto \tilde{f}(z) = \int_G f(g) \Psi_{\nu_z}(g) dg, \end{aligned}$$

ここで S_n は n 次対称群で $z_1, \dots, z_n$ の置換として作用する. 一方,

$$(1.2) \quad \begin{cases} s_i = -z_i + z_{i+1} - \frac{1}{2} - \frac{\pi\sqrt{-1}}{\log q} & (1 \leq i \leq n-1) \\ s_n = -z_n + \frac{n-1}{4} - \frac{\pi\sqrt{-1}}{\log q} \end{cases}$$

によって変数変換し z -変数で表したものを $\omega(x; z)$ と書く. これらの記号を用いると,

$$(1.3) \quad (f * \omega(\cdot; z))(x) = \tilde{f}(z) \omega(x; z), \quad \forall f \in \mathcal{H}(G, K).$$

[3] $\omega(x; z)$ の関数等式と極の位置については次のように分かっている ([H3, §2]):

$$(1.4) \quad \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{q^{z_j} + q^{z_i}}{q^{z_j} - q^{z_i - \frac{1}{2}}} \cdot \omega(x; z) \in \mathbb{C}[q^{\pm z_1}, \dots, q^{\pm z_n}]^{S_n}.$$

さて,

$$\Lambda_n = \{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n \mid \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n\},$$

$$\pi^\lambda = \begin{pmatrix} \pi^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \pi^{\lambda_n} \end{pmatrix} \quad (\lambda \in \Lambda_n)$$

とおくと, $\{\pi^\lambda \mid \lambda \in \Lambda_n\}$ が X の K -軌道の代表系をなす. 一方, $\omega(x; s) = \omega(x; z)$ は K -不変なので, この代表系での値を調べれば十分である.

G の放物的部分群 $P = \{p = (p_{ij}) \in G \mid p_{ij} = 0 \text{ unless } i \geq j\}$ をとり, その左不変測度を $d_l(p)$ とし, P の指標 $\delta(p)$ を $d_l(pq) = \delta(q)^{-1} d_l(p)$ で定める.

$X' = \left\{ x \in X \mid \prod_{i=1}^n d_i(x) \neq 0 \right\}$ は $X' = \bigsqcup_{u \in \{0,1\}^n} X_u$ と P -軌道に分解される. ここで, X_u は k 上の加法的付値 v_π を用いて,

$$X_u = \{x \in X \mid v_\pi(d_i(x)) \equiv u_1 + \cdots + u_i \pmod{2}\}$$

と与えられる. X_u の特性関数を ch_{X_u} と表す. $g \in G, x \in X, u \in \{0,1\}^n$ に対し

$$(1.5) \quad \begin{aligned} d^s(g; x) &= d^z(g; x) = \prod_{i=1}^n |d_i(g \cdot x)|^{s_i}, \\ d_u^s(g; x) &= d_u^z(g; x) = \text{ch}_{X_u}(g \cdot x) d^s(g; x). \end{aligned}$$

$$\omega_u^s(x) = \omega_u^z(x) = \int_K d_u^s(k; x) dk$$

と定める. 明らかに

$$(1.6) \quad \omega(x; z) = \sum_u \omega_u^z(x)$$

である. $B = \{(b_{ij}) \in K \mid b_{ii} \in \mathcal{O}^\times \text{ for } \forall i, b_{ij} \in \mathfrak{p} \text{ if } i < j\}$ とおく. また, G 上の関数 f と $H = K$ または B について

$$\mathcal{P}_H f(g) = \int_H f(gh) dh$$

と定義する, 但し dh は $\int_H dh = 1$ と正規化された H 上の Haar 測度とする. Casselman[C] の方法をたどって次の補題を得る.

Lemma 1.1

$$\left(\omega_u^s(x) \right)_u = \prod_{i=1}^n \frac{1 - q^{-1}}{1 - q^{-i}} \sum_{\sigma \in S_n} \gamma(\sigma z) B_\sigma(z) \left(\mathcal{P}_B(d_u^{\sigma s}(\cdot; x))(1) \right)_u$$

ここで両辺は u が $\{0,1\}^n$ を渡る 2^n 次元のベクトルで,

$$\gamma(z) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{q^{2z_j} - q^{2z_i-1}}{q^{2z_j} - q^{2z_i}}.$$

$B_\sigma(z) \in M_{2^n}(\mathbb{C}(q^{z_1}, \dots, q^{z_n}))$ は $\left(\omega_u^z(x) \right)_u = B_\sigma(z) \left(\omega_u^{\sigma z}(x) \right)_u$ をみたす行列である.

Proof. P の指標 χ を

$$\chi(p) = \prod_{i=1}^n |p_i|^{z_i} \quad p = \begin{pmatrix} p_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & p_n \end{pmatrix} \in P$$

によって定める. $\sigma(\chi) \neq \chi$ ($\forall \sigma \in S_n, \sigma \neq 1$) なので $[C]$ の意味で "regular" である. G への誘導表現を

$$I(\chi) = \left\{ f: G \longrightarrow \mathbb{C} \mid \begin{array}{l} \text{locally constant} \\ f(pg) = \chi \delta^{\frac{1}{2}}(p) f(g) \quad (\forall p \in P, \forall g \in G) \end{array} \right\}$$

とすると $d^s(g; x), d_u^s(g; x) \in I(\chi)$ である. $I(\chi)^B = \{f \in I(\chi) \mid f(gb) = f(g) \quad (\forall b \in B)\}$ の基底 $\{f_{\sigma, s}(g) \mid \sigma \in S_n\}$ を $[C]$ の intertwining operator $T_\sigma: I(\chi) \longrightarrow I(\sigma(\chi))$ に関して

$$T_\sigma(f_{\tau, s})(1) = \delta_{\sigma, \tau} \quad (\sigma, \tau \in S_n, \delta_{\sigma, \tau} \text{ は Kronecker delta})$$

をみたすようにとる (cf. [C, p.402]). そうすると,

$$\mathcal{P}_B(d_u^s(\cdot; x))(g) = \sum_{\sigma \in S_n} T_\sigma \circ \mathcal{P}_B(d_u^s(\cdot; x))(1) f_{\sigma, s}(g) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathcal{P}_B \circ T_\sigma(d_u^s(\cdot; x))(1) f_{\sigma, s}(g)$$

となる. また,

$$(T_\sigma(d_u^s(\cdot; x)))_u = A_\sigma(s) (d_u^{\sigma s}(\cdot; x))_u \quad (u \in \{0, 1\}^n)$$

をみたす 2^n 次の行列 $A_\sigma(s)$ が存在する. 従って

$$\begin{aligned} (\omega_u^s(x))_u &= \left(\int_K \mathcal{P}_B(d_u^s(\cdot; x))(k) dk \right)_u \\ &= \left(\sum_{\sigma} \mathcal{P}_B \circ T_\sigma(d_u^s(\cdot; x))(1) \int_K f_{\sigma, s}(k) dk \right)_u \\ &= \sum_{\sigma} \mathcal{P}_K f_{\sigma, s}(1) A_\sigma(s) (\mathcal{P}_B(d_u^{\sigma s}(\cdot; x))(1))_u \end{aligned}$$

となる. さて, 再び [C, p.403-4] によって

$$\mathcal{P}_K f_{\sigma, s}(1) = \frac{\gamma(\sigma(\chi))}{Q \cdot C_\sigma(\chi)}$$

が分かる, ここで,

$$\gamma(\sigma(\chi)) = \gamma(\sigma(z)) = \prod_{i > j} \sigma \left(\frac{1 - q^{2z_j - 2z_i - 1}}{1 - q^{2z_j - 2z_i}} \right).$$

$$Q = \prod_{i=1}^n \frac{1 - q^{-i}}{1 - q^{-1}}$$

である。従って

$$\left(\omega_u^s(x)\right)_u = \frac{1}{Q} \sum_{\sigma \in S_n} \frac{\gamma(\sigma(z))}{C_\sigma(\chi)} A_\sigma(s) \left(\mathcal{P}_B(d_u^{\sigma s}(\cdot; x))(1)\right)_u$$

を得る。ここで (χ, s) は z と一意に対応しているので

$$B_\sigma(z) = \frac{1}{C_\sigma(\chi)} A_\sigma(s)$$

とおくと、右辺のそれぞれが cocycle relation を満たすことから

$$\left(\omega_u^{\sigma s}(x)\right)_u = B_\sigma(z)^{-1} \left(\omega_u^s(x)\right)_u$$

が分かり、求める式を得た。 ■

Lemma 1.2 任意の $\lambda \in \Lambda_n$ について $\langle \pi^\lambda \rangle = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix} \cdot \pi^\lambda$ とおくと、次式を得る：

$$\mathcal{P}_B(d_u^s(\cdot; \langle \pi^\lambda \rangle))(1) = \text{ch}_{X_u}(\langle \pi^\lambda \rangle) (-1)^{\sum_{i=1}^n i\lambda_i} q^{-\sum_{i=1}^n \frac{n-2i+1}{4} \lambda_i} q^{\langle j(z), \lambda \rangle},$$

ここで、

$$\langle z, \lambda \rangle = \sum_{i=1}^n z_i \lambda_i, \quad j(z) = (z_n, \dots, z_1).$$

Proof. $\mathcal{P}_B$ と B の定義から $\mathcal{P}_B(d_u^s(\cdot; \langle \pi^\lambda \rangle)) = \text{ch}_{X_u}(\langle \pi^\lambda \rangle) d^s(1; \langle \pi^\lambda \rangle)$ が分かり、計算によって与式を得る。 ■

Theorem 1 任意の $\lambda \in \Lambda_n$ について

$$\begin{aligned} \omega(\pi^\lambda; z) = & (-1)^{\sum_{i=1}^n i\lambda_i} q^{-\sum_{i=1}^n \frac{n-2i+1}{4} \lambda_i} \prod_{i=1}^n \frac{1-q^{-1}}{1-q^{-i}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{q^{z_j} - q^{z_i - \frac{1}{2}}}{q^{z_j} + q^{z_i}} \\ & \times \sum_{\sigma \in S_n} \sigma \left(q^{\langle z, \lambda \rangle} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{q^{z_i} + q^{z_j - \frac{1}{2}}}{q^{z_i} - q^{z_j}} \right), \end{aligned}$$

ここで $\sigma \in S_n$ は $z = (z_1, \dots, z_n)$ に $\sigma(z) = (z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(n)})$ と作用する。

Remark. 少しあとで定義する記号を用いると

$$\omega(\pi^\lambda; z) = (-1)^{n(\lambda)+|\lambda|} q^{\frac{n(\lambda)}{2} - \frac{n-1}{4}|\lambda|} (1 - q^{-\frac{1}{2}})^n \frac{w_\lambda^{(n)}(-q^{-\frac{1}{2}})}{w_n(q^{-1})} \\ \times \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{q^{z_j} - q^{z_i - \frac{1}{2}}}{q^{z_j} + q^{z_i}} P_\lambda(q^{z_1}, \dots, q^{z_n}; -q^{-\frac{1}{2}})$$

と表せる.

Proof. $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \left\{ \left(k_0^\times / N(k^\times) \right)^\wedge \right\}^n$, つまり λ_i は $\lambda^*(\pi) = -1$ で決まる $k^\times$ の指標 λ^* または自明な指標で, 便宜的に $\lambda_i(0) = 0$ としておく.

$$(1.7) \quad L(x; \lambda; s) = L(x; \lambda; z) \\ = \int_K \prod_{i=1}^n |d_i(k \cdot x)|^{s_i} \lambda_i(d_i(k \cdot x)) dk$$

と定めると, 明らかに次をみたとす:

$$L(x; \lambda; s) = \sum_u \lambda(u) \omega_u^s(x), \quad \text{但し } \lambda(u) = \prod_{i=1}^n \lambda_i(\pi^{(u_1 + \dots + u_i)}).$$

$\lambda_i(\pi) = (-1)^{e_{\lambda_i}}$ により $e_{\lambda_i} \in \{0, 1\}$ を定め, $s_i^{(\lambda)} = s_i + e_{\lambda_i} \frac{\pi\sqrt{-1}}{\log q}$ とおき, (1.2) の変数変換で $s^{(\lambda)}$ と対応する z -変数を $z^{(\lambda)}$ と表す, 従って $z_i^{(\lambda)} = z_i + \sum_{j=i}^n e_{\lambda_j} \frac{\pi\sqrt{-1}}{\log q}$. このとき,

$$L(x; \lambda; z) = \omega(x; s^{(\lambda)}) = \omega(x; z^{(\lambda)})$$

なので (1.4) により $L(x; \lambda; z)$ の関数等式が分かり, それは次のように表せる. s -変数と z -変数の関係から, $\sigma \in S_n$ と λ に対して指標 ψ が定まって $\omega(x; \sigma(z^{(\lambda)})) = L(x; \psi; \sigma(z))$ となる. 以下この ψ を $\sigma(\lambda)$ と表す. そうすると, 任意の $\sigma \in S_n$ に対して

$$L(x; \sigma(\lambda); \sigma(z)) = f_\lambda(\sigma; z) L(x; \lambda; z)$$

ここで

$$(1.8) \quad f_\lambda(\sigma; z) = \prod_{i < j} \frac{(-1)^{\sum_{r \geq \sigma(j)} e_{\lambda_r}} q^{z_{\sigma(j)}} - (-1)^{\sum_{r \geq \sigma(i)} e_{\lambda_r}} q^{z_{\sigma(i)} - \frac{1}{2}}}{(-1)^{\sum_{r \geq j} e_{\lambda_r}} q^{z_j} - (-1)^{\sum_{r \geq i} e_{\lambda_r}} q^{z_i - \frac{1}{2}}}.$$

そこでそれぞれ 2^n 次の行列を

$$(1.9) \quad F(\sigma, z) = \text{Diag}(f_\chi(\sigma; z))_\chi, \quad A = (\chi(u))_{\chi, u}, \quad \sigma A = (\sigma(\chi)(u))_{\chi, u}$$

とおくと,

$$(1.10) \quad A(\omega_u^z(x))_u = F(\sigma; z)^{-1} \sigma A(\omega_u^{\sigma(z)}(x))_u$$

を得る. (1.6) と χ が自明なときは $\sigma(\chi)$ も自明であることに注意して計算すれば定理が得られる. ■

Theorem 2 $\Psi_z(x) = \omega(x; z)/\omega(1_n; z)$ とおく. $\mathcal{H}(G, K)$ -加群としての同型である次の球フーリエ変換 Λ を得る:

$$\begin{aligned} \Lambda: \mathcal{S}(K \backslash X) &\xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[q^{\pm z_1}, \dots, q^{\pm z_n}]^{S_n} \\ \varphi &\longmapsto \hat{\varphi}(z) = \int_X \varphi(x) \Psi_z(x^{-1}) dx. \end{aligned}$$

ここで, 右辺は (1.1) を通して $\mathcal{H}(G, K)$ -加群とみなし, dx は $\int_{K \backslash X} dx = 1$ と正規化した X 上の G -不変測度である. 特に $\mathcal{S}(K \backslash X)$ は階数 2^n の $\mathcal{H}(G, K)$ -自由加群である.

Proof.

$$\begin{aligned} \Lambda: \mathcal{S}(K \backslash X) &\longrightarrow \mathbb{C}[q^{\pm z_1}, \dots, q^{\pm z_n}] \\ \varphi &\longmapsto \hat{\varphi}(z) = \int_X \varphi(x) \Psi_z(x^{-1}) dx. \end{aligned}$$

が $\mathcal{H}(G, K)$ -加群としての単射であることは [H1] で示した. 定理 1 から像が $\mathbb{C}[q^{\pm z_1}, \dots, q^{\pm z_n}]^{S_n}$ であることが分かる. ■

次の 2 つの定理の証明には, いくらか記号などの準備が必要なので証明は後回しにする.

Theorem 3 *Plancherel Formula*

$\mathfrak{a}^* = \left\{ \sqrt{-1} \left(\mathbb{R} / \frac{2\pi}{\log q} \mathbb{Z} \right) \right\}^n$ とし, $\mathfrak{a}^*$ 上の測度 $d\mu(z)$ を次のように定める:

$$d\mu(z) = \frac{1}{n!} \prod_{i=1}^n \frac{1 - (-q^{-\frac{1}{2}})^i}{1 + q^{-\frac{1}{2}}} \frac{dz_i}{|c(z)|^2},$$

但し, dz は $\int_{\mathfrak{a}^*} dz = 1$ と正規化した $\mathfrak{a}^*$ の Haar 測度で

$$c(z) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{q^{z_i} + q^{z_j - \frac{1}{2}}}{q^{z_i} - q^{z_j}}$$

とする. このとき, 任意の $\varphi, \psi \in S(K \backslash X)$ に対して次式が成立する:

$$\int_X \varphi(x) \overline{\psi(x)} dx = \int_{\mathfrak{a}^*} \hat{\varphi}(z) \overline{\hat{\psi}(z)} d\mu(z).$$

Theorem 4 inversion formula

任意の $\varphi \in S(K \backslash X)$ について次式が成立する:

$$\varphi(x) = (-1)^{(n+1) \det x} \int_{\mathfrak{a}^*} \hat{\varphi}(z) \Psi_z(x) d\mu(z) \quad (\forall x \in X).$$

Theorem 2 と Theorem 1 の証明で導入した記号を用いて次が分かる.

Theorem 5 $\left\{ L(x; \lambda; z) \mid \lambda \in \left\{ (k_0^\times / N(k^\times))^{\wedge} \right\}^n \right\}$ が $C^\infty(K \backslash X)$ 内の $\mathcal{H}(G, K)$ -同時固有関数の基底をなす.

さて, ここで, Macdonald[M] から必要な記号と結果をまとめておく.
 $\lambda \in \Lambda_n$ に対して

$$|\lambda| = \sum_{i=1}^n \lambda_i, \quad n(\lambda) = \sum_{i=1}^n (i-1)\lambda_i.$$

とおく. $m \in \mathbb{N}$ について $w_m(t) = \prod_{i=1}^m (1 - t^i)$. $w_0(t) = 1$ として, $\lambda \in \Lambda_n$ については

$$(1.11) \quad w_\lambda^{(n)}(t) = \prod_{i=-\infty}^{+\infty} w_{m_i(\lambda)}(t), \quad m_i(\lambda) = \#\{j \mid \lambda_j = i\}.$$

と定める.

$$\Lambda_n^+ = \{\lambda \in \Lambda_n \mid \lambda_n \geq 0\}$$

とおき, $m < n$ のとき

$$\Lambda_m^+ \ni \lambda \mapsto (\lambda_1, \dots, \lambda_m, 0, \dots, 0) \in \Lambda_n^+$$

によって $\Lambda_m^+ \subset \Lambda_n^+$ とみなす. $|\lambda|, n(\lambda)$ は変わらないが, $w_\lambda^{(n)}(t)$ は n に依存する. $\lambda, \mu \in \Lambda_n^+$ について

$$\lambda \geq \mu \stackrel{\text{def}}{\iff} \lambda_1 + \dots + \lambda_i \geq \mu_1 + \dots + \mu_i, \quad \forall i$$

$$\lambda \supset \mu \stackrel{\text{def}}{\iff} \lambda_i \geq \mu_i \quad \forall i;$$

$$\lambda \cap \mu = \nu, \text{ with } \nu_i = \min\{\lambda_i, \mu_i\};$$

$${}^t\lambda \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Lambda_n, \text{ with } {}^t\lambda_i = \#\{j \mid \lambda_j \geq i\}$$

とする. $\lambda \in \Lambda_n$ に対し, $x_1, \dots, x_n$ と t の多項式 $R_\lambda(x; t)$ と Hall-Littlewood 多項式 $P_\lambda(x; t)$ は次のように定義される:

$$(1.12) \quad \begin{aligned} R_\lambda(x; t) &= R_\lambda(x_1, \dots, x_n; t) = \sum_{\sigma \in S_n} \sigma \left(x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{x_i - tx_j}{x_i - x_j} \right); \\ P_\lambda(x; t) &= P_\lambda(x_1, \dots, x_n; t) = \frac{(1-t)^n}{w_\lambda^{(n)}(t)} R_\lambda(x_1, \dots, x_n; t), \end{aligned}$$

ここで n 次対称群 S_n は $\{x_1, \dots, x_n\}$ に添字の置換として作用する. $\{P_\lambda(x; t) \mid \lambda \in \Lambda_n^+\}$ は $\mathbb{Z}[t][x_1, \dots, x_n]^{S_n}$ の $\mathbb{Z}[t]$ -基底, $\{P_\lambda(x; t) \mid \lambda \in \Lambda_n\}$ は $\mathbb{Z}[t][x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]^{S_n}$ の $\mathbb{Z}[t]$ -基底になっている. そこで, $\lambda, \mu, \nu \in \Lambda_n^+$ に対して $f_{\mu, \nu}^\lambda(t) (\in \mathbb{Z}[t])$ を

$$(1.13) \quad P_\mu(x; t) P_\nu(x; t) = \sum_{\lambda \in \Lambda_n} f_{\mu, \nu}^\lambda(t) P_\lambda(x; t)$$

によって定義される構造定数とする.

$$f_{\mu, \nu}^\lambda(t) = 0 \quad \text{unless} \quad |\lambda| = |\mu| + |\nu| \quad \text{and} \quad \lambda \supset \mu, \nu.$$

である ([M, III-§3]). $y_1, \dots, y_r$ と t の多項式 $P_{\lambda/\mu}(y; t)$ は shape (μ, λ) of length r の tableau 達から定義される $\mathbb{Z}[t]$ -係数の多項式で

$$(1.14) \quad P_\lambda(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_r; t) = \sum_{\mu \in \Lambda_m^+} P_{\lambda/\mu}(y_1, \dots, y_r; t) P_\mu(x_1, \dots, x_m; t),$$

をみたすものである.

$$P_{\lambda/\mu}(y; t) = 0 \quad \text{unless} \quad 0 \leq {}^t\lambda_i - {}^t\mu_i \leq r$$

となる ([M, III-§5]). $\lambda \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Lambda_n^+$ について

$$b_\lambda(t) = \prod_{i \geq 1} w_{m_i(\lambda)}(t)$$

と定めると,

$$(1.15) \quad \prod_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq r}} \frac{1 - tx_i y_j}{1 - x_i y_j} = \sum_{\lambda \in \Lambda_m^+ \cap \Lambda_r^+} b_\lambda(t) P_\lambda(x_1, \dots, x_m; t) P_\lambda(y_1, \dots, y_r; t)$$

をみたす ([M, III-(4.4)]). 多項式 $P_\lambda(x; 0)$, $\lambda \in \Lambda_n^+$ は S -多項式と呼ばれ, 対称群の表現論で重要な役割を果たす. これも $\mathbb{Z}[t][x_1, \dots, x_n]$ の $\mathbb{Z}[t]$ -基底で次の関係式を満たす:

$$(1.16) \quad P_\lambda(x; 0) = \sum_{\mu \in \Lambda_n^+} K_{\lambda\mu}(t) P_\mu(x; t).$$

ここで

$$K_{\lambda\mu}(t) = 0 \quad \text{unless} \quad \lambda \geq \mu \quad \text{and} \quad |\lambda| = |\mu|$$

である ([M, III §6], [LS]).

ここであげた $f_{\mu\nu}^\lambda(t)$, $P_{\lambda/\mu}(y; t)$, $K_{\lambda\mu}(t)$ について詳しい計算などは [M], [LS] で扱われている.

これらの記号を用いれば

$$(1.17) \quad \Psi(\pi^\lambda; z) = (-1)^{n(\lambda) + |\lambda|} q^{\frac{n(\lambda)}{2} - \frac{n-1}{4}|\lambda|} \frac{w_\lambda^{(n)}(-q^{-\frac{1}{2}})}{w_n(-q^{-\frac{1}{2}})} P_\lambda(q^{z_1}, \dots, q^{z_n}; -q^{-\frac{1}{2}})$$

となる.

Proof of Theorem 3. $\lambda \in \Lambda_n$ について [H1, (2.3)] により

$$(1.18) \quad v(K \cdot \pi^\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{K \cdot \pi^\lambda} dx = q^{\frac{n-1}{2}|\lambda| - n(\lambda)} \frac{w_n(-q^{-\frac{1}{2}})}{w_\lambda(-q^{-\frac{1}{2}})}.$$

但しここでは, 添字 (n) を省いて $w_\lambda(t) = w_\lambda^{(n)}(t)$ としている. また $-\lambda \stackrel{\text{def}}{=} (-\lambda_n, \dots, -\lambda_1) \in \Lambda_n$ とすると

$$v(K \cdot \pi^{-\lambda}) = v(K \cdot \pi^\lambda)$$

が分かる. $\lambda \in \Lambda_n$ に対し, $K \cdot \pi^{-\lambda}$ の特性関数を φ_λ とおく. 定理の証明には

$$(1.19) \quad \int_{\mathfrak{a}^*} \hat{\varphi}_\lambda(z) \overline{\hat{\varphi}_\mu(z)} d\mu(z) = \delta_{\lambda, \mu} v(K \cdot \pi^\lambda) \quad (\forall \lambda, \mu \in \Lambda_n)$$

を示せば十分である。ここで

$$R_\lambda(z) = \sum_{\sigma \in S_n} \sigma \left(q^{<\lambda, z>} c(z) \right)$$

とおくと

$$(1.20) \quad \hat{\varphi}_\lambda(z) = v(K \cdot \pi^\lambda) \Psi_z(\pi^\lambda) = (-1)^{n(\lambda)+|\lambda|} q^{\frac{n-1}{4}|\lambda| - \frac{n(\lambda)}{2}} \frac{(1+q^{-\frac{1}{2}})^n}{w_\lambda^{(n)}(-q^{-\frac{1}{2}})} R_\lambda(z)$$

である。 $t \in \mathbb{Z}$ について $\lambda + t = (\lambda_1 + t, \dots, \lambda_n + t)$ とすると,

$$v(K \cdot \pi^{\lambda+t}) = v(K \cdot \pi^\lambda), \quad \varphi_{\lambda+t}(z) = q^{t(z_1 + \dots + z_n)} \hat{\varphi}_\lambda(z)$$

なので

$$\lambda, \mu \in \Lambda_n^+$$

と仮定して良い。記号の簡略化のために

$$< R_\lambda, R_\mu > = \int_{a^*} R_\lambda(z) \overline{R_\mu(z)} \frac{dz}{|c(z)|^2}$$

とおく。 $|c(z)|^2$ は S_n -不変なので

$$\begin{aligned} \frac{R_\lambda(z)}{|c(z)|^2} &= \sum_{\sigma \in S_n} \sigma \left(q^{<\lambda, z>} \prod_{i < j} \frac{1 - q^{z_i - z_j}}{1 + q^{z_i - z_j - \frac{1}{2}}} \right) \\ &= \sum_{\sigma} \sigma \left(q^{<\lambda, z>} \prod_{i < j} (1 - q^{z_i - z_j}) \sum_{r \geq 0} (-q^{-\frac{1}{2}})^r q^{r(z_i - z_j)} \right). \end{aligned}$$

整理して

$$\frac{R_\lambda(z)}{|c(z)|^2} = \sum_{b \in B} c_b \sum_{\sigma \in S_n} \sigma \left(q^{<\lambda+b, z>} \right)$$

とできる。但し,

$$B = \left\{ \sum_{i < j} m_{ij} e_{ij} \mid m_{ij} \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\},$$

(e_{ij} は 第 i 成分 = 1, 第 j 成分 = -1, その他 = 0 で決まる Λ_n の元)

$$c_b \in \mathbb{R}, \quad c_0 = 1 \quad (0 = (0, \dots, 0) \in B)$$

とする。一方, [M, I-§6, III-§6] により

$$R_\mu(z) = \frac{w_\lambda(-q^{-\frac{1}{2}})}{(1+q^{-\frac{1}{2}})^n} \sum_{\substack{\nu \in \Lambda_n^+ \\ \nu \leq \mu, |\nu| = |\mu|}} d_\nu \sum_{\sigma \in S_n} \sigma(q^{<\nu, z>}).$$

ここで,

$$d_\nu \in \mathbb{C}, \quad d_\mu = \#S_n^\mu \quad (S_n^\mu \stackrel{\text{def}}{=} \{\sigma \in S_n \mid \sigma(\mu) = \mu\})$$

と表される. 従って

$$\langle R_\lambda, R_\mu \rangle = \frac{w_\lambda(-q^{-\frac{1}{2}})}{(1+q^{-\frac{1}{2}})^n} \sum_{b \in B} \sum_{\substack{\nu \in \Lambda_n^+ \\ \nu \leq \mu, |\nu|=|\mu|}} c_b \bar{d}_\nu \sum_{\sigma, \tau \in S_n} \int_{a^*} q^{\langle \sigma(\lambda+b), z \rangle + \langle \tau\nu, -z \rangle} dz$$

を得る. これから $\langle R_\lambda, R_\mu \rangle \neq 0$ ならば $\lambda \leq \mu$ であることが分かる. 一方

$$\langle R_\mu, R_\lambda \rangle = \overline{\langle R_\lambda, R_\mu \rangle}$$

なので, $\lambda \neq \mu$ ならば $\langle R_\lambda, R_\mu \rangle = 0$ である. また

$$\langle R_\lambda, R_\lambda \rangle = \frac{n! w_\lambda(-q^{-\frac{1}{2}})}{(1+q^{-\frac{1}{2}})^n}$$

であり, $d\mu(z)$ の定義と (1.18), (1.20) を合わせて (1.19) を得て証明が終わる. ■

Proof of Theorem 4. $\varphi \in \mathcal{S}(K \backslash X)$ とする. $\forall x \in X$ をとり, $K \cdot x$ の特性関数を ψ と表すと,

$$\varphi(x) = \frac{1}{v(K \cdot x)} \int_{a^*} \hat{\varphi}(z) \overline{\psi(z)} d\mu(z) = \int_{a^*} \hat{\varphi}(z) \overline{\Psi_z(x^{-1})} d\mu(z)$$

となる. (1.17) から

$$\overline{\Psi_z(x^{-1})} = (-1)^{(n+1) \det x} \Psi_z(x)$$

が分かり, 与式を得る. ■

§2 local desities

以下, $m, n \in \mathbb{N}$, $n > m$ とする.

$$X_n = \{x \in GL_n(k) \mid x^* = x\}, \quad X_n(\mathcal{O}) = X_n \cap M_n(\mathcal{O}), \quad K_n = GL_n(0)$$

と定義し, $X_m, X_m(\mathcal{O}), K_m$ も同様に定義する. $\mathfrak{p} = \pi\mathcal{O}$ とおく.

$x \in X_n(\mathcal{O}), y \in X_m(\mathcal{O})$ とする. local density $\mu(y, x)$ と primitive local density $\mu^{pr}(y, x)$ を次のように定義する:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \mu(y, x) &= \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{N_d(y, x)}{q^{dm(n-\frac{m}{2})}}; \\ \mu^{pr}(y, x) &= \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{N_d^{pr}(y, x)}{q^{dm(n-\frac{m}{2})}}, \end{aligned}$$

但し

$$N_d(y, x) = \# \{v \in M_{m,n}(\mathcal{O}/\mathfrak{p}^d) \mid vxv^* \equiv y(\bmod \mathfrak{p}^d)\};$$

$$N_d^{pr}(y, x) = \# \{v \in M_{m,n}(\mathcal{O}/\mathfrak{p}^d) \mid v = \begin{pmatrix} 1_m & 0 \end{pmatrix} \tilde{v} \ (\exists \tilde{v} \in K_n), \ vxv^* \equiv y(\bmod \mathfrak{p}^d)\}.$$

$x' \in K_n \cdot x, \ y' \in K_m \cdot y$ ならば, 定義から明らかに $\mu(y', x') = \mu(y, x), \ \mu^{pr}(y', x') = \mu^{pr}(y, x)$ である.

§1 の後半で準備した記号を使う. 次の補題 ([H1, §2 Theorem]) により, 球関数と局所密度が結びつく.

Lemma 2.1 任意の $\xi \in \Lambda_n^+$ について

$$\begin{aligned} &\omega(\pi^\xi; s_1, \dots, s_m, 0, \dots, 0) \\ &= c_{n,m} \sum_{\lambda \in \Lambda_m^+} \frac{\mu^{pr}(\pi^\lambda, \pi^\xi)}{w_m(\lambda)} \cdot q^{-n(\lambda) - \frac{1}{2}|\lambda|} \omega(\pi^\lambda; s_1, \dots, s_m) \\ &= c_{n,m} \prod_{i=1}^m (1 - q^{-2s_i - \dots - 2s_m - n + i - 1}) \sum_{\lambda \in \Lambda_m^+} \frac{\mu(\pi^\lambda, \pi^\xi)}{w_m(\lambda)} \cdot q^{-n(\lambda) - \frac{1}{2}|\lambda|} \omega(\pi^\lambda; s_1, \dots, s_m), \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} c_{n,m} &= \frac{w_m(q^{-1})w_{n-m}(q^{-1})}{w_n(q^{-1})}; \\ w_m(\lambda) &= w_\lambda^{(m)}(-q^{-\frac{1}{2}}) \quad \text{for } \lambda \in \Lambda_m^+. \end{aligned}$$

Theorem 6 任意の $\xi \in \Lambda_n^+$, $\lambda \in \Lambda_m^+$ について

$$\begin{aligned} \mu^{pr}(\pi^\lambda, \pi^\xi) &= (-1)^{n(\xi)+n(\lambda)+(m-n+1)|\xi|+|\lambda|} q^{\frac{1}{2}(n(\xi)+n(\lambda)+(m-n+1)|\xi|)} \times w_n(\xi) \\ &\quad \times \sum_{\mu, \nu}^I \left\{ (-1)^{n(\nu)+|\nu|} q^{-\frac{n(\nu)}{2}} f_{\mu\nu}^\lambda(-q^{-\frac{1}{2}}) \frac{b_\nu(-q^{-\frac{1}{2}})}{w_{n-m}(\nu)} \right. \\ &\quad \left. \times P_{\xi/\mu}(1, -q^{\frac{1}{2}}, \dots, (-q^{\frac{1}{2}})^{n-m-1}; -q^{-\frac{1}{2}}) \right\}. \end{aligned}$$

ここで $\sum_{\mu, \nu}^I$ において μ, ν は

$$\mu \in \Lambda_m^+, \nu \in \Lambda_m^+ \cap \Lambda_{n-m}^+, \mu \subset \xi \cap \lambda, \nu \subset \lambda, |\lambda| = |\mu| + |\nu|, 0 \leq {}^t\xi_i - {}^t\mu_i \leq n-m \ (i \geq 1)$$

をみたすものの全体を動く。

Proof. $z_1, \dots, z_m$ を $s_1, \dots, s_m$ に対応する z -変数, $z_1^{(n)}, \dots, z_n^{(n)}$ を $s_1, \dots, s_m, 0, \dots, 0$ に対応する z -変数とする。

$$[A] \stackrel{\text{def}}{=} \omega(\pi^\xi; s_1, \dots, s_m, 0, \dots, 0) / \omega(1_m; s_1, \dots, s_m)$$

を 2 通りに $P_\lambda(z) = P_\lambda(q^{z_1}, \dots, q^{z_m}; -q^{-\frac{1}{2}})$ ($\lambda \in \Lambda_m^+$) を係数とする等式に展開し, その係数を比べて局所密度を求める。

まず, Lemma 2.1 と Theorem 1 により,

$$(2.2) \quad [A] = \frac{c_{n,m}}{w_m(-q^{-\frac{1}{2}})} \sum_{\lambda \in \Lambda_m^+} \mu^{pr}(\pi^\lambda, \pi^\xi) (-1)^{n(\lambda)+|\lambda|} q^{-\frac{n(\lambda)}{2} - \frac{m+1}{4}|\lambda|} P_\lambda(z).$$

一方, 直接 Theorem 1 を用いて

$$\omega(\pi^\xi; s_1, \dots, s_m, 0, \dots, 0) = (-1)^{n(\xi)+|\xi|} q^{\frac{n(\xi)}{2} - \frac{n-1}{4}|\xi|} (1 - q^{-\frac{1}{2}})^n \frac{w_n(\xi)}{w_n(q^{-1})} \times [B] \times [P_\xi];$$

ここで

$$\begin{aligned} [P_\xi] &\stackrel{\text{def}}{=} P_\xi(q^{z_1^{(n)}}, \dots, q^{z_n^{(n)}}; -q^{-\frac{1}{2}}) \\ &= (-1)^{(m-n)|\xi|} q^{\frac{m-n}{4}|\xi|} P_\xi(q^{z_1}, \dots, q^{z_m}, q^{\frac{m+1}{4}}, (-q^{\frac{1}{2}})q^{\frac{m+1}{4}}, \dots, (-q^{\frac{1}{2}})^{n-m-1}q^{\frac{m+1}{4}}; -q^{-\frac{1}{2}}) \\ &= (-1)^{(m-n)|\xi|} q^{\frac{2m-n+1}{4}|\xi|} \sum_{\substack{\mu \in \Lambda_m^+ \\ 0 \leq {}^t\xi_i - {}^t\mu_i \leq n-m}} q^{-\frac{m+1}{4}|\mu|} P_{\xi/\mu}(1, -q^{\frac{1}{2}}, \dots, (-q^{\frac{1}{2}})^{n-m-1}; -q^{-\frac{1}{2}}) P_\mu(z); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[B] &\stackrel{\text{def}}{=} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1 - q^{z_i^{(n)} - z_j^{(n)} - \frac{1}{2}}}{1 + q^{z_i^{(n)} - z_j^{(n)}}} \\
&= \prod_{1 \leq i < j \leq m} \frac{1 - q^{z_i - z_j - \frac{1}{2}}}{1 + q^{z_i - z_j}} \times \prod_{\substack{1 \leq i \leq m \\ m < j \leq n}} \frac{1 - (-1)^{m-j+1} q^{z_i + \frac{m-2j-1}{4}}}{1 + (-1)^{m-j+1} q^{z_i + \frac{m-2j+1}{4}}} \\
&\quad \times \prod_{i=m+1}^{n-1} \prod_{j=i+1}^n \frac{1 - (-1)^{i-j} q^{\frac{i-j-1}{2}}}{1 + (-1)^{i-j} q^{\frac{i-j}{2}}} \\
&= \prod_{1 \leq i < j \leq m} \frac{1 - q^{z_i - z_j - \frac{1}{2}}}{1 + q^{z_i - z_j}} \times \prod_{\substack{1 \leq i \leq m \\ m < j \leq n}} \frac{1 - (-q^{-\frac{1}{2}}) q^{z_i} \cdot (-1)^{j-m} q^{\frac{m-2j+1}{4}}}{1 - q^{z_i} \cdot (-1)^{j-m} q^{\frac{m-2j+1}{4}}} \\
&\quad \times \frac{w_{n-m}(q^{-1})}{w_{n-m}(-q^{-\frac{1}{2}})(1 - q^{-\frac{1}{2}})^{n-m}}.
\end{aligned}$$

上の第2の因子 ($1 \leq i \leq m$ と $m < j \leq n$ に関する積の部分) は (1.14) によって, さらに

次のように変形される:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\nu \in \Lambda_m^+ \cap \Lambda_{n-m}^+} (-q^{-\frac{m+1}{4}})^{|\nu|} b_\nu(-q^{-\frac{1}{2}}) P_\nu(z) P_\nu(1, -q^{-\frac{1}{2}}, \dots, (-q^{-\frac{1}{2}})^{n-m-1}; -q^{-\frac{1}{2}}) \\
&= w_{n-m}(-q^{-\frac{1}{2}}) \sum_{\nu \in \Lambda_m^+ \cap \Lambda_{n-m}^+} (-1)^{n(\nu)+|\nu|} q^{-\frac{n(\nu)}{2} - \frac{m+1}{4}|\nu|} \times \frac{b_\nu(-q^{-\frac{1}{2}})}{w_{n-m}(\nu)} P_\nu(z).
\end{aligned}$$

さて

$$\omega(1_m; s_1, \dots, s_m) = (1 - q^{-\frac{1}{2}})^m \frac{w_m(-q^{-\frac{1}{2}})}{w_m(q^{-1})} \prod_{1 \leq i < j \leq m} \frac{1 - q^{z_i - z_j - \frac{1}{2}}}{1 + q^{z_i - z_j}}$$

であるから, 上の計算と合わせて

$$\begin{aligned}
[A] &= (-1)^{n(\xi)+(m-n+1)|\xi|} q^{\frac{n(\xi)}{2} + \frac{m-n+1}{2}|\xi|} c_{n,m} \frac{w_n(\xi)}{w_m(-q^{-\frac{1}{2}})} \\
&\times \sum_{\nu \in \Lambda_m^+ \cap \Lambda_{n-m}^+} \frac{(-1)^{n(\nu)+|\nu|} q^{-\frac{n(\nu)}{2} - \frac{m+1}{4}|\nu|} b_\nu(-q^{-\frac{1}{2}})}{w_{n-m}(\nu)} \\
&\times \sum_{\substack{\mu \in \Lambda_m^+ \\ 0 \leq {}^t\xi_i - {}^t\mu_i \leq n-m}} q^{-\frac{m+1}{4}|\mu|} P_{\xi/\mu}(1, -q^{\frac{1}{2}}, \dots, (-q^{\frac{1}{2}})^{n-m-1}; -q^{-\frac{1}{2}}) \\
&\times \sum_{\lambda \in \Lambda_m^+} f_{\mu,\nu}^\lambda(-q^{-\frac{1}{2}}) P_\lambda(z) \\
&= (-1)^{n(\xi)+(m-n+1)|\xi|} q^{\frac{n(\xi)}{2} + \frac{m-n+1}{2}|\xi|} c_{n,m} \frac{w_n(\xi)}{w_m(-q^{-\frac{1}{2}})} \\
(2.3) \quad &\times \sum_{\lambda \in \Lambda_m^+} q^{-\frac{m+1}{4}|\lambda|} P_\lambda(z) \left\{ \sum_{\mu,\nu} {}^l (-1)^{n(\nu)+|\nu|} q^{-\frac{n(\nu)}{2}} \frac{b_\nu(-q^{-\frac{1}{2}})}{w_{n-m}(\nu)} \right. \\
&\times \left. P_{\xi/\mu}(1, -q^{\frac{1}{2}}, \dots, (-q^{\frac{1}{2}})^{n-m-1}; -q^{-\frac{1}{2}}) f_{\mu,\nu}^\lambda(-q^{-\frac{1}{2}}) \right\}.
\end{aligned}$$

(2.3), (2.3) において $P_\lambda(z)$ の係数を比べて整理して与式を得る. ■

Theorem 7 任意の $\xi \in \Lambda_n^+$, $\lambda \in \Lambda_m^+$ について

$$\begin{aligned}
\mu(\pi^\lambda, \pi^\xi) &= (-1)^{n(\xi)+n(\lambda)+(m-n+1)|\xi|+|\lambda|} q^{\frac{1}{2}(n(\xi)+n(\lambda)+(m-n+1)|\xi|)} \times \frac{w_n(\xi)}{w_{n-m}(-q^{-\frac{1}{2}})} \\
&\times \sum_{\mu,\nu} {}^l \left\{ (-1)^{(n-m)|\nu|} q^{-\frac{n-m}{2}|\nu|} a_{n,m}(\nu) f_{\mu,\nu}^\lambda(-q^{-\frac{1}{2}}) \right. \\
&\times \left. P_{\xi/\mu}(1, -q^{\frac{1}{2}}, \dots, (-q^{\frac{1}{2}})^{n-m-1}; -q^{-\frac{1}{2}}) \right\},
\end{aligned}$$

ここで $\sum_{\mu,\nu} {}^l$ において μ, ν は

$$\mu \in \Lambda_m^+, \nu \in \Lambda_m^+, \mu \subset \xi \cap \lambda, \nu \subset \lambda, |\lambda| = |\mu| + |\nu|, 0 \leq {}^t\xi_i - {}^t\mu_i \leq n-m \quad (i \geq 1)$$

をみたすもの全体を動き,

$$a_{n,m}(\nu) = \sum_{\substack{\tau=(\tau_1, \tau_2) \in \Lambda_m^+ \cap \Lambda_2^+ \\ \tau \geq \nu, |\tau| = |\nu|}} K_{\tau\mu}(-q^{-\frac{1}{2}}) \\ \frac{\left((-1)^{(n-m-1)\tau_1} q^{\frac{n-m}{2}\tau_1} + (-1)^{n-m} q^{\frac{m-n}{2}} (-1)^{(n-m-1)\tau_2} q^{\frac{n-m}{2}\tau_2} \right)}{1 + (-1)^{n-m} q^{\frac{m-n}{2}}}$$

とする ($K_{\tau\mu}(-q^{-\frac{1}{2}})$ については (1.16) を参照).

Proof. . Lemma 2.1 と Theorem 1 により, 次の等式を得る:

$$(2.4) \quad \frac{c_{n,m}}{w_m(-q^{-\frac{1}{2}})} \sum_{\lambda \in \Lambda_m^+} (-1)^{n(\lambda)+|\lambda|} q^{n(\lambda)-\frac{m+1}{4}|\lambda|} \mu(\pi^\lambda, \pi^\xi) P_\lambda(z) \\ = \prod_{i=1}^m \left(1 - q^{-2s_i - \dots - 2s_m - n + i - 1} \right)^{-1} \frac{\omega(\pi^\xi; s_1, \dots, s_m, 0, \dots, 0)}{\omega(1_m; s_1, \dots, s_m)}.$$

Theorem 6 の証明の [B] の第 2 の因子について

$$\prod_{1 \leq i \leq m} \prod_{r=1}^{n-m} \frac{1 + (-1)^r q^{z_i - \frac{2r+m+1}{4}}}{1 - (-1)^r q^{z_i - \frac{2r+m-1}{4}}} = \prod_{1 \leq i \leq m} \frac{1 + (-1)^{n-m} q^{z_i + \frac{m-2n-1}{4}}}{1 + q^{z_i - \frac{m+1}{4}}}$$

となるので,

$$\prod_{i=1}^m \left(1 - q^{-2s_i - \dots - 2s_m - n + i - 1} \right)^{-1}$$

と合わせて (1.15), (1.16) を使うと

$$\begin{aligned}
& \prod_{1 \leq i \leq m} \frac{1}{(1 + q^{z_i - \frac{m+1}{4}})(1 - (-1)^{n-m} q^{z_i + \frac{m-2n-1}{4}})} \\
&= \sum_{\tau \in \Lambda_m^+ \cap \Lambda_2^+} P_\tau(q^{z_1}, \dots, q^{z_m}; 0) P_\tau(-q^{-\frac{m+1}{4}}, (-1)^{n-m} q^{\frac{m-2n-1}{4}}; 0) \quad (\text{by (1.15)}) \\
&= \sum_{\tau \in \Lambda_m^+ \cap \Lambda_2^+} \left\{ \sum_{\substack{\nu \in \Lambda_m^+ \\ \tau \geq \nu, |\tau| = |\nu|}} K_{\tau, \nu}(-q^{-\frac{1}{2}}) P_\nu(z) \right\} (-1)^{(n-m)|\tau|} q^{\frac{m-2n-1}{4}|\tau|} \\
&\quad \times \frac{\left((-1)^{(n-m-1)\tau_1} q^{\frac{n-m}{2}\tau_1} + (-1)^{n-m} q^{\frac{m-n}{2}} (-1)^{(n-m-1)\tau_2} q^{\frac{n-m}{2}\tau_2} \right)}{1 + (-1)^{n-m} q^{\frac{m-n}{2}}} \\
&= \sum_{\nu \in \Lambda_m^+} (-1)^{(n-m)|\nu|} q^{\frac{m-2n-1}{4}|\nu|} a_{n,m}(\nu) \cdot P_\nu(z).
\end{aligned}$$

Theorem 6 の証明で計算してある残りの部分と合わせると,

$$\begin{aligned}
(2.4) \text{ の右辺} &= c_{n,m} \frac{w_n(\xi)}{w_m(-q^{-\frac{1}{2}})w_{n-m}(-q^{-\frac{1}{2}})} (-1)^{n(\xi)+(m-n+1)|\xi|} q^{\frac{n(\xi)}{2} + \frac{m-n+1}{2}|\xi|} \\
&\quad \times \sum_{\substack{\mu \in \Lambda_m^+ \\ 0 \leq \iota \xi_i - \iota \mu_i \leq n-m}} q^{\frac{m+1}{4}|\mu|} P_{\xi/\mu}(1, -q^{\frac{1}{2}}, \dots, (-q^{\frac{1}{2}})^{n-m-1}; -q^{-\frac{1}{2}}) P_\mu(z) \\
&\quad \times \sum_{\nu \in \Lambda_m^+} q^{\frac{m-2n-1}{4}|\nu|} (-1)^{(n-m)|\nu|} a_{n,m}(\nu) P_\nu(z) \\
&= c_{n,m} \frac{w_n(\xi)}{w_m(-q^{-\frac{1}{2}})w_{n-m}(-q^{-\frac{1}{2}})} (-1)^{n(\xi)+(m-n+1)|\xi|} q^{\frac{n(\xi)}{2} + \frac{m-n+1}{2}|\xi|} \\
&\quad \times \sum_{\lambda \in \Lambda_m^+} P_\lambda(z) \left\{ \sum'_{\mu, \nu} f_{\mu, \nu}^\lambda(-q^{-\frac{1}{2}}) q^{\frac{m+1}{4}|\mu|} P_{\xi/\mu}(1, -q^{\frac{1}{2}}, \dots, (-q^{\frac{1}{2}})^{n-m-1}; -q^{-\frac{1}{2}}) \right. \\
&\quad \left. \times q^{\frac{m-2n-1}{4}|\nu|} (-1)^{(n-m)|\nu|} a_{n,m}(\nu) P_\nu(z) \right\}.
\end{aligned}$$

この式と (2.4) の左辺における $P_\lambda(z)$ の係数を比べ、整理して与式を得る。 ■

References

- [C] W. Casselman: The unramified principal series of $\mathfrak{p}$ -adic groups I. The spherical functions, *Compositio Mathematica* **40**(1980), 387–406.
- [H1] Y. Hironaka: Spherical functions of hermitian and symmetric forms I, *Japanese Journal of Mathematics* **14**(1988), 203–223.
- [H2] Y. Hironaka: Spherical functions of hermitian and symmetric forms II, *Japanese Journal of Mathematics* **15**(1989), 15–51.
- [H3] Y. Hironaka: Spherical functions of hermitian and symmetric forms III, *Tôhoku Mathematical Journal of Mathematics* **40**(1988), 651–671.
- [H4] Y. Hironaka: Spherical functions of hermitian and symmetric forms over 2-adic fields, *Comment. Math. Univ. St. Pauli* **39**(1990), 157–193.
- [HS] Y. Hironaka and F. Sato: Spherical functions and local densities of alternating forms, *American Journal of Mathematics* **110**(1986), 473–512.
- [LS] A. Lascoux and M. P. Schützenberger: Sur la conjecture de H. O. Foulkes, *C. R. Acad. Sci. Paris* **286A**(1978), 323–324.
- [M] I. G. Macdonald: *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, Oxford Mathematical Monographs, 1979