

超函数論 (Hyperfunction) における
Fourier 変換の理論と その応用.

河合 隆裕

目 次

Ch. 0 序

Ch. 1 Fourier 変換

§ 1 Fourier 変換の掛え方 及び 定義

§ 2 Vanishing of cohomology

§ 3 $\mathcal{Q}(K)$ における近似定理

§ 4 Fourier 超函数の空間の性質

§ 5 Fourier (-Carleman - Leray - Sato) 変換

Ch. 2. 超函数論における一般線型偏微分方程式論

§ 1 除法問題 (general type) の考察

§ 2 Ellipticity, Partial Ellipticity

§ 3 Propagation of regularity

§ 4 Hyperbolicity

§ 5 Problems of unique continuation

Ch. 0. 序

„Generalized function”の理言命は、 S -
 函数, 一般に singular integral の意味付けと。
 Fourier変換の理論の拡張とをえつの動機
 として形成されてきたと言ってもよいだろう。前
 著の目的には 超函数 (以下この小文では、
 Hyperfunction を超函数と呼び、Schwartz
 の „超函数” は distribution と呼ぶことに
 する。) は極めて自然でありしかも 偏微分方
 程式論にも極めて有用であることが即ち知
 られている。(佐藤 [41], [42], [43],
 小松 [27], [28], [48], Harvey [15],
 Schapira [45] 等。) では、後著の目的の爲には
 超函数的 approach は如何に行えばよいであ
 るうか。1. その解析学への有効性はどのよう
 な物であろうか。それに答えることを以下の
 目標とする。基本的 idea は佐藤 [41]
 (p.23~p.25.) にある。方法は、Hörmander
 [19], 小松 [26], [28], Martineau [36],
 [38] の影響が大きい。特に Hörmander

[19] は決定的に有用であった。更に Ch. 2. においては, Ehrenpreis [4] ~ [7], Malgrange [33], [35], Hörmander [17], [18], の仕事を超函数論の枠の中で考えることにより一般化する。超函数論が偏微分方程式論で極めて有効であることが知られるであろう。^{特に} Ch. 2 §3 の論法は実解析函数の取り扱いにおいて、かなり有効な物であると思う。又、Ch. 2 §1 の結果は自然な物で、さして驚くべき物では甘いか。その方法論はかなり興味深いと思われる。尚 Ch. 2 §5 は、やや他の節とは異質であるが、§4 の後半と深く関係するので、この小文に含めることとした。

最後に、この周辺への興味をかきたて、かつ終始適切な御助言を賜った佐藤・小松両先生に御礼を申し上げたい。このお二人無しにはこの小文は書かれ得なかつたであらう。又、「佐藤・小松 セミナー」の参加者の方々からは多くの刺激を受けた。特に藤原・森本両先生にはい

3 いろいろ相談相手になって頂いたことに對し
 感謝致します。又、Gårding 教授には、^{Ch. 2.} §4
 Th 4.3.2. について suggestion を頂いたことを感謝
 致します。又、Martineau 教授には、Ch. 2. §2.
 における Def. 2.1. 12. を得る動機を与えられたこと
 を感謝致します。

Ch. 1. Fourier 変換

§1 Fourier 変換の捕え方 及び 定義

この節では, Fourier 変換を超函数論の立場から捕えるには どのように考えればよいか, という事について考察し, 次にその考えを定式化する為に必要となる $\mathbb{R}^n$ のある compactification 及び それに関連した sheaf の定義を行う。そして それらを用いて, Ch 1 で得られる結果 (§4 参照) を要約しておく。

1.1. 出発点 (佐藤 [4]) 参照)

Fourier 変換の基本公式, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} dx = 2\pi \delta(\xi)$ をどのように捕えるのが 最も自然であろうか。多分 distribution を知らない物理学者なら次のようにあるのではあるまいか。

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} dx &= \int_{-\infty}^0 e^{ix\xi} dx + \int_0^{\infty} e^{ix\xi} dx \\ &= \begin{cases} \frac{1}{i\xi} & (\text{Im } \xi < 0) \\ \oplus \\ -\frac{1}{i\xi} & (\text{Im } \xi > 0) \end{cases} \end{aligned}$$

ここで $\text{Im } \xi$ を 仮想的に 0 とすれば,

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixs} dx$ は実軸上、原点を除いて
 0 かつ、原点で 特異性を持つことが
 わかる。もしその物理学者が、Cauchy
 の積分公式を知っているなら、その特異性
 は δ -函数に相当することを見抜くであろう。

正に、これは 超函数論的に Fourier 変換を
 捕えたことになる。しかも、Fourier 解析が、
 元来、“singular な函数”を解析函数を用い
 て研究しようとする物であったとすれば、その考
 え方に もっとも忠実な立場でもある。

しかし、上の“物理学者の考え方”には、また
 数学的には 一つ問題がある。それは 原点での
 ambiguity である。実際、 $\int_{-\infty}^0 e^{ixs}(1+\delta(x))dx$
 $+\int_0^{\infty} e^{ixs}(1-\delta(x))dx$ 等と上の積分を考えて

はいけない、という理由はない。しかし、それは
 一般に 原点に support をもつ 超函数の
 Fourier 像だけの ambiguity, 即ち、
 entire であって しかも $\forall \varepsilon > 0 \quad O(e^{\varepsilon|s|})$
 の程度の増大度をもつような 函数である。

従って、実軸を越えて正則な函数で、しかも無限遠方である増大度をもつものを modulo として $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} dx$ は 補えるのがより適切である。しかも、我々は $\mathbb{R}^n$ の上で analysis を行っているのだから、 $\mathbb{C}^n$ 全体が essential に用いられる必要もないはずである。そこで我々は、増大度を補える為に、 $\mathbb{R}^n$ の compact 化 D^n を作り、 $D^n \times \sqrt{-1}\mathbb{R}^n$ 上にある sheaf $\mathcal{O}$ を定義して、それに關する (D^n に support をもつ) relative cohomology 群として Fourier 超函数の空間 $\mathcal{G}(D^n)$ を作る。

更にこれを局所化することも考えた方が微分方程式論の立場からは都合がよい。(Schwartz の理論において、 $\mathcal{G}'$ は sheaf を為さないことに注意しよう。)

以上が、Fourier 変換を超函数的に補えようという以下の試みの出発点である。

1.2. 定義

Def. 1.2.1. $D^n \equiv \mathbb{R}^n \cup S_{\infty}^{n-1}$, $\mathbb{R}PS, D^n$ と

は $\mathbb{R}^n$ に 無限遠球面 S_∞^{n-1} を付加した物。
 $\mathbb{D}^n$ の 開集合の base としては,

- $\left\{ \begin{array}{l} \text{i) open convex cone} \\ \text{ii) } \mathbb{R}^n \text{ 内の open, relatively compact,} \\ \text{convex. な集合} \end{array} \right.$ の全体をとることに

する。

$\mathbb{D}^n \times i\mathbb{R}^n$ ($i=\sqrt{-1}$) の $\mathbb{D}^n$ の 位相 から 誘導される直積位相を与える。

Def. 1.2.2 (sheaf $\tilde{\mathcal{O}}$ の定義)

$$\tilde{\mathcal{O}}_x = \begin{cases} \mathcal{O}_x & x \in \mathbb{R}^n \times i\mathbb{R}^n \\ \varinjlim_{K \times iI \downarrow \{x\}} \tilde{\mathcal{O}}(K \times iI) & x \in S_\infty^{n-1} \times i\mathbb{R}^n \end{cases}$$

$$\text{但し } \tilde{\mathcal{O}}(K \times iI) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ f(z) \in \mathcal{O}(K \times iI \cap \mathbb{R}^n \times i\mathbb{R}^n) \mid \forall \varepsilon > 0 \exists A_\varepsilon \text{ s.t. } |f(z)| \leq A_\varepsilon e^{\varepsilon|z|} \right\}$$

勿論 $\mathcal{O}$ は 通常の正則函数の sheaf.

Def. 1.2.3 (sheaf $\mathcal{Q}$ の定義)

$$\mathcal{Q}_x = \begin{cases} \mathcal{O}_x & x \in \mathbb{R}^n \times i\mathbb{R}^n \\ \cdot & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\left| \lim_{K_m \times i I_m} \mathcal{O}^m(K_m \times i I_m) \quad x \in S_{\infty}^{n-1} \times i \mathbb{R}^n \right.$$

$$\text{但し, } \mathcal{O}^m(K_m \times i I_m) \stackrel{\text{def}}{=} \{ f \in \mathcal{O}(K_m \times i I_m \cap \mathbb{R}^n \times i \mathbb{R}^n) \mid |f(z)| \leq A e^{-\frac{1}{m}|z|} \}$$

勿論, $\mathcal{O}_x$ の定義が x の基本近傍系 $K_m \times i I_m$ の取り方によらないことは明らか。

Def. 1.2.4 (Fourier 超函数の空間の定義)

$\Omega \subset \mathbb{D}^n$ とし,

$$H_{\Omega}^n(V, \tilde{\mathcal{O}}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{O}(\Omega) \quad (\text{但し, } V \text{ は } \Omega \text{ の } \mathbb{D}^n \times i \mathbb{R}^n \text{ での近傍, かつ } \Omega \text{ は } V \text{ 内での開集合}).$$

特に $\Omega = \mathbb{D}^n$ の時の $\mathcal{O}(\mathbb{D}^n)$ を, 急増加

Fourier 超函数の空間と呼ぶ。

又, $\mathcal{O}(\mathbb{D}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{O}_*$ を, 急減少正則函数の空間と呼ぶ。

勿論, 定義から, $f(z) \in \mathcal{O}_* \iff \exists \delta > 0$

s.t. $f(z) \in \mathcal{O}(|\operatorname{Im} z| < \delta)$ かつ, そこで

$|f(z)| \leq A e^{-\delta|z|}$ である。

1.3. Fourier 超函数の基本的性質 (要約)

(証明 etc. は §4, §5 参照)

i) $\{Q(\Omega)\}$ は $\mathcal{D}$ 上の flabby sheaf

ii) $K \subset \mathcal{D}$ (K : compact) とする時

$$H_K^n(\tilde{\mathcal{O}}) \cong (Q(K))' \quad \text{特に}$$

$$Q(\mathcal{D}) \cong (\mathcal{O}_*)' \quad \text{これらは FS-space}$$

と DFS-space の間の pairing となつて

いる。(FS-space, DFS-space の定

義, 性質については, 小松 [26], [28]

参照)

iii) $Q(\mathcal{D}) \ni \mu$ に対し $\mu = \sum_{j=1}^{2^n} \mu_j$, 但

し $\text{supp } \mu_j \subset$ 開第 j 象限. と分解す

る時, $\langle \mu_j, e^{izs} \rangle_{\mathcal{O}} = F_j(s)$ は $s \in \mathbb{R}^n \times$

$\sqrt{-1}$ (開第 j 象限) として well-defined

かつ 正則であり, しかも, $\{F_1, \dots, F_{2^n}\}$

は $H_{\mathcal{D}}^n(\tilde{\mathcal{O}})$ の (Čech cohomology として

の表現として) 元を定める。これは

cohomology class として, μ にのみ依

存し well-defined である。これを, $\mathcal{F}_s \mu$

(略して $\mathcal{F}\mu$) と書く。

iv) 一方 $\mathcal{O}_*$ は 容易に判るように classical な Fourier 変換 に対して stable であり、

従って duality により, $\mathcal{Q}(\mathcal{D}) (\equiv (\mathcal{O}_*)')$

の元 μ の Fourier 変換 $\mathcal{F}_d$ を定義できる。

これは $\mathcal{Q}(\mathcal{D})$ と $(\mathcal{O}_*)'$ の 自然な対応によ

り, iii) の $\mathcal{F}_S$ と一致する。即ち。

$$\sum \int_{-\infty \pm i0}^{\infty \pm i0} F_j(s) \varphi(s) ds = \langle \mu, \hat{\varphi} \rangle_{\text{by def.}} = \langle \mathcal{F}_d \mu, \varphi \rangle$$

が成立する。ここで $\int_{-\infty \pm i0}^{\infty \pm i0} ds$ etc. は、

$\varphi(s)$ の 正則域 に応じて 十分小さい ε をとって

$$\int_{-\infty + i\varepsilon(1,1,\dots,1)}^{\infty + i\varepsilon(1,1,\dots,1)} ds \quad \text{なる積分を行うの意である。}$$

(それは 定義から ε のとり方に 依存しな

い。 ($\because$ Cauchy の 積分定理)) もちろん

Σ は $(\underbrace{\pm 1, \pm 1, \dots, \pm 1}_{j \text{ 個}})$ の すべての 組み合

せについての 和の意である。

§2 Vanishing of cohomology

この節では、 $D^n \times i\mathbb{R}^n$ の中の十分沢山の集合に対して、 $\bar{\partial}$ -係数の p -次 cohomology 群が、 $p \geq 1$ の時消滅することを証明する。

通常の Cartan の Th. A., B. が超関数論で重要であったのと同じように、この節と次節は Fourier 変換の基礎付けで重要な物である。

1. Ehrenpreis および Hörmander による所謂 "cohomology with bounds" の理論の一つの改良とも見よう。(その idea は佐藤 [4/] による。)

この節は Hörmander [19] の hard analysis を小松 [26] の soft analysis を用いて我々に都合のよい形に書き直したものである。

2.1 Vanishing of cohomology

Th. 2.1.1. Ω を $\mathbb{C}^n$ 内の擬凸領域、

$\sup_{z \in \Omega} |\operatorname{Im} z| \leq M < \infty$ とする。この時、 φ

を Ω での多重劣調和函数として、

$$X_{j, \bar{\partial} f} \{ u \in L^2_{(p, q-1)}(\Omega; \frac{1}{j} |z| +$$

$$\{ \log(1+|z|^2) + \varphi(z) \},$$

$$Y_j \stackrel{\text{def}}{=} \{ u \in L^2_{(p,q)}(\Omega; \frac{1}{j}|z| + 2\log(1+|z|^2) + \varphi(z)) \},$$

$$Z_j \stackrel{\text{def}}{=} \{ u \in L^2_{(p,q+1)}(\Omega; \frac{1}{j}|z| + \varphi(z)) \}$$

$$\text{と定め, } X \stackrel{\text{def}}{=} \varprojlim_j X_j, \quad Y \stackrel{\text{def}}{=} \varprojlim_j Y_j,$$

$$Z \stackrel{\text{def}}{=} \varprojlim_j Z_j \text{ と定義する。ここで記号は}$$

$$\text{Hörmander [19] に従った。即ち } L^2_{(p,q)}(\Omega; \varphi(z)) \ni f \iff f \text{ は } (p,q)\text{-form } \sum_{|I|+p, |J|+q} f_{I,J} dz^I \wedge d\bar{z}^J$$

$$\text{であって } \sum \int |f_{I,J}|^2 e^{-\varphi(z)} dV < \infty$$

となる物, とする。又, $|z|$ は, $Z_j=0$ の付近では適宜に修正して, $\mathbb{C}^n$ 上で C^∞ かつ convex となるようにしてあるとする。この時,

$$X \xrightarrow{\bar{\partial}} Y \xrightarrow{\bar{\partial}} Z \text{ は exact である。}$$

ここで $\bar{\partial}$ は, distribution sense で定められた densely-defined closed operator である。

証明] $(X_j)'$ etc. の表現空間として,

$$L^2_{(p,q-1)}(\Omega, -\frac{1}{j}|z| - 4\log(1+|z|^2) - \varphi(z))$$

etc. を各々 とることにしておけば, $\bar{\partial}$ の

adjoint operator は ∂ となる。(但し,

$$\partial f \stackrel{\text{Def}}{=} (-1)^{p-1} \sum'_{I,k} \sum_j \frac{\partial f_{I,jk}}{\partial z_j} dz^I \wedge d\bar{z}^k$$

$$\begin{aligned} \text{ここで: } \sum t_j \bar{t}_k \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} \log(1+|z|^2) \\ = (1+|z|^2)^{-2} (|t|^2 (1+|z|^2) - |\langle t, z \rangle|^2) \\ \geq (1+|z|^2)^{-2} |t|^2 \text{ により, Hörmander [19]} \end{aligned}$$

p. 105. Th. 2.2.1' を用いると,

$$X_j \xrightarrow{\bar{\partial}} Y_j \xrightarrow{\bar{\partial}} Z_j \text{ が exact になる。}$$

従って $X'_j \xleftarrow{\bar{\partial}} Y'_j \xleftarrow{\bar{\partial}} Z'_j$ も exact.

一方, X'_j etc は Hilbert 空間故,
その injective limit X' etc は明らかに
DFS*-space となる。(小松 [26] p. 368.

参照。ここで DFS*-space とは, Banach
空間 X_j と $X_j \xrightarrow{u_{jk}} X_k$ なる 弱compact
写像の pair により定まる injective limit
の空間を言うのであった。) 従って DFS*-
space に対する Serre - 小松の補題
(小松 [26] p. 381 Th. 19. 即ち

$$X \xrightarrow{u_1} Y \xrightarrow{u_2} Z \text{ が } u_0 \circ u_1 = 0 \text{ を満たし}$$

しかも $\text{Im } u_1, \text{Im } u_2$ が "closed" なら
 $(\text{Ker } u_2 / \text{Im } u_1)' \cong \text{Ker } u_2 / \text{Im } u_1$ に
 なる, という定理) により, $q > 1$ ならば,
 定理は明らかである。

$q=1$ の時は別の考察を必要とする。線型
 位相空間の一般論から, $\text{Im } \mathcal{N} \cap V^\circ$ が "closed"
 (但し V は X の 0 の近傍) を
 言えはよい。 (V° は V の polar set) 再
 び DFS*-space の一般論により (小糸公 [26]
 p. 373. Th. 6) により, $\text{Im } \mathcal{N} \cap V^\circ = \exists u_j (\exists B_j)$
 $B_j \subset \exists X_j'$ (但し B_j は X_j' の有界集合で,
 u_j は weakly homeo) として今
 $\mathcal{N}u_v \rightarrow f \in V^\circ$ とすると $\mathcal{N}u_v \xrightarrow{w} f$
 (in X_j') ここで次の補題に注意しよう。
 Lem. 2.1.2. $u \in Y_{j+1}', \mathcal{N}u \in X_j'$ ならば
 $\exists v \in Y_j'$ があって $\mathcal{N}v = \mathcal{N}u$

補題の証明. $j=1$ として一般性は
 失われない。 $\varphi_n = \exp(-\frac{1}{n} \bar{z}^2)$ とする
 と, $\mathcal{N}$ の定義により, $\mathcal{N}(\varphi_n u) = \varphi_n \mathcal{N}u$
 今 $\sup_{z \in \Omega} |\text{Im } z| < \infty$ と仮定しているから

V

明らかに $\varphi_n u \in Y_1'$ 且 $\varphi_n \rightarrow 1$ (point-wise) 故. Lebesgue の収束定理 により
 $\varphi_n \partial u \rightarrow \partial u$ (in X_1') 従って
 $\varphi_n \partial u = \partial(\varphi_n u) \in \partial(Y_1')$ だから. ∂ が
 $Y_1' \rightarrow X_1'$ の作用素として closed range
 (p.13.) であることにより, $\partial u \in \partial(Y_1')$
 i.e. $\exists v \in Y_1'$ s.t. $\partial u = \partial v$

従って この補題 により. $\partial u_v \in X_j'$ だけでなく 更に $u_v \in Y_j'$ と仮定しても 一般性は失
 われない。すると $\partial(Y_j')$ は 弱閉にもなるから
 ($\because \partial(Y_j')$ は linear space) $f \in \partial(Y_j')$
 故に $\exists v$ s.t. $\partial u_v \xrightarrow{w} \partial v = f$ 従って
 $\mathcal{DFS}^+$ -space は reflexive 故 (小松
 [26] p.372. Th. 6) $\bar{\partial}$ は closed range
 従って 再び Serre - 小松の補題に
 より. 定理は $q=1$ に対しても成立する。

注意 Th. 2.1.1. の仮定 $\sup_{z \in \Omega} |\operatorname{Im} z| \leq M < \infty$

は たとえば $\sup_{z \in \Omega} |Im z| / |Re z| < 1$

で おきかえてもよいことは定理の証明法より明らかである。我々は本質的には D^n の近傍でしか考察を行わないから、この定理で十分であるが、後にもう少し一般化した状況で cohomology の vanishing は証明する。(Th. 2.1.6. 参照。)

Th. 2.1.3. Ω を $D^n \times i\mathbb{R}^n$ の閉集合とし、
 $V \stackrel{\text{def}}{=} \Omega \cap \mathbb{C}^n$ と定める。今 $\sup_{z \in V} |Im z| < \infty$
とし、更に、 V 上の多変数調和函数 $\theta(z)$ で
 $\{\theta(z) < c\} \subset \Omega \quad (\forall c)$ かつ $\sup_{z \in K \cap \mathbb{C}^n} \theta(z) \leq M_K < \infty \quad (\forall K \subset \Omega)$
を満たす物があるとする。($\subset$ なる記号は完全内部の意。) この時 $H^s(\Omega, \hat{\sigma}) = 0 \quad (s \geq 1)$ が成立する。

注意. このような Ω が 十分沢山存在することはこの定理の証明の後に示す。最も簡単な、しかし重要な例は $D^n \times iI^n$ (但し

I は $\mathbb{R}$ の open interval) である。

証明] $\mathbb{D} \times i\mathbb{R}^n$ の位相の定義より, $\Omega = \cup \Omega_\nu$

(locally finite) かつ $\Omega_\nu \cap \mathbb{C}^n = V_\nu$ は
^{open}
 convex として, このような covering $\{\Omega_\nu\}$
 に関する inductive limit $\varinjlim H^s(\{\Omega_\nu\};$
 $\tilde{\mathcal{O}}) = 0$ ($s \geq 1$) を言えはよい。それに

は次の補題を示せば, 特にそこで $p=q$
 $=0$ として定理が得られる。(norm をこ
 では L^2 -norm を用いているが, それを
 $\sup$ -norm に変えるには, Cauchy の積分
 公式を用いよはよい。)

Lem. 2.1.4. (Cf. Hörmander [19] p.114.

Th. 2.4.1. この補題の証明の idea は,
 同定理の証明による。)

$$C \in \mathcal{C}^S(\mathcal{Z}_{(p,q)}^{\text{loc}}(\{V_\nu\}, \varepsilon|Z|(\forall \varepsilon)))$$

(即ち $C = \{C_\nu\}$ は $L_{(p,q)}^{2,\text{loc}}$ form-valued
 の cochain であって $\bar{\partial}C_\nu = 0$ を満たし, 更に

$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall M$ (但し M は index set の subset
 であり, $\#(M) < \infty$ なる物) に対して,

$$\sum_{\nu \in M} \int_{V_\nu} |C_\nu|^2 e^{-\varepsilon |\operatorname{Re} Z|} dV < \infty \text{ を満たす})$$

かつ $\delta c = 0$ とする。この時、 $\exists c'$

s.t. $\delta c' = c$ かつ

$$c' \in C^{s-1}(\Sigma_{(p,q)}^{loc}(\{V_\nu\}, \varepsilon |z| (\forall \varepsilon)))$$

補題の証明] $\{\chi_j\}$ を $\{V_\nu\}$ に付随し

た 1 の分解とする。通例のように、近似的

Hamilton operator として $b_\alpha = \sum \chi_j c_{j,\alpha}$

を考えよう。もちろん $\bar{\partial} b_\alpha \neq 0$ であるが、Th.

2.1.1. を用いて、 b_α を修正することにより、

c' を求めるのである。 $\delta c = 0$ 故 明らか

に $\delta b = c$ 又、 $\bar{\partial} c = 0$ 故 $\delta \bar{\partial} b = 0$ は成

立することにより注意しておこう。 $\sum \chi_j$

$= 1$, $\chi_j \geq 0$ 故、Cauchy の不等式に

$$\text{よって } \int_{V_\alpha} |b_\alpha|^2 e^{-\varphi(z)} dV \leq \sum_j \int_{V_\alpha} \chi_j |c_{j,\alpha}|^2$$

$e^{-\varphi(z)} dV$ が成立することは明らかである。

又、 $\theta(z)$ の存在により $\sum |\bar{\partial} \chi_j| \leq e^{\varphi(z)}$

($\varphi(z)$ は V での多重劣調和函数) と

仮定してよい。しかももちろん $K \subset \Omega$ とな

ら $\sup_{K \cap \mathbb{C}^n} \varphi(z) \leq C_K$ 従って、

$\sum_N \int |\bar{\partial} b_\alpha|^2 e^{-\varepsilon|z|} dV < \infty$ ($\forall \varepsilon, \forall N$, 但し N は有限個) から C の仮定から従う。

まず $s=1$ としよう。先に注意したように, $\delta(\bar{\partial} b) = 0$ だったから $s=1$ とすれば,

$\bar{\partial} b$ は global section f を定めている。

従って Th. 2.1.1. により $\exists u$ s.t. $\bar{\partial} u = f$
 かつ $\int_{K \cap \mathbb{C}^n} |u|^2 e^{-\varepsilon|z|} (1+|z|^2)^{-2} dV < \infty$ ($\forall \varepsilon$)
 (但し $K \subseteq V$)

従って $c'_\alpha = \bar{\partial}_f b_\alpha - u/\Omega_\alpha$ と定めれば,

明らかに $\bar{\partial} c'_\alpha = 0$ $\delta c' = \delta b = c$

かつ $c' \in C^{s-1}(Z_{(p,s)}^{loc}(\{V_\nu\}, \varepsilon|z|(\forall \varepsilon)))$

次に $s > 1$ としよう。この時は s についての

induction を用いる。(Hörmander [19] の

idea である。) 再び $\delta(\bar{\partial} b) = 0$ 故,

$\delta b' = \bar{\partial} b$ なる $b' \in C^{s-2}(Z_{(p,s+1)}^{loc}(\{V_\nu\},$

$\varepsilon|z|(\forall \varepsilon))$ から induction の仮定から

存在する。従って Th. 2.1.1. を用いて,

$b'_\alpha = \bar{\partial} b''_\alpha$ かつ $\sum_N \int_{V_\alpha} |b''_\alpha|^2 e^{-\varepsilon|z|} (1+|z|^2)^{-2} dV$

$< \infty$ となる b'' が存在する。従って
 $c' \stackrel{\text{def}}{=} b - \delta b''$ と定めれば, c' は
 すべての条件を満たしている。

Eg. 2.1.5. (Th. 2.1.3. の条件を満たす
 Ω の例について) (cf. Grauert [13] p. 468 ff.

§3) $S \in D^n$ 内の open set かつ U は S
 の $D^n \times i\mathbb{R}^n$ 内での開近傍とする。この時
 以下の条件 i), ii) を満たす V が存在
 する。 i) V は Th. 2.1.3. の条件を満たす。
 ii) $V \subset U$ かつ $S = V \cap D^n$

証明] $S \cap S_{\infty}^{\infty} \neq \emptyset$ としておいてよい。

($S \cap S_{\infty}^{\infty} = \emptyset$ ならば, 上の Grauert の

結果である。) 今 U は $D^n \times i\mathbb{R}^n$ で open

故. $\exists \gamma(z) \in C^\infty(U \cap \mathbb{C}^n)$ かつ

$\{z \in U \cap \mathbb{C}^n \mid \gamma(z) \leq c\}^a \subset U$ (closure
 は $D^n \times i\mathbb{R}^n$ の位相に関してとったもの) かつ

$\forall K, \forall \varepsilon$ $K \times i([- \varepsilon_1, \varepsilon'_1] \times \cdots \times [- \varepsilon_n, \varepsilon'_n])$ 上で
 (これが U に含まれる限り)
 $\sup |\gamma(z)|, \sup |\nabla^2 \gamma(z)| \leq M_{K, \varepsilon}$

(∇^2 は 任意の 2 階微分の意味) となる物

がとあることは、 $K \times i([- \varepsilon_1, \varepsilon'_1] \times \cdots \times [- \varepsilon_n, \varepsilon'_n])$
有限和が、 U のとりつく compact 集合の
列を作ることから明らか。但し、ここで、

K は $\mathbb{R}^n$ 内の compact convex set, π
は convex cone (closed) である。今
 $a(x)$ を x が $S \cap \mathbb{R}^n$ の内部から $\partial(\mathbb{C}^n S)$
へ近付く時 十分速く ∞ へ行く 函数として
 $\varphi(z) \stackrel{\text{def}}{=} a(\operatorname{Re} z) \sum_j (\operatorname{Im} z_j)^2$ と定め、
更に、 $p_1(z) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(z) + \varphi(\bar{z})$ と定める。

すると

$D^{\mathbb{R}^n} \mathbb{R}^n$ の位相の定義と $a(x)$ の条件
から、 $D^{\mathbb{R}^n} \mathbb{R}^n$ における S の近傍 W
が存在して、 $W \cap \mathbb{C}^n$ では $p_1(z)$ は
多重調和函数であるとしてよい。

さて、今 $z^j \in (\partial W - \partial S) \cap \mathbb{C}^n$

として、

$$\theta^j(z) = \theta_{z^j}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \max \{0,$$

$$\frac{1}{\sum_{k=1}^n |\operatorname{Im} z_k^j|^2} \left(2 \sum |\operatorname{Im} z_k|^2 \right. \\ \left. - \sum |\operatorname{Re}(z_k - z_k^j)|^2 \right) \}$$

と定めると、 $\theta^j(z)$ は多重調和函数であり、しかも $\theta^j(z^j) = z$ となる。従って $\{z^j\}$ を適当に選べば、 $p_2(z) = \sup_j \theta^j(z)$ は well-defined な多重調和函数となり (local には、 $\sup$ は有限個のものに関してとっているから、上半連続性も問題ない。) しかも $\{z \in W \cap \mathbb{C}^n \mid p_2(z) \leq 1\} \cap \partial W = \emptyset$ とできる。

以上の準備の下で $V_{\text{def}}(\{z \in W \cap \mathbb{C}^n \mid p_2(z) \leq 1\} \cup (W \cap S_\infty^{n-1}))^\circ$ (interior とは $D \times i\mathbb{R}^n$ の位相に関して) と定めれば、 $p(z)_{\text{def}} p_1(z) + \sum_{j \geq 0} p_2(z)^j$ は 与えられた 多重調和函数となっている。(V に関して)

実際、 $\forall K \times i[(-\varepsilon_1, \varepsilon'_1) \times \cdots \times (-\varepsilon_n, \varepsilon'_n)]$ ($\in V$) に対して (K は p. 21. と同じ条件を満たす) 同じ型の集合 L ($\subset K$) が存在し、 L 上では $p_2(z) \leq 1/2$ とでき、 $\text{pr}_D L \in S$ 故 $p_1(z) \leq M_L$ となっている。従って L 上で $p(z) \leq M'_L$

が満たされるからである。

注意. 同様にして K が D^n 内の compact 集合である時, $H^s(K, \hat{\mathcal{O}}) = 0$ ($s \geq 1$) も示さう。(Cf. p. 32. ff.)

さて, 我々は Th. 2.1.1. 従って Th. 2.1.3. において $\sup_{Z \in V} |\operatorname{Im} Z| < \infty$ を仮定して, 全く一般

の状況の下にこの条件を落すことは可能であるうか technical に面倒である。しかし, 簡単な集合の場合には Th. 2.1.3. において上の条件を落すことは比較的容易であるので,

その概略を述べておく。もちろん, この方法は standard covering を用いる cohomology with bounds の vanishing (cf. Hörmander [20] 7.6.) を (hyperfunction での定数係数偏微分方程式論を展開する為に) 示すのにそのまま本質的変更なしに用いることは明らかである。尚, Th. 2.1.7. は小松先生の suggestion による。

Th. 2.1.6. $H^s(D^n \times i\mathbb{R}^n, \tilde{\mathcal{O}}) = 0$ ($s \geq 1$).

注意: 以下の証明を見れば判るように、
たとえば $D^n \times i(\mathbb{R}^+)^n$ etc. でも証明は
全く同様である。

証明] $D^n \times i(-m, m)^n \stackrel{\text{def}}{=} \Omega_m$ とすれば
 $H^s(\Omega_m, \tilde{\mathcal{O}}) = 0$ ($s \geq 1$) 故. $s \geq 2$
ならば, $H^s(D^n \times i\mathbb{R}^n, \tilde{\mathcal{O}}) = 0$ はホモロ
ジ-代数の一般論から明らかである。

(たとえば, Grothendieck [14] Ch.0
私はこの事実を柏原君に教えて頂い
た。もちろん直接にも証明できること
ではある。)

次に $H^1(D^n \times i\mathbb{R}^n, \tilde{\mathcal{O}}) = 0$ を言うには、

一種の Runge の定理が必要である。

$$\begin{aligned} \text{今 } \tilde{\mathcal{O}}^j(D^n \times i\mathbb{R}^n)_{\text{loc}} \ni f(z) &\iff \\ f(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n), \quad \int_{K \cap \mathbb{C}^n} |f|^2 e^{-\frac{1}{j}|z|^2} dV &< \infty \\ (\forall K \subset D^n \times i\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

と定め, $\tilde{\mathcal{O}}^j(\Omega_m)_{\text{loc}}$ も同様に定め

る。この時 §3 Th. の証明

と同様にして $\tilde{\mathcal{O}}^j(D^n \times i\mathbb{R}^n)_{\text{loc}} \hookrightarrow$

$$\tilde{\mathcal{O}}^{j-1}(\mathbb{D}^n \times i\mathbb{R}^n)_{loc}, \quad \tilde{\mathcal{O}}^{j-1}(\mathbb{D}^n \times i\mathbb{R}^n)_{loc}$$

$$\hookrightarrow \tilde{\mathcal{O}}^{j-1}(\Omega_m)_{loc} \text{ は いずれも}$$

dense range であることが証明される。

(証明は、本質的には、Hörmander [19]

p. 109 Prop. 2.3.2. による。§3 参照) 又、

$$\text{同様に } \tilde{\mathcal{O}}^j(\Omega_m)_{loc} \hookrightarrow \tilde{\mathcal{O}}^{j-1}(\Omega_m)_{loc} \text{ も}$$

dense range である。ここで、次の線型位相空間の一般論 (Th. 2.1.7.) から、

$$\tilde{\mathcal{O}}(\mathbb{D}^n \times i\mathbb{R}^n)_{loc} \hookrightarrow \tilde{\mathcal{O}}(\Omega_m)_{loc} \text{ が}$$

dense range を出したものであるか、

$\tilde{\mathcal{O}}^j_{loc}$ etc. では少し取り扱いにくいので、

$$\tilde{\mathcal{O}}^j(U) \ni f(z) \iff f(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n \cap U)$$

$$\text{かつ } \int_U |f(z)| e^{-\frac{1}{\sigma}|z|^2} dV < \infty \text{ という}$$

Banach 空間で考えたい。一般に $\tilde{\mathcal{O}}^j(U)$

そのままで、上の近似定理は成立しない

いけれど、 $\tilde{\mathcal{O}}^j(U)$ の subset $\varinjlim_{K \downarrow U} \tilde{\mathcal{O}}^j(K)$

を $A_j(U)$ と考え、 $A_j(U)$

には $\tilde{\mathcal{O}}^j(U)$ の位相をそのままいれること

にすれば、上の近似定理により

$A_{j-1}(\Omega_m)$ において $A_j(\Omega_m)$ は dense と

なる。従って Th. 2.1.7. をこの状況で"適用してやれば", $\Gamma(D^n \times i\mathbb{R}^n, \tilde{\mathcal{O}})$ は $\Gamma(\Omega_m, \tilde{\mathcal{O}})$ で "dense" であることが判る。

従って, $\mathcal{U} = \{\Omega_m\}$ とし, $H^1(\mathcal{U}, \tilde{\mathcal{O}}) = 0$ を証明すれば"よい。

今 $a \in Z^1(\mathcal{U}, \tilde{\mathcal{O}})$ i.e. $\delta a = 0$ とする。

ここで $\mathcal{U}^j = \{\Omega_1, \dots, \Omega_j\}$ と定めれば, trivial に $\mathcal{U}^j$ は Ω_θ の covering になっている。又 $\delta a = 0$ 故, $a|_{\Omega_j} = \delta \exists b^j$ かも。

$$(b^{j+1} - b^j)|_{\Omega_j} \in Z^0(\mathcal{U}_j, \tilde{\mathcal{O}})$$

$K_j \Subset \Omega_j \Subset K_{j+1}$ かつ K_j はやはり直積型として 近似定理を用いることにより,

$$\begin{aligned} &\exists c^j \in \Gamma(D^n \times i\mathbb{R}^n, \tilde{\mathcal{O}}) \text{ s.t.} \\ &\int_{K_\ell} |b^{j+1} - b^j - c^j|^2 e^{-\frac{1}{\ell}|z|} dV < \frac{1}{2^j} \\ &\quad (1 \leq \ell \leq j) \text{ としよ。} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &b^{j+1} - c^j \text{ を改めて } b^{j+1} \text{ とすることにより} \\ &\int_{K_\ell} |b^{j+1} - b^j|^2 e^{-\frac{1}{\ell}|z|} dV < \frac{1}{2^j} \end{aligned}$$

$$\therefore b^k - b^j \longrightarrow \exists a^j (k \rightarrow \infty \text{ 但し, } \tilde{\mathcal{O}}^j(K_j) \text{ の位相で。})$$

$$2. \text{ 明らかに } K_j \text{ 上 } b^{j+1} + s^{j+1} = b^j + s^j$$

よって $\exists b \in C^0(\mathcal{U}, \tilde{\mathcal{O}})$ かつ $\forall j$ に対し
 $\Omega_{j-1} = \delta b = \delta b^j + \delta a^j - a$ となる
 物が存在する。従って $H^1(\mathbb{D}^n \times i\mathbb{R}^n, \tilde{\mathcal{O}}) = 0$ が証明された。最後に系型位
 相空間論の一つの定理を証明して、
 Th. 2.1.6. の証明を終了。実はこれは、
 上の $H^1(\mathbb{D}^n \times i\mathbb{R}^n, \tilde{\mathcal{O}}) = 0$ の証明の
 modification である。

Th. 2.1.7. $\{X_j\}$ は Banach space,
 $X_{j+1} \hookrightarrow X_j$ (ここでその embedding
 map の norm $\leq C_j$ としておく。) は
 dense range とする。 $\{Y_j\}$ も同様とする。

更に $X_{j+1} \xrightarrow{h_{j+1}} Y_{j+1}$ とする。この時、

$$\begin{array}{ccc} X_{j+1} & \xrightarrow{h_{j+1}} & Y_{j+1} \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\ X_j & \xrightarrow{h_j} & Y_j \end{array}$$

$\{h_j\}$ により $\varprojlim X_j \xrightarrow{h} Y \xleftarrow{\varprojlim} \varprojlim Y_j$
 なる写像が induce されるか、この時
 h も dense range である。

証明] まず 小松先生から suggestion
を頂いた次の補題の証明を行う。

lem. 2.1.8. 定理の仮定の下で、

$X \hookrightarrow X_j$ は dense range

証明] $j=1$ として一般性は失わない。

$X_1 \ni \forall f$ に対し, $f_1 \overline{=} f$ とし, 以下 "順次

次のように f_j を定める。任意にまず $\varepsilon > 0$

を fix する。このとき, 仮定より, $\exists f_2 \in X_2$

$\|f_2 - f_1\|_1 < \varepsilon/2$ とできる。次に再び

仮定より $\exists f_3 \in X_3$ s.t. $\|f_3 - f_2\|_2 < \varepsilon/2^2 \cdot 1/c_2$

(ここで $c_j \geq 1$ ($\forall j$) としておく。)

以下同様にして, $\|f_{j+1} - f_j\|_j < \varepsilon/2^j \cdot$

$\times \prod_{k=2}^j 1/c_k$ と $\{f_j\}$ を順次選ぶことができる。

次に $\{g_k\}$ を $g_k \overline{=} \sum_{j=k}^{\infty} (f_{j+1} - f_j) + f_k$
と定める。

次に示すように, この級数は X_k 内で
絶対収束するから, g_k は X_k の元として

well-defined である。実際, $g_k^m = \sum_{j=k}^m$

$(f_{j+1} - f_j) + f_k$ として

$$g_k^m - g_k^n = \sum_{j=n+1}^m (f_{j+1} - f_j) \quad (m > n \text{ として})$$

おく。) 従って仮定より,

$$\|g_k^m - g_k^n\|_k \leq \sum_{j=n+1}^m \|f_{j+1} - f_j\|_k$$

$$\leq \sum_{j=n+1}^m \left(\|f_{j+1} - f_j\|_j \prod_{\ell=j+1}^k c_\ell \right)$$

$$\leq \sum_{j=n+1}^m \left(\|f_{j+1} - f_j\|_j \prod_{\ell=2}^k c_\ell \right) < \sum_{j=n+1}^m \frac{\varepsilon}{2^j}$$

従って g_k は明らかに well-defined である。

又、 X_k 内において $g_{k+1} = g_k$ は明らか、即ち、

(g_j) は $\varprojlim X_j = X$ の元 g を定める。しかも、上と同様にして

$$\|f - g\|_1 \leq \sum_{j \geq 1} \|f_{j+1} - f_j\|_1 < \sum_{j \geq 1} \varepsilon / 2^j = \varepsilon$$

- Q.E.D.

定理の証明に戻ろう。

Lem. 2.1.8. により、 $X' \cong \varinjlim X'_j$, $Y' \cong \varinjlim Y'_j$ と (少なくとも linear space として) 見なすことができる。ここで、

$X_{j+1} \hookrightarrow X_j$, $Y_{j+1} \hookrightarrow Y_j$ は各々 dense range であるから、右辺に現わ

れる $\varinjlim$ は 実は injective limit であることに注意しておこう。

一方、 $X_j \xrightarrow{h_j} Y_j$ が dense range 故
 $X_j' \xleftarrow{th_j} Y_j'$ は injective. よって $Y_j' \ni y_j'$
 かつ $th_j(y_j') = 0$ とすれば、 $y_j' \in Y_j'$
 と見なせるから $th_j(y_j') = 0$ ($\because$ 先程
 の $\varinjlim$ は injective limit.) 故に
 th_j が injective 故 $y_j' = 0 \therefore Y_j' \rightarrow X_j'$
 は injective 故に Hahn-Banach の
 定理により、 $X \xrightarrow{h} Y$ は dense range
 定理の証終。

§3 $\mathcal{O}(K)$ における近似定理

この節では、 $K \subset D^n$ が compact set である時、 $\mathcal{O}(K)$ の元は、 $\mathcal{O}(D^n)$ の元で“近似されることを証明すること”を目標とする。もちろん $K \subset D^n$ が本質的である。

3.1. $\mathcal{O}(K)$ における近似定理.

$$\mathcal{O}(K) = \varinjlim_{U_m \uparrow K} \mathcal{O}^m(U_m) \text{ により } \mathcal{O}(K)$$

に位相を定義する。もちろん ここで“これは、

K の近傍系 U_m のとり方によらないことは明

らか。但し $\mathcal{O}^m(U_m) = \{f(z) \in \mathcal{O}(U_m \cap \mathbb{C}^n) \mid |f(z)| \leq A e^{-1/m|z|}\}$ である。

又、この時 Ascoli-Arzelà の定理により、 $\mathcal{O}(K)$ は、Banach 空間 $\mathcal{O}^m(U_m)$ を

compact 写像で“つないだ”空間となり、定義により DFS-space である。この時、

Th. 3.1.1 $K \subset D^n$, K compact とする。

この時、 $\mathcal{O}_* (=_{\text{by def.}} \mathcal{O}(D))$ は $\mathcal{O}(K)$ において dense である。

証明] $U_j = D^n \times \sqrt{1} \{ \sum_{k=1}^n |y_k|^2 < 1/j \}$ と定める.

K についての条件から, $\exists \Omega_j \downarrow K$ かつ $U_j \supset$

Ω_j 更に $\forall j$ と $\forall T (\subset \Omega_j)$ に対して.

次のような条件 i) ~ iv) を満たす V と

U_j での強多重調和函数 $\theta(z)$ が存在することが初等的に証明される. (Ω_j

の作り方は. この証明の最後に述べる.

$D \times i\mathbb{R}^n$ の位相の定義を用いて,

$$\Omega_j = \bigcap_{\ell=1}^{\infty} V^{\ell} \quad \text{但し} \quad V^{\ell} = \{ | \exp(-\sum (z_j - a_j^{\ell})^2) |$$

$$< c_{\ell}, \quad \sum |Im z_j|^2 < d_{\ell} \quad \text{但し} \quad a_j^{\ell} \in \mathbb{R} \}$$

という型の集合 (このような型の集合を簡単な

為 type (E) の集合と呼ぶ) により作られる

物である。) さて V と $\theta(z)$ の条件を明記

しておこう.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{i) } T \subset V \subset \Omega_j \\ \text{ii) } \theta(z) < 0 \quad \text{on } T \cap \mathbb{C}^n \\ \text{iii) } \theta(z) > 0 \quad \text{near } \partial V \cap \mathbb{C}^n \\ \text{iv) } \forall L \subset \Omega_j, \text{ に対し } \sup_{L \cap \mathbb{C}^n} \theta(z) \leq M_L \end{array} \right.$$

さて. 定理の証明を始めよう. いくつかの補

助的な函数空間の設定から始める。

$$A_{loc}^{2,-2\varepsilon}(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ f \in \mathcal{O}(\Omega \cap \mathbb{C}^n) \mid \int_K |f|^2 e^{2\varepsilon|z|} dV < \infty \quad \forall K \Subset \Omega \right\}$$

$$L_{loc}^{2,-\varepsilon}(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ f \in L_{loc}^2(\Omega \cap \mathbb{C}^n) \mid \int_K |f|^2 e^{\varepsilon|z|} dV < \infty \quad \forall K \Subset \Omega \right\} \text{ と定める。}$$

$$\text{明らかに } A_{loc}^{2,-2\varepsilon}(\Omega) \hookrightarrow L_{loc}^{2,-\varepsilon}(\Omega)$$

よって $L_{loc}^{2,-\varepsilon}(\Omega)$ の位相に関して $A_{loc}^{2,-2\varepsilon}(\Omega)$ の閉包をとったものを X とする。ここで

p. 14. Lem. 2.1.2. の dual をとれば、明らかに $\varepsilon < \delta (< 2\varepsilon)$ なる限り、

$$A_{loc}^{2,-\delta}(\Omega) \hookrightarrow X \text{ となっている。}$$

$$\text{又、 } B \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ u \in \mathcal{O}(U \cap \mathbb{C}^n) \mid \int_L |u|^2 e^{\delta|z|} dV < \infty \quad \forall L \Subset U \right\} \text{ と } (\delta \text{ を上の条件を満たす物として fix}) \text{ 定める。}$$

今 $\Omega = \Omega_{j_0}$, $U = U_{j_0}$ とすれば、明らかに $B \hookrightarrow X$ であるか。この時、

$\mu \in X'$ に対して、もしそれが $\mu \perp j(B)$ を満たすならば、 $\mu = 0$ が従うことが証明できれば、 $\mathcal{O}(K)$ の位相の定義

から、定理が得られることは明らか。

その証明は次のように Hörmander [19] p. 109. Prop. 2.3.2 を適用することによって得られる。

$\mu \in X'$ とすれば, Hahn-Banach の定理により, $\exists u \in L_{\text{comp}}^{2, \varepsilon}(\Omega)$ が存在し (即ち

$\text{supp } u$ は Ω 内で compact. かつ

$$\int |u|^2 e^{-\varepsilon|z|} dV < \infty). \text{ しかも } \forall v \in X \text{ に対し } \langle \mu, v \rangle = \int_{\Omega \cap \mathbb{C}^n} v \bar{u} dV \text{ が成立する。}$$

このように $\text{supp } u$ を p. 32. の条件の T とし, そこで存在を仮定した $V, \theta(z)$ を以下 fix する。 $\theta^+(z) \stackrel{\text{def}}{=} \max \{0, \theta(z)\}$ とし,

$C \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{\lambda=1}^{\infty} \{v \in L_{\text{loc}}^2(U; \lambda \theta^+ - \delta'|z| - \log(1 + |z|^2)) \mid \bar{\partial} v = 0\} \quad (2\varepsilon > \delta' > \delta)$ と定めれば, $\theta(z)$ の条件 (iv) より $C \subset B$

(C には特に位相は考えない。) 今 $\mu \perp j(B)$

を仮定しているから, $\forall v \in C$ に対して

$$\langle \mu, v \rangle = \int_{\Omega \cap \mathbb{C}^n} v \bar{u} dV = \int_U v \bar{u} dV$$

($\because \text{supp } u \subset \Omega$)

しかも $\theta(z)$ の性質 4) により, $\theta(z) > 0$ なら

は " $u(z) = 0$ ところで" $g_{\delta''}(z) = \cosh(\delta''z)$

と 17 (但し $2\varepsilon > \delta'' > \delta'$)

$$\int v \bar{u} dV = \int v g_{\delta''}(z) \cdot \overline{\left(u / g_{\delta''}(\bar{z}) \right)} dV$$

故 $u / g_{\delta''}(\bar{z})$ 对 $\bar{z}$ $\tilde{u}$ と定めれば,

Hörmander [19] p. 109 Prop. 2.3.2.

により, $\exists F$ s.t. $\tilde{u} = \bar{\partial} F$ かつ $F = 0$ (near

∂V), しかも $F \in L^2(U; -(\delta'' - \delta')|z| + \log(1 + |z|^2))$ となる物が存在する。従

って $F(z) g_{\delta''}(\bar{z}) \equiv f(z)$ とすれば,

$\bar{\partial} f = u$ かつ $f \in L^2(U; \delta'|z| + \log(1 + |z|^2))$,

$\text{supp } f \subset V \Subset U$ としてよい。従って

$v \in A_{\log}^{2, -2\varepsilon}(\Omega)$ とすれば, 部分積分

により, $2\varepsilon > \delta''' > \delta'$ と 17

$$0 = \int_{\Omega \cap \mathbb{C}^n} (\bar{\partial} v) \bar{f} dV = \int_{\Omega \cap \mathbb{C}^n} \bar{\partial} (v g_{\delta'''}(z))$$

$$\cdot \overline{\left(f / g_{\delta'''}(\bar{z}) \right)} dV$$

$$= \int_{\Omega \cap \mathbb{C}^n} v g_{\delta'''}(z) \bar{\partial} (f / g_{\delta'''}(\bar{z})) dV$$

$$= \int_{\Omega \cap \mathbb{C}^n} v \overline{\partial f} \, dV = \int_{\Omega \cap \mathbb{C}^n} v \bar{u} \, dV$$

$= \langle \mu, v \rangle$ しかるに X は $A_{loc}^{2, -2\varepsilon}(\Omega)$
 の $L_{loc}^{2, -\varepsilon}(\Omega)$ の位相に関する閉包
 をとったものだから, μ は X 上で 0,
 即ち $\mu \equiv 0$. 従って Ω_j の構成さ
 え行えば, 証明は完結することになる。

以下 その構成:

K の任意の近傍 W を考えれば, $D \times i\mathbb{R}^n$
 の位相の定義より, $W = \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j$ $C_j = K_j \times iI_j$
 但し, K_j は $\mathbb{R}^n$ 内の open convex, relatively
 compact set α は open convex cone, I_j は
 $\mathbb{R}$ の open interval の直積。

K は compact 故 C_j の内の有限個で
 cover できる。更に 定義から $\exists r \quad K \cap \{\alpha > r\}$
 $\subset \bigcup_{j=1}^m K_j$ K_j は open convex cone, と
 してもよい。このような形の集合なら, type(E)
 の集合 (see. p.32) で 近似以て できることは明
 らかである。

そこで このような近似列に於て, $T \in \Omega_j$

とする時. p. 32 の条件 i) ~ iv) を満たす

V と $\theta(z)$ を構成しよう. 再び $D \times i\mathbb{R}^n$ の

位相の定義と $T \subset \Omega_j$ ということから,

$$T \subset \bigcup_{j=1}^m C_j \quad \text{但し} \quad C_j = K_j \times i I_j \quad \text{としてよい.}$$

(K_j, I_j は先程と同じ) 以下 Ω_j を Ω と

略する. 明らかに $K_j \subset \text{Pr}_{D^m} \Omega$ 故.

$$|\text{Re } z| > 1 \quad \text{と} \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \text{s.t.}$$

$$\text{dist}(K_j, \partial(\text{Pr}_{D^m} \Omega)) \geq \varepsilon |z| \quad \text{従って}$$

$\text{type}(E)$ の集合 S を適当に選べば, $T \subset S$,

$$T \cap \{|\text{Re } z| > 1\} \subset S \cap \{|\text{Re } z| > 1\}$$

$$\subset \Omega \cap \{|\text{Re } z| > 1\} \quad \text{とできる.}$$

一方 $T \cap \{|\text{Re } z| < 2\}$ の部分は, Ω が

$\text{type}(E)$ であることから, その定義に用い

られた V^ℓ を各座標軸の方向に $\pm \varepsilon$ ($\varepsilon \ll 1$)

だけ動いた $V_\varepsilon^{\ell \pm \dots \pm}$ を考えれば,

$$T \cap \{|\text{Re } z| < 2\} \subset \bigcap V_\varepsilon^{\ell \pm \dots \pm} \cap \{|\text{Re } z| < 2\}$$

$$\subset \bigcap V^\ell \quad \text{となり. しかも } \varepsilon \text{ を十分小さく}$$

$$\text{とっておけば, } \text{dist}(K_j, \partial(\text{Pr}_{D^m} \Omega)) \geq \varepsilon |z|$$

より, 明らかに $T \subset \bigcap V_\varepsilon^{\ell \pm \dots \pm}$ となっている.

そこで $\bigcap V_\varepsilon^{\ell \pm \dots \pm} \cap S \stackrel{\text{pf}}{=} V$ とおけば, V に

ついでこの条件は満たされている。しかも V は構成の仕方から $\text{type}(E)$ の集合になっている。即ち、 $V = \bigcap V_\ell$, $V_\ell = \{z \mid |f_\ell(z)| < 1, \sum |\text{Im } z_j|^2 < d_\ell\}$ ここに $f_\ell(z) = c_\ell \exp(-\sum (z_j - a_j^\ell)^2)$ ($a_j^\ell \in \mathbb{R}$) である。又、 Ω の作り方から、 V_ℓ を少し必要か"あれば"虚軸方向に大きくすることにより $d_\ell \equiv d$ としても構わない。さて、今 $\sup_\ell \log |f_\ell(z)| \leq \sigma(z)$ とすれば、これは V_ℓ の作り方より、有限石確定であり、多重劣調和になっている。ここで ρ_ε を $\mathbb{R}^{2n}$ での mollifier として $\psi(z) \leq \sigma(z) * \rho_\varepsilon$ と定めれば、 $T \subset V$ 故 $D \times i\mathbb{R}^n$ の位相の定義から、 ε を十分小さくとれば、 T 上で $\psi(z) < 0$ となっている。

次に適当な強多重劣調和な $\varphi(z) = \varphi(\text{Im } z)$ をとって $\max(\psi(z), \varphi(z)) \leq \chi(z)$ を考えれば、 T 上で $\chi(z) < 0$ 、かつ ∂V の近傍で $\chi(z) > 0$ とできる。そこで、

$\theta(z) \leq \chi(z) * \rho_\varepsilon + \varepsilon \varphi(z)$ と定めれば、 ε を十分小さくとることにより、 $\theta(z)$ は U で

の強多重劣調和函数であり、しかも構成法により、明らかに p.32. の条件 (i) ~ (iv) をすべて満たしている。従って V と $\theta(z)$ が、すべての条件を満たして構成されたことになる。

以上により、Th. 3.1.1. の証明は完了した。

§4. Fourier 超函数の空間の性質

この節では, p. 8. で定義した Fourier 超函数の空間 $\mathcal{Q}(\Omega)$ (Def. 1.2.4.) の基本的性質の内 $\mathcal{Q}(\Omega)$ の sheaf-theoretical な部分 (p. 9. の i), ii)) を証明することを目標とする。Fourier 変換論については §5. で述べる。ここで, Fourier 超函数の空間が, sheaf になっているという事実は §' etc. と比べる時, 極めて注目に値する。その事実の有効性はたとえば Ch. 2, §3 においてよく判るであらう。

4.1. $H^p(V, \tilde{\mathcal{O}})$ の表現と Malgrange の定理 (Malgrange. [34]) の拡張

$\mathcal{Q}(\Omega)$ の性質を調べるには, $H^p(V, \tilde{\mathcal{O}})$, $H_{\text{comp}}^p(V, \mathcal{O})$ の微分型式による表現があった方が都合がいい。($H_{\text{comp}}^p(V, \mathcal{O})$ は compact support の cohomology の意) その準備をこの subsection では行う。

Def. 4.1.1 $\Omega \in D^n \times i\mathbb{R}^n$ の開集合として

$\mathcal{X}_j(\Omega) \ni u \iff u$ は $(0, j)$ -form であり
 かつ $\forall K \subset \Omega \quad \forall \varepsilon > 0$ に対して

$$\int_{K \cap \mathbb{C}^n} |u|^2 e^{-\varepsilon|z|^2} dV < \infty, \quad \text{かつ}$$

$$\int_{K \cap \mathbb{C}^n} |\bar{\partial}u|^2 e^{-\varepsilon|z|^2} dV < \infty$$

Def. 4.2.2 $\Omega \in D^n \times i\mathbb{R}^n$ の開集合として

$\mathcal{Y}_j(\Omega) \ni u \iff u$ は $(0, j)$ -form であり
 かつ $\forall K \subset \Omega \quad \exists \delta_K > 0$ s.t.

$$\int_{K \cap \mathbb{C}^n} |u|^2 e^{\delta_K |z|^2} dV < \infty \quad \text{かつ}$$

$$\int_{K \cap \mathbb{C}^n} |\bar{\partial}u|^2 e^{\delta_K |z|^2} dV < \infty$$

と $\{\mathcal{X}_j(\Omega)\}, \{\mathcal{Y}_j(\Omega)\}$ を定義すれば、
 明らかにこれ等は ある soft-sheaf $\mathcal{X}_j$,
 $\mathcal{Y}_j$ に attach された presheaf であり、
 しかも、 $\mathcal{X}_0 \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{X}_1, \mathcal{Y}_0 \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{Y}_1$ の Kernel
 はいずれも 正則関数となるから、 $\bar{\partial}$ は $\mathcal{U}$
 の定義により、(pp. 7, 8. Def. 1.2.2., Def.

1.2.3.) $0 \rightarrow \tilde{\mathcal{O}} \rightarrow \mathcal{K}_0 \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{K}_1$,
 $0 \rightarrow \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Y}_0 \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{Y}_1$ が成立する。
 更に, §2 の $\bar{\partial}u = f$ に対する存在定理に
 より (p. 11. Th. 2.1.1.) これらの sequence
 は, 次の resolution に延ばすことが
 できる。

$$0 \rightarrow \tilde{\mathcal{O}} \rightarrow \mathcal{K}_0 \xrightarrow{\bar{\partial}} \cdots \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{K}_n \rightarrow 0$$

(exact)

$$0 \rightarrow \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Y}_0 \xrightarrow{\bar{\partial}} \cdots \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{Y}_n \rightarrow 0$$

(exact)

($\mathcal{Q}$ については, resolution 故, local
 に考えてよいから ある帯状領域で 0 にはなら
 ない 適当な 函数, 即ち, $\cosh(\delta z)$ (δ は
 その平行移動) を用いればよい。この場合は
 Th. 2.1.1. を用いる 迄もなく, Hörmander
 [19] p. 105. Th. 2.2.1' から 直ちに 得られ
 る。) 従って

$$H^p(\Omega, \tilde{\mathcal{O}}) \cong \frac{\{u \in \mathcal{K}_p(\Omega) \mid \bar{\partial}u = 0\}}{\bar{\partial} \mathcal{K}_{p-1}(\Omega)}$$

$$H_{\text{comp}}^p(\Omega, \mathbb{C}) \cong \frac{\{u \in (\mathcal{Y}_p(\Omega))_{\text{comp.}} \mid \bar{\partial} u = 0\}}{\bar{\partial}(\mathcal{Y}_{p-1}(\Omega))_{\text{comp.}}}$$

と表現される。

一方ここで、次のような函数空間を導入する。

Def. 4.2.3.

$$X_j(\Omega) \ni u \iff \forall K \Subset \Omega \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\int_{K \cap \mathbb{C}^n} |u|^2 e^{-\varepsilon |z|} dV < \infty$$

Def. 4.2.4.

$$Y_j(\Omega) \ni u \iff \text{supp } u \Subset \Omega \quad \text{or} \quad \exists \delta > 0$$

$$\text{s.t.} \quad \int_{\mathbb{C}^n} |u|^2 e^{\delta |z|} dV < \infty$$

すると定義により、 $X_j(\Omega)$ は

$$p_{\varepsilon, K}(u) = \int_{K \cap \mathbb{C}^n} |u|^2 e^{-\varepsilon |z|} dV \quad \text{により}$$

semi-norm が与えられる FS^* -space となり、(FS^* -space については、小本公 [26]

参照) $Y_j(\Omega)$ は $\mathcal{DFS}^*$ -space, 更に

$$Y_{m-j}(\Omega) \cong [X_j(\Omega)]' \quad \text{となることは、}$$

明らかである。

ここで、次のような complex を考える：

$$\cdots \rightarrow X_{p-1}(\Omega) \xrightarrow{\bar{\partial}} X_p(\Omega) \xrightarrow{\bar{\partial}} X_{p+1}(\Omega) \rightarrow \cdots$$

すると、この complex から作った cohomology 群は、明らかに p. 42 で作った $H^p(\Omega, \tilde{\mathcal{O}})$ の表現の右辺に等しい。同様に、

$$H_{\text{comp}}^q(\Omega, \mathcal{O}) \text{ は } \cdots \rightarrow Y_{q-1}(\Omega) \rightarrow Y_q(\Omega) \rightarrow Y_{q+1}(\Omega) \rightarrow \cdots \text{ から}$$

作った cohomology 群に等しい。

従って $H^p(\Omega, \tilde{\mathcal{O}}) = 0$ ($p \geq 1$) なる Ω

(そのような Ω が十分沢山存在することは、

p. 16 ~ p. 30. で示した。) に対しては、

FS*-space に対する Serre-小松の補題 (小松 [26] p. 381 Th. 19: 内容の概略は p. 13. に念の為記しておいた。) により、

$$\text{Th. 4.2.5. } H^p(\Omega, \tilde{\mathcal{O}}) = 0 \quad (p \geq 1)$$

$$\text{ならば } [H^j(\Omega, \tilde{\mathcal{O}})]' \cong H_{\text{comp}}^{n-j}(\Omega, \mathcal{O})$$

が成立する。(定理は $\dim H^p(\Omega, \tilde{\mathcal{O}}) < \infty$, ($p \geq 1$) で成立する。)

更に、我々は同様の考え方により、次の定理も証明することが出来る。

Th. 4.2.6. Ω を $D^n \times i\mathbb{R}^n$ の任意の開集

合として $H^n(\Omega, \mathcal{F}) = 0$

(cf. Malgrange [34])

証明] 今迄述べた所から, $X_{n-1}(\Omega)$

$\xrightarrow{\bar{\partial}} X_n(\Omega) \rightarrow 0$ (exact) を言えば

よい。従って、特に $X_{n-1}(\Omega) \xrightarrow{\bar{\partial}} X_n(\Omega) \rightarrow 0$

(exact) を言えば十分。その証明の本質

的部分は Malgrange [33], [34] が指

摘しているように、この位置では $(\bar{\partial})' = \bar{\partial}$

が elliptic operator になることである。

証明に移る前に、2.3の空間の準備を

しておく。(尚、以下の証明は、Th. 2.1.1.

の証明 (p. 11. ~ p. 15.) とかなり parallel

に進行する。)

$$K_j \uparrow \Omega, \quad K_j \subset \Omega \text{ として,}$$

$$X_\ell^j(K_j) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ u \in L_{(0,\ell)}^{2,\text{loc}}(\mathbb{C}^n) \mid \right.$$

$$\left. \int_{K_j \cap \mathbb{C}^n} |u|^2 e^{-\frac{1}{2}|z|^2} dV < \infty \right\}$$

$$\text{と定めれば, } \lim_{j \rightarrow \infty} X_\ell^j(K_j) = X_\ell(\Omega)$$

$$\text{かつ } \lim_{j \rightarrow \infty} (X_\ell^j(K_j))' \cong Y_{n-\ell}(\Omega)$$

今 $(X^\partial_j(K_j))'$ の表現空間として,

$\{u \in L^2_{(0,1)}(\mathbb{C}^n) \mid \text{supp } u \subset K_j, \int_{\mathbb{C}^n} |u|^2 \times e^{\frac{1}{\delta}|z|^2} dV < \infty\}$ なる物をとることにすれば,

$(\bar{\partial})' = \mathcal{D}$ となるから, $\bar{\partial}$ の surjective

を言うには, $\mathcal{D}$ が injective かつ closed range を言えばよい。 $\mathcal{D}$ が injective

($Y_0 \rightarrow Y_1$ として) は, $\mathcal{D}$ が elliptic operator であり, しかも $u \in Y_0 \Rightarrow \text{supp } u \subset \Omega$ 故

unique continuation により, $u \equiv 0$ と

なるから明らかである。 $\mathcal{D}$ が closed

range を示そう。 DFS*-space の一般論

を用いて $\mathcal{D}u_\nu \rightarrow f$ in $(X^\partial_j(K_j))'$

として $f = \mathcal{D}^\exists u$ を示せばよい。(Th. 2.1.1.

の証明参照) ここで, 我々は Lem. 2.1.2.

に相当する事実を示せばよい。 しかるに,

Hörmander [19] p.109. Prop. 2.3.2 を用い

れば容易に判るように, この時 $\exists v_\nu \in (X^\partial(\widehat{K_{j+1}}))'$ s.t. $\mathcal{D}u_\nu = \mathcal{D}v_\nu$ と出来る。

ここで $\widehat{K_{j+1}} = [(K_{j+1} \cap \mathbb{C}^n) \cup (\cup_{\mathbb{C}^n} (K_{j+1} \cap \mathbb{C}^n))$ の連結成分の内 $\mathbb{R}^{2n}$ の位相に関して

relatively compact な物) $]_{D^n \times i\mathbb{R}^n}^a$,
 即ち 雑に言えば, K_{j+1} の穴を埋めた
 物である。実際 $\partial u \in [X_{n-1}^{\partial}(K_j)]'$,
 $u \in [X_n^{\partial}(K_k)]'$ ($j < k$) とし.

∂ の ellipticity を用いれば, $\text{supp } u$
 $\subset \widehat{K_{k+1}}$ は明らかである。さて $D^n \times i\mathbb{R}^n$
 の位相の定義から $\sup_{z \in \widehat{K_{k+1}} \cap \mathbb{C}^n} |\text{Im } z| < \infty$

故, Lem. 2.1.2 と同様に $\varphi_n(z) = e^{-\frac{1}{n}|z|^2}$
 を考えることとし, $\Omega \ni L \supset \widehat{K_{k+1}}$ とし

$g \in X^{\partial}(L)$ とし, (ここで " $X^{\partial}(L) \ni g$
 $\Leftrightarrow \int_{L \cap \mathbb{C}^n} |g|^2 e^{-\frac{1}{2}|z|^2} dV < \infty$) $\bar{\partial} g$

$= 0$ が満たされるなら,

$$0 = \int \overline{\varphi_n u} \bar{\partial} g dV = \int \bar{\partial}(\varphi_n u) g dV$$

$$= \int \overline{\varphi_n(\partial u)} g dV \longrightarrow \int \bar{\partial} u g dV$$

($\because$ Lebesgue の収束定理)

従ってここで Hörmander [19] p109.

Prop 2.3.2. を用いれば, $X^{\partial}(L)$ の定義

により, (即ち L の外では 増大度に制限がない) $\partial u \in \mathcal{V}[X^j(L)]'$ としてよい。

従って 再び ∂ の ellipticity により,
 $\partial u = \partial \exists w, \quad w \in [X^j(\widehat{K}_j)]'$ としてよい。

よって 最初から, $K_j = \widehat{K}_j$ と仮定して,
 $\partial u_\nu \in [X^j(\widehat{K}_j)]', \quad u_\nu \in [X^j(\widehat{K}_j)]'$
 $\partial u_\nu \xrightarrow{w} f \quad \text{in } [X^j(\widehat{K}_j)]'$ としてよい。

すると $K_j \subset L \subset \Omega$ として, $g \in X^j(L)$
 の元に対しては, $\int \overline{\partial u_\nu} g dV = 0$ かつ

$$\int \overline{\partial u_\nu} g dV \longrightarrow \int \bar{f} g dV \quad \therefore \int \bar{f} g dV$$

$$= 0 \quad \therefore f = \partial \exists v \quad v \in [X^j(L)]'$$

(再び Hörmander [19] Prop. 2.3.2.1 に従う。)

従って 再び unique continuation により,
 $\text{supp } v \subset \widehat{K}_j (= K_j)$ 故に。

$\partial: Y_n(\Omega) \longrightarrow Y_{n-1}(\Omega)$ は closed range となる。以上により, Malgrange の定理の拡張である Th. 4.2.6. は 証明された。

4.2. Fourier 超函数の空間の基本的性質

この subsection では, $\tilde{\mathcal{O}}$ の $\mathbb{D}^n$ に関する

pure codimensionality (cf. 佐藤 [42], 小松 [28]) を証明し, $\mathcal{Q}(\Omega)$ が flabby

sheaf になることを結論する。同時に

p.9. ii) で述べた duality theorem が

証明される。この subsection で用いた

方法は, Martineau [36], Harvey [15],

小松 [28] で用いられた物を少し

modify した物に過ぎない。

Th. 4.2.1. $K \subset \mathbb{D}^n$, K compact. とする。

この時, $V \supset K$, $H^p(V, \tilde{\mathcal{O}}) = 0$ ($p \geq 1$)

$H_K^p(V, \tilde{\mathcal{O}}) = 0$ ($p \neq n$).

$[H_K^n(V, \tilde{\mathcal{O}})]' \cong \mathcal{Q}(K)$

注意 i) §3 で述べた内容と一般的な

Excision Theorem により, $H^p(V, \tilde{\mathcal{O}}) = 0$

($p \geq 1$) と仮定しても特に差しつかえはない。

ii) $[H_K^n(V, \tilde{\mathcal{O}})]' \cong \mathcal{Q}(K)$ の同型は。

- 亦 linear space としての同型であるが、§3.3.1. の最初 (p.31.) で注意したように $\mathcal{O}(K)$ は DFS-space 故、 $\mathcal{O}(K)$ は bornologic (例之は"小松公 [28] p.154. Th. IV.3.28. 参照) となり、従って以下の証明から判るように、小松公 [26] p.381. Th.19. (Serre - 小松公の補題) により、位相もこめて同型としてよい。

証明] (Th.4.2.1. の) まず一般論により次の完全系列が成立する。

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H_K^0(V, \tilde{\mathcal{O}}) &\rightarrow H^0(V, \tilde{\mathcal{O}}) \rightarrow \\ &\rightarrow H^0(V-K, \tilde{\mathcal{O}}) \rightarrow H_K^1(V, \tilde{\mathcal{O}}) \rightarrow \cdots \\ \cdots \rightarrow H_K^n(V, \tilde{\mathcal{O}}) &\rightarrow H^n(V, \tilde{\mathcal{O}}) \rightarrow \\ &\rightarrow H^n(V-K, \tilde{\mathcal{O}}) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

仮定より $H^p(V, \tilde{\mathcal{O}}) = 0$ ($p \geq 1$) , 又明らかに一意接続定理により $H_K^0(V, \tilde{\mathcal{O}}) = 0$ 従って

$$H_K^1(V, \tilde{\mathcal{O}}) \cong H^0(V-K, \tilde{\mathcal{O}}) / H^0(V, \tilde{\mathcal{O}}),$$

$H_K^p(V, \tilde{\mathcal{O}}) \cong H^{p-1}(V-K, \tilde{\mathcal{O}})$ が成立する。

又、同様にして

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H_{\text{comp}}^0(V-K, \underline{\mathcal{O}}) \longrightarrow H_{\text{comp}}^0(V, \underline{\mathcal{O}}) \\ &\longrightarrow H^0(K, \underline{\mathcal{O}}) \longrightarrow H_{\text{comp}}^1(V-K, \underline{\mathcal{O}}) \\ &\longrightarrow \dots \dots \dots \\ &\longrightarrow H_{\text{comp}}^p(V-K, \underline{\mathcal{O}}) \longrightarrow H_{\text{comp}}^p(V, \underline{\mathcal{O}}) \\ &\longrightarrow H^p(K, \underline{\mathcal{O}}) \longrightarrow \dots \dots \dots \end{aligned}$$

が成立する。 ところか、ここで、 K が

$\mathbb{D}^n$ 内の compact set であることから、

§2. Th. 2.1.3. を (例によって $\cosh(\delta z)$ を用いて modify することにより) 用いて、

$H^p(K, \underline{\mathcal{O}}) = 0$ ($p \geq 1$) が判る。

(一般に $\varinjlim \mathcal{F}_\lambda = \mathcal{F}$ として $H_{\text{comp}}^p(X, \mathcal{F})$

$\cong \varinjlim H_{\text{comp}}^p(X, \mathcal{F}_\lambda)$ 但し X は

locally compact, に注意すれば) $\mathcal{S}_n$ 。

(たとえば, Godement [12] p. 194, Th.

4.12.1. 参照) もちろん, Hörmander

[19] p. 105, Th. 2.2.1' を用いて、直接に

Čech cohomology の vanishing を示す

ことも出来る。) 従って,

$$H^0(K, \mathcal{O}) \cong H_{\text{comp}}^1(V-K, \mathcal{O})$$

$$H_{\text{comp}}^p(V-K, \mathcal{O}) \cong H_{\text{comp}}^p(V, \mathcal{O})$$

ここで "Th. 4.2.5 を適用すれば"

$$H^p(V, \tilde{\mathcal{O}}) = 0 \quad (p \geq 1) \text{ を仮定してある}$$

$$\text{から, } H_{\text{comp}}^p(V-K, \mathcal{O}) = 0 \quad (p \neq 1, n),$$

$$H_{\text{comp}}^n(V-K, \mathcal{O}) \cong [\tilde{\mathcal{O}}(V)]'$$

ここで, p. 44. における $H^p(\Omega, \tilde{\mathcal{O}})$,

$H_{\text{comp}}^p(\Omega, \mathcal{O})$ の表現に用いられた

complex を $\Omega = V-K$ として考えてみよう。

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow X_0(V-K) & \xrightarrow{\bar{\partial}_0} & X_1(V-K) & \xrightarrow{\bar{\partial}_1} & \cdots & (*) \\ \uparrow & & \uparrow & & & \\ 0 \leftarrow Y_m(V-K) & \xleftarrow{-\bar{\partial}_{n-1}} & Y_{m-1}(V-K) & \xleftarrow{-\bar{\partial}_{n-2}} & \cdots & (**) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} (*) \cdots & \xrightarrow{\bar{\partial}_{n-2}} & X_{m-1}(V-K) & \xrightarrow{\bar{\partial}_{n-1}} & X_m(V-K) & \rightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & \\ (**) \cdots & \xleftarrow{-\bar{\partial}_1} & Y_1(V-K) & \xleftarrow{-\bar{\partial}_0} & Y_0(V-K) & \leftarrow 0 \end{array}$$

この互いに dual な 2つの complexes に

$$\text{おいて, } H_{\text{comp}}^p(V-K, \mathcal{O}) = 0 \quad (p \neq 1, n)$$

故に, $-\bar{\partial}_j$ の range が "closed" ではない可能

小量の残るのは $-\bar{\partial}_{n-1}$ と $-\bar{\partial}_0$ のみである。

しかるに, Th. 4.2.6. (Malgrange の定理

の拡張) により, $X_{n-1}(V-K) \xrightarrow{-\bar{\partial}_{n-1}} X_n(\underbrace{V}_{-K})$

は closed range であるから, $-\bar{\partial}_0$ は

closed range (closed range theorem

(たとえば, 小松公 [28] p. 172. Th. IV.3.46 参

照) と, DFS*-space は reflexive である

ことを用いればよい。) $\times$

$$\begin{array}{ccc} 0 \longleftarrow Y_n(V-K) & \xleftarrow{-\bar{\partial}_{n-1}^{V-K}} & Y_{n-1}(V-K) \\ \downarrow i & & \downarrow \\ 0 \longleftarrow Y_n(V) & \xleftarrow{-\bar{\partial}_{n-1}^V} & Y_n(V) \end{array}$$

を考えると $H_{\text{comp}}^n(V-K, \mathcal{O}) \cong H_{\text{comp}}^n(V, \mathcal{O})$ であるから

$$\text{Im}(-\bar{\partial}_{n-1}^{V-K}) = i^{-1}(\text{Im}(-\bar{\partial}_{n-1}^V))$$

しかるに $H^1(V, \tilde{\mathcal{O}}) = 0$ 故

$X_0(V) \xrightarrow{\bar{\partial}_0^V} X_1(V)$ は closed range

従って Serre - 小松公の補題 (小松

[26] p. 381. Th. 19.) により, $-\bar{\partial}_{n-1}^V$ は

closed range. 従って $i^{-1}(\text{Im}(-\bar{\partial}_{n-1}^V))$

$= \text{Im}(-\bar{\partial}_{n-1}^{V-K})$ は closed. 故に

Serre-小松の補題 (小松同上) が

$V-K$ に対しても適用できて,

$$[H^p(V-K, \tilde{\mathcal{O}})]' \cong H_{\text{comp}}^{n-p}(V-K, \mathcal{O})$$

以上の結果をまとめて

$$[H^0(V-K, \tilde{\mathcal{O}})]' \cong H_{\text{comp}}^n(V-K, \mathcal{O})$$

$$\cong H_{\text{comp}}^n(V, \mathcal{O}) \cong [H^0(V, \tilde{\mathcal{O}})]'$$

$H^0(V-K, \tilde{\mathcal{O}}), H^0(V, \tilde{\mathcal{O}})$ は FS-space,

特に reflexive 故

$$H^0(V-K, \tilde{\mathcal{O}}) \cong H^0(V, \tilde{\mathcal{O}})$$

$$\therefore H_K^1(V, \tilde{\mathcal{O}}) \cong H^0(V-K, \tilde{\mathcal{O}}) / H^0(V, \tilde{\mathcal{O}}) = 0$$

又, $p \geq 2, p \neq n$ ならば,

$$0 = H_{\text{comp}}^{n-p+1}(V, \mathcal{O}) \cong H_{\text{comp}}^{n-p+1}(V-K, \mathcal{O})$$

$$\cong [H^{p-1}(V-K, \tilde{\mathcal{O}})]' \cong [H_K^p(V, \tilde{\mathcal{O}})]'$$

$$\therefore H_K^p(V, \tilde{\mathcal{O}}) = 0$$

最後に $p = n$ として,

$$[H_K^n(V, \tilde{\mathcal{O}})]' \cong [H^{n-1}(V-K, \tilde{\mathcal{O}})]' \cong$$

$$\cong H_{\text{comp}}^1(V-K, \mathcal{O}) \cong H^0(K, \mathcal{O}) = \mathcal{O}(K)$$

以上により Th. 4.2.1. の証明は 終わった。

Th. 4.2.1. から $\mathcal{Q}(\Omega)$ が flabby sheaf (over $\mathbb{D}^n$) になることは, Homology 代数の一般論から容易にわかる。実際 T とえは

小糸公 [28] p. 89. Th. II. 3.18. により, 我々は

$$\Omega \subset \mathbb{D}^n \text{ として, } H_p^\Omega(V, \tilde{\mathcal{O}}) = 0 \quad (p \neq n)$$

を証明すればよい。(V は Ω の $\mathbb{D}^n \times i\mathbb{R}^n$ での

の適当な近傍。) 今 $\partial\Omega$ は Ω は $\mathbb{D}^n$ 内

で考えての boundary とする。この時, 一般

論から得られる次の完全系列を考えよう。

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H_{\partial\Omega}^0(\mathbb{D}^n \times i\mathbb{R}^n, \tilde{\mathcal{O}}) \longrightarrow H_{\Omega}^0(\mathbb{D}^n \times i\mathbb{R}^n, \tilde{\mathcal{O}}) \longrightarrow H_{\Omega}^0(\mathbb{D}^n \times i\mathbb{R}^n - \partial\Omega, \tilde{\mathcal{O}}) \\ &\longrightarrow H_{\partial\Omega}^1(\mathbb{D}^n \times i\mathbb{R}^n, \tilde{\mathcal{O}}) \longrightarrow \cdots \\ &\cdots \longrightarrow H_{\Omega}^{n-1}(\mathbb{D}^n \times i\mathbb{R}^n - \partial\Omega, \tilde{\mathcal{O}}) \longrightarrow \\ &\longrightarrow H_{\partial\Omega}^n(\mathbb{D}^n \times i\mathbb{R}^n, \tilde{\mathcal{O}}) \longrightarrow H_{\Omega}^n(\mathbb{D}^n \times i\mathbb{R}^n, \tilde{\mathcal{O}}) \longrightarrow H_{\Omega}^n(\mathbb{D}^n \times i\mathbb{R}^n - \partial\Omega, \tilde{\mathcal{O}}) \\ &\longrightarrow 0 \quad (\text{最後の } \rightarrow 0 \text{ の部分は} \end{aligned}$$

Th. 4.2.6. による。 $H_{\Omega}^{n+1}(\mathbb{D}^n \times i\mathbb{R}^n, \tilde{\mathcal{O}})$ に

についても同様。従って特に $H_{\Omega}^p(V, \tilde{\mathcal{O}}) = 0$
 $p \geq n+1$ は明らか。) この完全系列を
 前定理により, $H_{\Omega}^p(D^n \times i\mathbb{R}^n - \partial\Omega, \tilde{\mathcal{O}})$
 $= 0$ ($0 \leq p \leq n-2$) は明らか。

更に $0 \rightarrow H_{\Omega}^{n-1}(D^n \times i\mathbb{R}^n - \partial\Omega, \tilde{\mathcal{O}})$
 $\rightarrow [\mathcal{O}(\partial\Omega)]' \xrightarrow{j} [\mathcal{O}(\bar{\Omega})]'$ が、前
 定理により得られるが、§3の近似定
 理の系として j は明らかに injective,
 従って $H_{\Omega}^{n-1}(D^n \times i\mathbb{R}^n - \partial\Omega, \tilde{\mathcal{O}})$ も
 vanish しなければならない。以上を
 まとめて、

Th. 4.2.2. $\tilde{\mathcal{O}}$ は D^n に関して purely n -
 codimensional であり、特に、
 Fourier 超函数の空間 $\{\mathcal{O}(\Omega)\}$
 は、flabby sheaf になっている。

この節の最後に、Th. 4.2.1. で得られた duality
 theorem について global な場合 即ち
 $K = D^n$ の場合、具体的な pairing が容易
 に得られるので、それについて少し触れておく。

$I = \{-1 < y < 1\}$ とし $V_0 = D^n \times \sqrt{-1} I^n$,
 $V_j = D^n \times \sqrt{-1} \{y \in I^n \mid y_j \neq 0\}$ とし, $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j=0}^n$,
 $\mathcal{V}' = \{V_j\}_{j=1}^n$ と定めれば, Excision Theorem と

§2の結果を用いて Lerayの同型定理(たとえば小松[8] p.77, Th. II.3.2, p.98, Th II.3.29.)により

$H_{D^n}^n(D^n \times i\mathbb{R}^n, \tilde{\sigma})$ の元を $H^n(\mathcal{V}, \mathcal{V}', \tilde{\sigma})$ の元により表わすことができる。更にこの場合

coveringの特殊化により, $H^n(\mathcal{V}, \mathcal{V}', \tilde{\sigma})$ の代表元として, $\tilde{\sigma}(V_1 \cap \cdots \cap V_n)$ の元により

表わすことができる。それを $\{\varphi_1, \dots, \varphi_{2^n}\}$

とし, $f \in \mathcal{O}(D^n)$ に対して,

$$\langle [\varphi], f \rangle_{\text{df}} = \sum_{j=1}^{2^n} \pm \int_{-\infty \pm i0}^{\infty \pm i0} \cdots \int \varphi_j(z) f(z) dx_1 \cdots dx_n \quad \dots (1)$$

(符号は、積分路が第2j象限にある時、+, 他の時 - とする。) と定めることにより、明らかに

$H_{D^n}^n(D^n \times i\mathbb{R}^n, \tilde{\sigma}) \xrightarrow{\varphi} (\mathcal{O}_*)'$ なる写像が定義できる。次に $(\mathcal{O}_*)' \xrightarrow{h} H_{D^n}^n(D^n \times i\mathbb{R}^n, \tilde{\sigma})$

を次のように定める。(§5で再びこの写像については詳しく触れる。) その定義の爲、1,2 準備を行う。(hの定義は p.60. にある。)

Prop. 4.2.3. $\mathcal{B}_* (= \mathcal{Q}(\mathcal{D}))$ は Fourier 変換に対して安定である。

証明] 定義から明らかである。又、もし $\mathcal{B}_* \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{B}_*$ (但し $\mathcal{F}g = \int e^{ix\xi} g(x) dx$) は明らかに closed operator であり、 $\because \mathcal{B}_*$ は DFS-space 故、 $\mathcal{F}$ の graph の closed を調べるには点列で考えれば十分、従って $\mathcal{B}_*$ の位相の定義と Lebesgue の収束定理により明らか。しかも bijective 故 $\mathcal{B}_*$ から $\mathcal{B}_*$ への topological な isomorphism にもなっている。そこで

Def. 4.2.4. $(\mathcal{B}_*)' \ni \mu$ に対し、

$$\langle \mathcal{F}\mu, f \rangle_{\mathcal{B}_*} = \langle \mu, \mathcal{F}f \rangle \quad (\forall f \in \mathcal{B}_*)$$

より μ の Fourier 変換 $\mathcal{F}_d \mu$ を定める。

$$\text{又、} \langle \mathcal{F}_d \mu, f \rangle_{\mathcal{B}_*} = \langle \mu, \overline{\mathcal{F}f} \rangle \text{ とする。} (\mathcal{F} \text{ は Fourier 逆変換})$$

更に、 $\mathcal{D}^n$ を 2^n 個の象限に分けてそれらを

$K_1, \dots, K_{2^n}$ とする。この時

Th. 4.2.5. $\mu \in (\mathcal{B}_*)'$ とすると

$$\exists \mu_j \in (\mathcal{Q}(K_j))' \quad \mu = \sum \mu_j \text{ とできる。}$$

証明] $\mathcal{B}_* \longrightarrow \bigoplus \mathcal{Q}(K_j)$ なる

自然な restriction map を考える。これは
定義から直ちに分るように injective な
closed range operator である。(いつも
通り、対象が DFS-space 故 点列で考
えてよいから明らかである。) 従ってこの
写像の dual を考えれば、

$$\begin{array}{ccc} \oplus [\mathcal{Q}(K_j)]' & \longrightarrow & (\mathcal{Q}_*)' \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mu_j) & \longmapsto & \Sigma \mu_j \end{array}$$

は surjection になっている。

Def. 4.2.6. Th. 4.2.5. で得られた
 μ の分解に対し、

$$\langle \mu_j, e^{iz\xi} \rangle_{\overline{\mathcal{Q}}} F_j(\xi) \text{ と定めるとき、} \\ \{F_1(\xi), \dots, F_{2^n}(\xi)\} \in H_{\mathcal{Q}}^n(D^n \times i\mathbb{R}^n, \widehat{\mathcal{Q}})$$

実際、問題は、これが μ の分解の
仕方によらないかどうかを確かめることで
あるか。それは、§3 の近似定理により
 $\mathcal{Q}(D^n)$ が $\mathcal{Q}(K_j)$ で dense だから

$$[\mathcal{O}(K_j)]' \hookrightarrow [\mathcal{O}(D^n)]' \text{ とみなす}$$

ことにより, μ の分解の ambiguity は
 $[\mathcal{O}(K_j)]' \cap [\mathcal{O}(K_k)]'$ に属する元 ν
 によって与えられる。以下が"ここで"

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{O}(K_j \cup K_k) &\longrightarrow \mathcal{O}(K_j) \oplus \mathcal{O}(K_k) \\ &\quad \downarrow \\ &\quad (f, g) \mapsto \\ &\rightarrow \mathcal{O}(K_j \cap K_k) \longrightarrow H^1(K_j \cup K_k, \mathcal{O}) \\ &\quad \downarrow \\ &\mapsto (f - g) \end{aligned}$$

$\rightarrow \dots$ を考えれば" p. 51. で注意した
 ように $H^1(K_j \cup K_k, \mathcal{O}) = 0$ 故.

そのような元 ν は $[\mathcal{O}(K_j \cap K_k)]'$ の元
 と見なすことができる。従って $\langle \nu, e^{iz} \rangle$
 を考える時、それは $H_{D^n}^n(D^n \times i\mathbb{R}^n, \tilde{\mathcal{O}})$ で
 は 0 元を定めている。従って Def. 4.2.6.
 は意味をもつ。

以上の準備の下で、

Def. 4.2.7. ($\mathcal{R}$ の定義)

$(\mathcal{O}_*)' \ni \mu$ に対し $\exists \mu_{\partial \mathbb{D}} \nu$ (Def. 4.2.4.
 参照) とし. ν を Th. 4.2.5. により $\sum \nu_j$ と

分解し、それに Def. 4.2.6 を適用して、

$\{F_j(z)\} \in H_{0^n}^n(D^n \times i\mathbb{R}^n, \tilde{\sigma})$ の元を
定める。これを $k(\mu)$ と定める。

この時

Th. 4.2.8. $j \circ k: (\mathcal{P}_*)' \rightarrow (\mathcal{Q}_*)'$ は identity
map, かつ j は injective. 従って特に
 j, k は bijective

証明] 1) $j \circ k = \text{id}$. の証明.

$f \in \mathcal{Q}'(D^n)$ とする。p. 57. の (1) により

$$\langle j \circ k(\mu), f \rangle = \sum \pm \int \cdots \int F_j(z) f(z) \cdot$$

$$d\xi_1 \cdots d\xi_n = \sum \int \cdots \int \langle v_j, e^{iz\xi} \rangle f(z)$$

$d\xi_1 \cdots d\xi_n$ ($F_j(z)$ の定義の時, 符号

は, p. 57. の規約と compatible となるように
定めておくこととする。)

$$= \sum \langle v_j, \int \cdots \int e^{iz\xi} f(z) d\xi_1 \cdots d\xi_n \rangle$$

$$= \langle v, \int \cdots \int e^{iz\xi} f(z) d\xi_1 \cdots d\xi_n \rangle$$

$$= \langle v, \mathcal{F}f \rangle = \langle \overline{\mathcal{F}d\mu}, \mathcal{F}f \rangle = \langle \mu, f \rangle$$

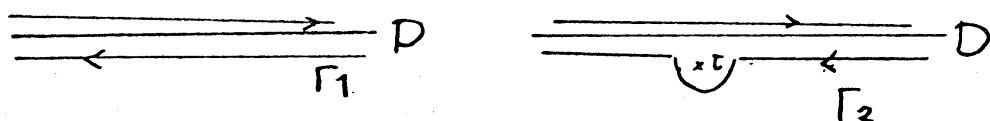
がすべての $f \in \mathcal{O}(\mathcal{D}^n) (= \mathcal{O}_*)$ に対して
成立しているから $j \circ k = \text{id}$.

ii) j が injective の証明.

$$\langle [\varphi], f \rangle = 0 \quad \forall f \in \mathcal{O}_* \quad \text{としよう.}$$

$$\text{ここで } f_t(z) = \exp(-(t-z)^2) / \underset{\text{df}}{-2\pi i(t-z)}$$

とする。簡単の為 $n=1$ としよう。 ($n \geq 2$ の
時も全く同じである。)



今、 Γ_1, Γ_2 なる2つの積分路を考えよう。
この時 t が図の位置にあるとして

$$\int_{\Gamma_2} \varphi(z) f_t(z) dz - \int_{\Gamma_1} \varphi(z) f_t(z) dz$$

$$= \varphi(t) \quad (\because \text{Cauchyの積分公式})$$

$$\text{よって仮定より } \int_{\Gamma_1} \varphi(z) f_t(z) dz = 0$$

ところが $\int_{\Gamma_2} \varphi(z) f_t(z) dz$ は $t \in \mathcal{D}$
でも定義され、しかも、 $z-t=u$ と積

分変数を変数してみると

$$\left| \int_{\Gamma_2} \varphi(z) f_t(z) dz \right| \leq \int_{\Gamma'_2} |\varphi(u+t)| \frac{\exp(-u^2)}{u} du$$

故 $|\varphi(z)| \leq A_\varepsilon e^{\varepsilon|z|}$ ($\forall \varepsilon$) か. Γ_2 上で

成立していることから

$$\left| \int_{\Gamma_2} \varphi(z) f_t(z) dz \right| \leq B_\varepsilon e^{\varepsilon|z|} \quad (\forall \varepsilon) \text{ か}$$

$|Im t| < \exists \delta$ ($\delta \ll 1$) で成立する。従って、
 $\varphi(t)$ は cohomology class として 0 である。

以上により、p.57. で定義した 積分(1) により $H_{\mathbb{D}^n}^n(\mathbb{D}^n \times i\mathbb{R}^n, \tilde{\mathcal{O}})$ と $\mathcal{P}_*$ の pairing が
 与えられることが分った。

§5. Fourier (-Carleman - Leray - Sato) 変換

この節では、Fourier 変換の具体的な取扱いの一つの方法を示すことを目標とする。一種の Paley-Wiener の定理である。このような考え方は多分 Leray [30] に始まるのではないかと思う。あるいは Carleman [3] もこのような試みをしているのかも矢口れない (cf. Martineau [38] (Ch. 5.)) が見る機会を得なかった。

尚、この節のかなりの部分は既に §4. 4.2. で具体的な duality の表現に関して述べてある。

5.1. (Cone に support をもつ) Fourier 超関数の Fourier 変換

Th. 5.1.1. Γ を $\mathbb{R}^n$ の closed, strictly convex cone (即ち 全直線を含むことはない convex cone) とする。更に 簡単の爲 Γ の頂点は原点であるとし、更に座標軸は $\Gamma \subset \{x_1 \geq 0\}$ となるようにとらわれているとしておく。(ここで、一般に 2つの cone $\Gamma_1,$

Γ_2 に対して, $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$ とは, $\Gamma_1 \cap \{|x|=1\} \subset \Gamma_2 \cap \{|x|=1\}$ の略記とする。以下においても同様。この時 K を Γ の $\mathbb{D}^n$ における closure として, $\mu \in [\mathcal{Q}(K)]'$ とする。この μ に対し, $\langle \mu, e^{iz\zeta} \rangle$ を考えると, これは $\zeta \in \mathbb{R}^n \times \sqrt{-1} (\Gamma^0)^i$ に対して well-defined かつそこで "正則" で, しかも $\forall \theta > 0, \forall \Gamma' \subset \Gamma^0$ に対しても, $\mathbb{R}^n \times \sqrt{-1} (\Gamma' + \delta(1, 0, \dots, 0))$ において, 次の評価を満たす。

(*) $\forall \varepsilon > 0 \exists C_\varepsilon$ (もちろん C_ε は Γ' にも依存する。)

$$|\langle \mu, e^{iz\zeta} \rangle| \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon |\operatorname{Re} \zeta| + \chi_{\Gamma, \varepsilon}(\operatorname{Im} \zeta)}$$

但し, 以上において Γ^0 とは, Γ の polar set, 即ち $\{\zeta \mid \langle x, \zeta \rangle \geq 0\}$ であり $(\)^i$ は 開核の意である。

$$\chi_{\Gamma, \varepsilon}(\zeta) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in \Gamma - \varepsilon(1, 0, \dots, 0)} (-\langle x, \zeta \rangle + \varepsilon |x|)$$

[証明] $\mathcal{Q}(K)$ の位相の定義から, 殆んど明らかである。実際, $\forall U \supset K$ に対し ε を十分小さくとれば $(\Gamma - \varepsilon(1, 0, \dots, 0)) \times \sqrt{-1} \{|y| < \varepsilon\} \subset U$ 故, $\mathcal{Q}(\Gamma) =$

$= \varinjlim \mathcal{O}^m(U_m)$ (即ち, U_m を K の基本近傍系 ($nD^n \times i\mathbb{R}^n$) とし, $\mathcal{O}^m(U_m) = \{f(z) \in \mathcal{O}(U_m \cap \mathbb{C}^n) \mid \sup |f(z)| e^{\frac{1}{m}|z|} < \infty\}$ と定めたもの, $\{z \in U_m\}$ 参照) という定義から, 定理の条件を満たす限り,

$$|\langle \mu, e^{iz\zeta} \rangle| \leq C_\varepsilon \sup_{z \in (1-\varepsilon(1,0-\infty)) \times \sqrt{1-\varepsilon}|z| < \varepsilon} |e^{iz\zeta + \varepsilon|z||}$$

が成立しなければ"いけないからである。

又, $\langle \mu, e^{iz\zeta} \rangle$ の正則性も,

$$\frac{e^{iz\zeta'} - e^{iz\zeta}}{\zeta' - \zeta} \xrightarrow{(\zeta' \rightarrow \zeta)} iz e^{iz\zeta} \text{ が } \mathcal{O}(K)$$

の位相で成立するから明らかである。

注意. 形式的に, $\chi_{\Gamma, \varepsilon}(\eta)$ という函数を導入したが, それは, 上の証明から判るように, $\varepsilon \eta_1$ としてよい。(座標軸のとり方による。)

$(\eta_1 \gg 1 \text{ とし})$

次に, 前節 p. 58 で $(\mathcal{P}_+)' (\cong H_{\mathbb{D}^n}^n(D^n \times i\mathbb{R}^n, \tilde{\theta}))$ の元 μ に対して, duality を用いて定義した Fourier 変換 $\mathcal{F}_d$ を利用

して、Th. 5.1.1. の逆定理を証明しよう。

Th. 5.1.2. Th. 5.1.2. の結果の成立するような $\mathbb{R}^n \times \sqrt{-1}(\Gamma^0)^i$ における正則関数 $F(z)$ (即ち $\forall \Gamma' \in \Gamma^0$ において Th. 5.1.2. の μ という増大度制限を満たすとする) はもちろん p.57 で述べたように $H_{D^n}^n(D^n \times i\mathbb{R}^n; \tilde{\mathcal{O}})$ の元 μ を定める。(即ち μ は $F(z)$ の“境界値”である。) この時、§4.4.2. の最後の部分で述べたように $H_{D^n}^n(D^n \times i\mathbb{R}^n; \tilde{\mathcal{O}})$ の pairing は自然な形で与えられるから、 μ を $(\mathcal{O}_*)'$ の元とみなすことができる。(§4.4.2. の記号では $j(\mu)$) すると、p.58. の Def. 4.2.4. を用いて、 $\mu = \mathcal{F}_d^{\exists 1} \nu$ $\nu \in (\mathcal{O}_*)'$ なる ν を見つけることができる。
($K \in \Gamma$ の D^n での開包として)
 この時、 ν は $\bigwedge_{K \in \Gamma} \mathcal{O}(K)$ の線形汎関数に拡張できる、即ち $\nu \in [\mathcal{O}(K)]'$ とみなすことができる。

証明] Γ の凸性により本質的には $m=1$ の場合に帰着される。まず $m=1$ の場

合を示そう。§3の近似定理により、
 $f(s) \in \mathcal{O}^m(D)$ (即ち $\sup_{|\operatorname{Im} s| < 1/m} |f(s)| e^{\frac{1}{m}|s|} < \infty$)
 として $\forall \varepsilon$ に対しても $\exists C_\varepsilon$ が存在して

$$\left| \int_{-\infty+i0}^{\infty+i0} F(s) f(s) ds \right| \leq C_\varepsilon \sup_{z \in \Gamma_\varepsilon \cap \mathbb{C}} |(Ff)(z)| e^{\varepsilon|z|} \text{ が成立}$$

すなわちよいことは、 $\mathcal{O}(K)$ の位相の定義
 により明らか。(但し、ここで Γ_ε は K の
 $\mathbb{D} \times i\mathbb{R}$ における " ε -近傍", 即ち $\Gamma_\varepsilon \cap \mathbb{C}$
 $= \{x+iy \mid x \geq -\varepsilon, |y| < \varepsilon\}$ (但し今
 $\Gamma = \{x \geq 0\}$ とした) である。) 又、ここで、
 $\int_{-\infty+i0}^{\infty+i0} ds$ という記号は、もちろん f の正則
 域に応じて 十分小さい δ に対し $\int_{-\infty+i\delta}^{\infty+i\delta} ds$

とするの意である。(well-defined は F, f の
 条件は明らか。) しかるに $F: \mathcal{O}_* \simeq \mathcal{O}_*$
 故 $(Ff)(z)$ を改めて $g(z)$ と書くこととて
 $f = \overline{F}g$ 故, 上の不等式を証明する

には、次の不等式を示せばよい：

$$\left| \int F(\zeta) \int e^{-i\zeta z} g(z) dz d\zeta \right|$$

$$\leq C_\varepsilon \sup_{z \in \Gamma_\varepsilon \cap \mathbb{C}} |g(z) e^{\varepsilon|z|}|$$

その証明は： 左辺の積分を I とする。更

$$I_+ \equiv \int_{\substack{\zeta+i\delta \\ \zeta \geq 0}} F(\zeta) \int_{x-i\delta} e^{-i\zeta z} g(z) dz d\zeta$$

$$I_- \equiv \int_{\substack{\zeta+i\delta \\ \zeta \leq 0}} F(\zeta) \int_{x+i\delta} e^{-i\zeta z} g(z) dz d\zeta$$

$$J_{++} \equiv \int_{\substack{\zeta+i\delta \\ \zeta \geq 0}} F(\zeta) \int_{\substack{x-i\delta \\ x \geq -\delta'}} e^{-i\zeta z} g(z) dz d\zeta$$

$$J_{+-} \equiv \int_{\substack{\zeta+i\delta \\ \zeta \geq 0}} F(\zeta) \int_{\substack{x-i\delta \\ x \geq -\delta'}} e^{-i\zeta z} g(z) dz d\zeta$$

$$J_{-+} \equiv \int_{\substack{\zeta+i\delta \\ \zeta \leq 0}} F(\zeta) \int_{\substack{x+i\delta \\ x \geq -\delta'}} e^{-i\zeta z} g(z) dz d\zeta$$

$$J_{--} \equiv \int_{\substack{\zeta+i\delta \\ \zeta \leq 0}} F(\zeta) \int_{\substack{x+i\delta, x \geq -\delta' \\ b\eta}} e^{-i\zeta z} g(z) dz d\zeta$$

と定めれば、明らかに $I = I_+ + I_-$

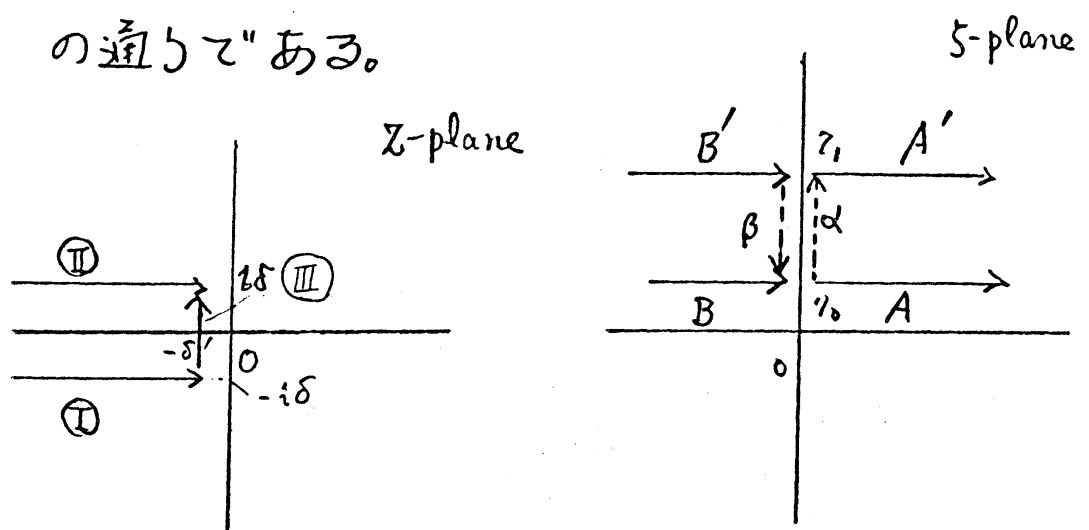
$I_+ = J_{++} + J_{+-}$, $I_- = J_{-+} + J_{--}$ で
あり、しかも $|J_{++}|$, $|J_{-+}|$ が求める
不等式の右辺で押えられることは明らか
である。

$F(\zeta)$ についての定理の仮定 (*) を用いて
 $\forall \theta > 0, \forall \delta' > 0$ に対しても、 $\delta > 0$ を十分小さくとれば、
 $|J_{+-} + J_{--}| < \theta$ が成立することを

$$\text{示そう。 } J_{+-} = \int \int_{\textcircled{I} \times A} dz d\zeta,$$

$$J_{--} = \int \int_{\textcircled{II} \times B} dz d\zeta \quad \text{と積分路を}$$

略記する。ここで $\textcircled{I}, \textcircled{II}, A, B$, は下図
の通りである。



ここで $\int \int_{\textcircled{I} \times A} dz d\zeta$ を $\int \int_{\textcircled{I} \times A'} dz d\zeta$ に,

$\int \int_{\textcircled{II} \times B} dz d\zeta$ を $\int \int_{\textcircled{II} \times B'} dz d\zeta$ に変更

したい。実際 そうすれば $r, \uparrow \infty$ とするに

により、これから $\int \int_{\textcircled{I} \times A'} dz d\zeta, \int \int_{\textcircled{II} \times B'} dz d\zeta$

$\rightarrow 0$ が知られるからである。

ところが $(J_{+-} + J_{--}) - \left(\int \int_{\textcircled{I} \times A'} dz d\zeta + \right.$
 $\left. + \int \int_{\textcircled{II} \times B'} dz d\zeta \right) = \int \int_{\textcircled{I} \times \alpha} dz d\zeta$

$+ \int \int_{\textcircled{II} \times B} dz d\zeta = \int \int_{(\textcircled{I} - \textcircled{II}) \times \alpha} dz d\zeta$

($-\textcircled{II}$ とは $\textcircled{II}$ の orientation を逆にした意)

よって $-\alpha$. Cauchy の積分定理により

$$\int_{\alpha} \left(\int_{\textcircled{I} + \textcircled{III} - \textcircled{II}} dz \right) d\zeta = 0$$

従って $\left| \int \int_{\alpha \times \textcircled{III}} dz d\zeta \right| \rightarrow 0$ を言えば十分。

しかるに、ここで再び $F(s)$ についての条件(*)
を用いることにより、 $\forall \delta'$ に対して $\exists C_{\delta'} \text{ s.t.}$

$$\left| \int_{\gamma_0}^{\infty} F(i\tau) \int_{-\delta}^{\delta} \exp(-iz\zeta) g(z) dy d\tau \right|$$

$$\leq C_{\delta'} \int_{\gamma_0}^{\infty} \exp\left(\frac{\delta'}{2}\tau\right) \int_{-\delta}^{\delta} \exp(-\delta'\tau) dy d\tau.$$

($\because \exp(-iz\zeta) = \exp(\tau z)$ から $\operatorname{Re} z \leq$
 $\leq -\delta'$ 、しかも $\{0+i y\} - \delta_0 < y < \delta_0$ (δ_0

$(>\delta)$ fixed) において $|g(z)|$ は有界故)

$$\leq 2\delta C_{\delta'} \int_{\gamma_0}^{\infty} \exp\left(-\frac{\delta'}{2}\tau\right) d\tau$$

$\rightarrow 0$ ($\delta \rightarrow 0$) 以上により、 $m=1$ の時

$$\left| \int F(s) f(s) ds \right| \leq C_{\varepsilon} \sup_{z \in \Gamma_{\varepsilon} \cap \mathbb{C}} |(Ff)(z) e^{\varepsilon|z|}|$$

が証明され、従って $\mu = \mathcal{F}_d \nu$ とした時、
 ν は $[\mathcal{Q}(K)]'$ の元に逆拡張できる
ことが判った。

次に $m \geq 2$ の場合の証明に移そう。

この場合、 Γ が closed convex cone で

あるから、 $\Gamma = \bigcap_{\xi} H_{\xi}$ (但し $H_{\xi} = \{x \mid \langle x, \xi \rangle \geq 0\}$)

≥ 0) という形に表現できることと、(4)の条件の与え方(即ち $\forall \Gamma \in \Gamma^0$ に対して (4)の評価が成立する, という仮定)により、本質的に $n=1$ の場合の評価でまに合う。(関 H_ε に対し、 $[\mathcal{O}(H_\varepsilon)]'$ の元 μ に対して、

$\langle \mu, e^{i2\pi z} \rangle$ を考えて、その正則性、増大度による μ の特徴付けと与えることは出来ないし、まして、 $\Gamma' \supset H_\varepsilon$ として $[\mathcal{O}(\Gamma')]'$ の元に対してそのようなことは出来ないから、それは一見奇妙に思えるが、実は、我は Γ' の近傍での $\sup$ -norm により積分が押えらぬることにより、 $\nu \in [\mathcal{O}(\Gamma')]'$ ということを出し、更に ξ をいろいろに動かした時 ξ の ξ に対しても

$$\nu \in [\mathcal{O}(\bar{H}_\varepsilon)]' \cong H_{\bar{H}_\varepsilon}^n(\mathbb{D}^n \times i\mathbb{R}^n, \tilde{\sigma})$$

(§4, Th. 4.2.1.) 従って $\mathcal{Q}(\Omega)$ が sheaf になっていることから (§4 Th. 4.2.2.)

$$\nu \in H_K^n(\mathbb{D}^n \times i\mathbb{R}^n, \tilde{\sigma}) \cong [\mathcal{O}(K)]'$$

と帰結できるのである。) 實際にその証明 ($n=1$ と同じでよい という demonstration) を行っておこう。記述を簡単にする為 $n=2$

としよう。我々は (適当に座標軸をかえることに
(より))

$$| \iint F(\xi_1, \xi_2) \iint e^{-i\langle \xi, z \rangle} g(z_1, z_2) dz_1 dz_2 |$$

$d\xi_1 d\xi_2$

の評価を $x_1 \geq -\varepsilon$ $\{|y_1| < \varepsilon\}$ における

$\sup |g(z)| e^{\varepsilon|z|}$ により行えば十分。

$\iint dz d\xi$ により 誤解のない ^(時は) 4重積分を以下現
おすこととする。 $n=1$ の時と同様に

$$\iint dz d\xi = \iint_{\xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0} dz d\xi + \iint_{\xi_1 \leq 0, \xi_2 \geq 0} + \dots$$

$= I_{++} + I_{-+} + I_{+-} + I_{--}$ とする。(もちろん

ξ_j の正負に応じて dz の積分経路は $\operatorname{Im} z_j$ を
負, 正とする。) 更に上の I_{++} etc. の dz につい

ての積分を分けることにより, $n=1$ の時と同様に
考えて.

$$\iint_{\xi_1 \geq 0} \int_{x_1 \leq -\varepsilon, x_1 - iy_1} G^+(\xi_1, z_1) dx_1 d\xi_1$$

$$- \int_{\xi_1 \leq 0} \int_{x_1 \leq -\varepsilon, x_1 + iy_1} G^+(\xi_1, z_1) dx_1 d\xi_1 | < \theta$$

(if $|y_1| \ll 1$)

が証明できるのはよい。ただし、ここで、

$$\underbrace{G^+(\zeta_1, z_1) \overline{G^+(\zeta_1, z_1)}}_{\substack{\int_{\zeta_2 \geq 0} F(\zeta_1, \zeta_2) \int_{\substack{\zeta_2 + i\eta_2^0 \\ x_2 - i\eta_2^0}} e^{-i(\zeta_1 z_1 + \zeta_2 z_2)} g(z_1, z_2) dz_2 \\ d\zeta_2}} \quad \text{と定めた。}$$

従って $G^+(i\tau, z_1)$ ($\tau > 0$) の評価が $n=1$ の時と同様に出るよ。とこから

$$\begin{aligned} |G^+(i\tau, z_1)| &\leq C_\varepsilon |e^{\tau x_1}| \int \int e^{\varepsilon|x_1| + \varepsilon|\zeta_2|} e^{-\zeta_2 \eta_2^0 + \eta_2^0 x_2} \\ &\quad \underbrace{(x e^{-\varepsilon(|x_1| + |x_2|)} dx_2 d\zeta_2)} \end{aligned}$$

が $F(\zeta_1, \zeta_2)$, $g(z_1, z_2)$ についての仮定から成立する。 ($\varepsilon \ll 1$)

$$\begin{aligned} \text{従って } |G^+(i\tau, z_1)| &\leq C'_\varepsilon e^{\tau x_1 + \varepsilon|x_1|} \quad \text{となるから, } n=1 \\ \text{の時の } \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} dz d\zeta &\rightarrow 0 \quad \text{はこの場} \end{aligned}$$

合も成立する。従って $n \geq 2$ の時も求める評価は成立する。

以上の Th. 5.1.1, Th. 5.1.2. によって,
 $[Q(K)]'$ の元 μ は, $K \cap \mathbb{R}^n$ が strictly convex である限り, Fourier 変換にて

ある tubular domain での正則函数として
 捕えるのが natural でもあり、又、便利そう
 であること（事実、我々は後に Ch. II §4 におい
 て 超函数論において 双曲性を論じる
 時、この捕え方が有効であることを示す。）
 が理解されたと思う。しかもその正則函数
 は、 $H_{\mathcal{D}^n}^n(\mathcal{D}^n \times i\mathbb{R}^n, \tilde{\mathcal{O}})$ と元と自然に考える
 ことができる (p. 57. 参照) から その“境界
 値”として定まる $H_{\mathcal{D}^n}^n(\mathcal{D}^n \times i\mathbb{R}^n, \tilde{\mathcal{O}})$ の元
 を μ の Fourier -(Carleman-Leray-Sato)
 -変換と呼び、 $\mathcal{F}_S \mu$, 略して $\mathcal{F} \mu$ と書
 くことにしよう。 (cf. Def. 4.2.6). この時、

$$\int \langle \mu, e^{i z s} \rangle f(s) ds = \langle \mu, \int e^{i z s} f(s) ds \rangle$$

$$= \langle \mu, \mathcal{F} f \rangle \stackrel{\text{by def}}{=} \langle \mathcal{F}_a \mu, f \rangle \quad (\forall f \in \mathcal{S}_*)$$

が成立しているから $\mathcal{F}_S \mu = \mathcal{F}_a \mu$ が
 成立する。 (cf. Th. 4.2.8.)

又、一般の $\mu \in H_{\mathcal{D}^n}^n(\mathcal{D}^n \times i\mathbb{R}^n, \tilde{\mathcal{O}})$ に
 対しても、 $\{g(\Omega)\}$ が sheaf になっ
 ているから、それを上のような support をもつ

分解を行い、(その分解を $\sum \mu_j$ とする)

$\langle \mu_j, e^{iz \cdot s} \rangle = \int F_j(s) \cdot (\mu_j \in [\mathcal{O}(K_j)]')$, 但し K_j は第 j 無限の $\mathbb{D}^n$ での閉包) と定めて, $\{F_j(s)\} \in H_{\mathbb{D}^n}^n(\mathbb{D}^n \times i\mathbb{R}^n, \tilde{\mathcal{O}})$ と考える (well-defined) ことにより μ の Fourier (-Carleman - Leray - Sato) 変換を定めるのは, p. 59. Def. 4.2.6. と同じである。

Ch. 2. 超函数論における一般線型 偏微分作用素論

この章で取り扱うのは §5 を除き定数係数の作用素である。(従って Fourier 変換の理論が有効に利用される。) 微分作用素 (ここでは最も広義の意味において考える。たとえば、無限位数の物 (所謂 local operator (後述 §1 Def. 1.1.1.)), あるいは差分方程式, 更に佐藤 [43] の意味での pseudo-differential op. 等も含めて言う。) に対する解析的性質を、代数的表現で記述しようという、Petrovsky, Gårding, Ehrenpreis-Malgrange - Hörmander 等の仕事の一つの真似である。§1. の結果は論理的にはともかくとして、実用上は不便である。更に Fourier 超函数の理論を拡張する必要を強く感じている。我々が目標とするのは、 $\mathcal{O}(\Omega)$ (超函数, たとえば 佐藤 [42], 小松 [28] 参照) 又は $\mathcal{B}/a$ (a は

実解析関数の層であり、 $\mathcal{O}/a$ はその quotient sheaf) 更に より精密に $\mathbb{C}$ (特異性の層, 佐藤 [43] 参照) での analysis であり, Fourier 超関数での 正しい 手段に過ぎない。 $\mathcal{Q}(\Omega)$ で 問題が "解けれ" は, 全ての問題は "解ける" けれど ($\mathcal{Q}(\Omega)$ が flabby sheaf であり, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ なら $\mathcal{Q}(\Omega) = \mathcal{O}(\Omega)$ だから) 逆は正しくない。 Fourier 変換の理論が うまく拡張されない。 §1. の条件 (S') は 理想的な条件 (S) におきかえると期待している。(p.84.)

§1. 除法問題 (general type) についての考察.

1.1. $\mathcal{Q}(D^n)$ における除法問題

Def. 1.1.1. S を compact support の 超関数とする。この時 $\mu \in \mathcal{Q}(D^n)$ に対し, $\langle S * \mu, f \rangle_{df} = \langle \mu, f * \check{S} \rangle$ により $S * \mu$ を定義する。但し $\check{S}(x) \stackrel{df}{=} S(-x)$, $f \in \mathcal{O}$ 特に S の support が $\{0\}$ だけの時.

S^* を local operator と呼ぶ。

注意. 上の定義は well-defined である。それには

$$\mathcal{B}_* \xrightarrow{T^*} \mathcal{B}_* \quad (T = \check{S}) \text{ が連続である}$$

ことを示せばよい。まず

i) T^* は $\mathcal{B}_*$ 全体で定義される。

実際 $f(x) \in \mathcal{B}_*$ としよう。定義により

$$(T^*f)(w) = \langle T_z, f(w-z) \rangle$$

ここで今 $f(x)$ は $|\operatorname{Im} x| < 3\varepsilon$ で正則かつ、 $|f(x)| \leq C e^{-\varepsilon|x|}$ としよう。

すると T は compact support の超函数、従って、それはよく知られているように、

real な compact set K を porter とする analytic functional と思、てよい。

(佐藤 [41], Martineau [37] 等)

従って K の近傍として $U \times \sqrt{1} \{|\operatorname{Im} z| < \varepsilon\}$ (U は K の $\mathbb{R}^n$ での近傍) をとることにすれば $\exists C_\varepsilon$

$$|\langle T_z, f(w-z) \rangle| \leq C_\varepsilon \sup_{z \in U \times \sqrt{1} \{|\operatorname{Im} z| < \varepsilon\}} |f(w-z)|$$

従って $|Im w| < \varepsilon$ とすれば f についての
仮定により, $\exists a$

$$|\langle T_z, f(w-z) \rangle| \leq C_\varepsilon \sup_{|t| < a} \exp(-\varepsilon|w-t|)$$

$$\leq C_\varepsilon \exp(-\varepsilon|w| + a\varepsilon)$$

よって $g(w) \overline{\langle T_z, f(w-z) \rangle} \in \mathcal{P}_*$

ii) i) の証明と同様にして $T^*: \mathcal{P}_* \rightarrow \mathcal{P}_*$
が連続であることも見易い。あるいは $\mathcal{P}_*$
が DFS-space であるから T^* が closed
operator であること (それも $\mathcal{P}_*$ が DFS-
space 故. 点列について言えば十分) を言え
ば i) から証明は終る。すなわち $\langle T_z, f_n(w-z) \rangle$
 $\overline{\text{of}} g_n(w)$ として $f_n \rightarrow f$ (in $\mathcal{P}_*$) から
 $g_n(w) \rightarrow g(w)$ (in $\mathcal{P}_*$) なら特に
 w を fix して $\langle T_z, f_n(w^0-z) \rangle \rightarrow \langle T_z,$
 $f(w^0-z) \rangle$, $g_n(w^0) \rightarrow g(w^0)$ が特に
成立するから $g(w^0) = \langle T_z, f(w^0-z) \rangle$
ie. $g(w) = \langle T_z, f(w-z) \rangle$. 従って
 T^* は closed operator.

更に この時,

Prop. 1.1.2. $\mu \in \mathcal{Q}(\mathbb{D}^n)$ とし. その Fourier 変換 $\mathcal{F}\mu$ (see Ch. 1 §4, §5.) の $H^n(\mathcal{V}, \mathcal{V}', \tilde{\mathcal{O}})$ での表現を $\{\varphi(\xi)\}$ とする. ここで $H^n(\mathcal{V}, \mathcal{V}', \tilde{\mathcal{O}})$ とは, $H_{\mathbb{D}^n}^n(\mathbb{D}^n \times i\mathbb{R}^n, \tilde{\mathcal{O}})$ の所謂 "covering に沿った表現" (Leray の同型定理による. たとえば, 小松 [] p. 98 Th. II, 3.29. 参照) である. 但し, $\mathcal{V} = \{V_0, V_1, \dots, V_n\}$, $\mathcal{V}' = \{V_1, \dots, V_n\}$, ここに $V_j = \overline{\text{cl}} \{z \in \mathbb{D}^n \times iU^n \mid \text{Im } z_j \neq 0\}$, $V_0 = \mathbb{D}^n \times iU^n$, (U^n はたとえば "半径 1 の開球") とした. さて, この時 $\nu \in \overline{\text{cl}} S * \mu$, $\langle S, e^{iz\xi} \rangle \in \overline{\text{cl}} J(\xi)$ とすると, $\mathcal{F}\nu$ の $H^n(\mathcal{V}, \mathcal{V}', \tilde{\mathcal{O}})$ の元としての表現として $\{J(\xi)\varphi(\xi)\}$ をとることができる.

証明] $f \in \mathcal{O}_*$ とし.

$$\begin{aligned}
 \langle \mathcal{F}\nu, f \rangle &= \langle \nu, \mathcal{F}f \rangle = \langle S * \mu, \mathcal{F}f \rangle \\
 &\stackrel{\text{by def}}{=} \langle \mu, \check{S} * \mathcal{F}f \rangle = \langle \overline{\mathcal{F}} \mathcal{F}\mu, \check{S} * \mathcal{F}f \rangle \\
 &= \langle \mathcal{F}\mu, \overline{\mathcal{F}}(\check{S} * \mathcal{F}f) \rangle = \langle \mathcal{F}\mu, \overline{\mathcal{F}} \check{S} \overline{\mathcal{F}} \mathcal{F}f \rangle \\
 &= \sum \int \dots \int \varphi(\xi) (J(\xi) f(\xi)) d\xi_1 \dots d\xi_n \quad (\text{Ch. 1.}
 \end{aligned}$$

§4の duality の表現による。)

$$= \sum \int \cdots \int |J(\zeta) \varphi(\zeta)| f(\zeta) d\zeta_1 \cdots d\zeta_n$$

ここで $|J(\zeta)| \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon|\zeta| + K|\operatorname{Im} \zeta|}$ ($\forall \varepsilon > 0$) が成立するから, $J(\zeta) \varphi(\zeta)$ は $H^n(\nu, \nu', \tilde{\sigma})$ の元を定めている. ($\because U^n$ は有界といたから, $K|\operatorname{Im} \zeta|$ の部分は C_ε に繰り込める.)

従って $\langle \mathcal{F}_\nu, f \rangle = \sum \int \cdots \int (J(\zeta) \varphi(\zeta)) f(\zeta) \cdot d\zeta_1 \cdots d\zeta_n$ が $\forall f \in \rho_*$ に對して成立する.

従って $\mathcal{F}_\nu$ の $H^n(\nu, \nu', \tilde{\sigma})$ での表現, 即ち, $\mathcal{F}_\nu$ の "定義函数" として $J(\zeta) \varphi(\zeta)$ をとてよい.

さて, S^* の $\mathcal{Q}(\mathbb{D}^n)$ における可解性の十分条件を与えるために, (Th. 1.1.4).

$$S^* : \mathcal{Q}(\mathbb{D}^n) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathbb{D}^n) \longrightarrow 0 \text{ (surj.)}$$

と仮定したとき, $\langle S, e^{iz\zeta} \rangle_{\overline{\sigma}} J(\zeta)$ にどのような条件が課せられるかを言明しよう. ただしこの定理(必要性)は $n=1$ の時にしかまだ証明ができていない.

(結果は $n \geq 2$ でも正しいと予想されるか.)

Th. 1.1.3 $S \in \text{compact support}$ の超函数とする。

$S^*: \mathcal{Q}(\mathbb{D}) \longrightarrow \mathcal{Q}(\mathbb{D})$ が surj. とする。

この時 $\langle S, e^{i\pi z} \rangle_{\text{of}} J(z)$ は次の条件 (S') を満たす。

$(S') : \forall \varepsilon > 0 \exists m_\varepsilon \text{ s.t. } \forall \xi \in \mathbb{R}$

$(|\xi| > m_\varepsilon)$ に対して $\exists \eta \in \mathbb{C}$ s.t.

$$\left. \begin{array}{l} \text{i) } |\xi - \eta| < \varepsilon \\ \text{ii) } |J(\eta)| \geq e^{-\varepsilon|\xi|} \end{array} \right\} \text{ の 2 条件 を 満 た す。}$$

("ideal condition" (S) は i) をもっと強い形に
すばきである。)

証明] 仮定から $\exists \mu \in \mathcal{Q}(\mathbb{D})$ s.t.

(*) $S^* \mu = \delta$ (δ : Dirac の δ -函数)

背理法によろう。今 (S') が成立しなかったとすれば、

(A)
$$\left\{ \begin{array}{l} \exists \varepsilon > 0 \text{ s.t. } \forall n \exists \xi_n \in \mathbb{R} \text{ s.t.} \\ |\xi_n| > m \text{ かつ } \forall \eta \text{ (s.t. } |\xi_n - \eta| < \varepsilon) \text{ に対し} \\ |J(\eta)| \leq e^{-\varepsilon|\xi_n|} \text{ が成立する。} \end{array} \right.$$

ここで(*) を Fourier 変換して、 $J(z) \varphi_+(z)$
 $= 1 + F(z)$ ($0 < \text{Im } z < \delta$), $J(z) \varphi_-(z) = F(z)$

$(-\delta < \text{Im } \xi < 0)$ が成立するとしてよい。ここで、
定義から φ_+ , φ_- , F は次の条件を満足する。

$\forall \delta, \forall \theta > 0$ に対しても $\exists A_{\theta, \alpha}$, B_{θ}

i+) $|\varphi_+(\xi)| \leq A_{\theta, \alpha} e^{\theta |\xi|}$ ($\alpha\delta < \text{Im } \xi < \delta$
において)

i-) $|\varphi_-(\xi)| \leq A_{\theta, \alpha} e^{\theta |\xi|}$ ($-\delta < \text{Im } \xi < -\alpha\delta$
において)

ii) $|F(\xi)| \leq B_{\theta} e^{\theta |\xi|}$ ($|\text{Im } \xi| < \theta$)

(もちろん φ_+ , φ_- , F は考えている所で正則
であることは仮定してある。)

従って 今 $\delta' \equiv \varepsilon/8$ とし $\forall \theta > 0$ に対しても

$$\begin{aligned} |J(\xi_n + i\delta')| &= |1 + F(\xi_n + i\delta')| \times \\ &\times |\varphi_+(\xi_n + i\delta')|^{-1} \\ &\geq C_{\theta} e^{-\theta |\xi_n + i\delta'|} |1 + F(\xi_n + i\delta')| \end{aligned}$$

一方、背理法の仮定により

$$|J(\xi_n + i\delta')| \leq e^{-\varepsilon |\xi_n|} \quad \text{従って}$$

$\theta = \varepsilon/2$ とし、

$$\exists C' e^{-\varepsilon/2 |\xi_n|} \geq |1 + F(\xi_n + i\delta')| \quad \text{--- ①}$$

同様の議論により、

$$C' e^{-\varepsilon/2 |\xi_n|} \geq |F(\xi_n + i\delta')| \quad \text{--- ②}$$

ここで、次の補題 (Malgrange と Hörmander による。という程 難しい補題ではないか)

lem. 1.1.4 $f(z), g(z), f(z)/g(z)$

が $|z| < R$ で正則, かつ, そこで,

$|f(z)| < A, |g(z)| < B$ が満たされて
いるとする。その時,

$$\begin{aligned} |f(z)/g(z)| &\leq A B^{2|z|/(R-|z|)} \times \\ &\times |g(0)|^{-(R+|z|)/(R-|z|)} \end{aligned}$$

が $|z| < R$ で成立する。 ($z \in \mathbb{C}^n$)

証明は 調和函数に対する Harnack
の不等式を用いて容易になされる。たとえば,
Hörmander [17] p.154. lem. 3.1. 参照

この補題は Ehrenpreis の minimum
modulus theorem より弱いけれど、局所
的に問題を考えうる点で便利である。

この補題を、我々は、 $f(z)=1, g(z)=F(z)$
として適用する。

前頁 ① により, $|F(\xi_n + i\delta')| \geq 1 - |1 +$

$$+ |F(\xi_n + i\delta')| \geq 1 - C' e^{-\frac{\varepsilon}{2} |\xi_n|}$$

よって $|\xi_n| \geq n$ 故 $\exists m_0$ $n \geq m_0$ ならば

$|F(\xi_n + i\delta')| \geq 1/2$ 従って補題を中心

$\xi_n + i\delta'$, 半径 $4\delta'$ の円に適用して

$$|1/F(\xi_n - i\delta')| \leq (1/2)^{-3} (B_0 e^{\theta |\xi_n| + 4\delta'\theta})^2$$

が p. 86 の $F(\xi)$ についての条件 ii) により, $\forall \varepsilon$

(>0) に対して成立する。 $e^{4\delta'\theta} \leq 2$ と考え

てかまわないから.

$$|F(\xi_n - i\delta')| \geq 1/(32B_0^2) e^{-2\theta |\xi_n|}$$

が $\forall \varepsilon > 0$ に対しても成立する。 しかるに p. 86

の ② 式により $C' e^{-\varepsilon/2 |\xi_n|} \geq |F(\xi_n + i\delta')|$

従って.

$$C' e^{-\varepsilon/2 |\xi_n|} \geq 1/(32B_0^2) \cdot e^{-2\theta |\xi_n|}$$

ここで $\theta = \varepsilon/8$ と選べば, $\exists M_0$

$$M_0 \geq e^{\varepsilon/4 |\xi_n|} \quad \text{しかるに } |\xi_n| > n \text{ だった}$$

から $n \rightarrow \infty$ として明らかにこれは

矛盾である。

以上により, 証明は終わった。

注意] 今の必要性の証明から明らかのように,

$$S^* : \mathcal{Q}(D)/\mathcal{O}_* \longrightarrow \mathcal{Q}(D)/\mathcal{O}_* \text{ が surj.}$$

としても結論は同じである。一方、次に示すように、仮定 (S') の下では,

$$S^* : \mathcal{Q}(D^n) \longrightarrow \mathcal{Q}(D^n) \longrightarrow 0 \text{ 故,}$$

$$\text{も 5.3 へ } \mathcal{Q}(D^n)/\mathcal{O}_* \longrightarrow \mathcal{Q}(D^n)/\mathcal{O}_* \longrightarrow 0$$

である。これらの事実は, sheaf $\mathcal{C}$ での analysis と関係して重要である。

Th. 1.1.4. 仮定 (S') の下で,

$$S^* : \mathcal{Q}(D^n) \longrightarrow \mathcal{Q}(D^n) \longrightarrow 0 \text{ (surj.)}$$

証明] 今 $f(\zeta) \in \mathcal{O}_*$ としよう。このとき $\{\varphi_j(\zeta)\} \in H^n(\mathcal{V}, \mathcal{V}', \tilde{\mathcal{O}}) \cong \mathcal{Q}(D^n)$ (see. p. 82.)

とて、 $J(\zeta) \mathcal{O}_*$ 上で定義される

$$J(\zeta) f(\zeta) \longmapsto \int_{-\infty \pm i0}^{\infty \pm i0} \varphi_j(\zeta) f(\zeta) d\zeta_1 \cdots d\zeta_n$$

なる線形汎関数が連続であることを証明すれば、Hahn-Banach の定理により

$$J(\xi) \{ \theta(\xi) \} = \{ \psi(\xi) \} \quad (\text{in } Q(D^n))$$

この Fourier 逆変換をとって

$S^* u = f$ かつ $\forall f \in Q(D^n)$ に対して成立する。よって先程の汎函数の連続性を証明しよう。

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty+i\varepsilon}^{\infty+i\varepsilon} \cdots \int |f(\xi) \psi_j(\xi)| d\xi_1 \cdots d\xi_n \\ & \leq \int_{-\infty+i\varepsilon}^{\infty+i\varepsilon} \cdots \int |f(\xi) \psi_j(\xi)| (1+\xi^2)^N (1+\xi^2)^{-N} |d\xi_1 \cdots d\xi_n| \\ & \leq C_1 \left[\int_{|Im \xi - \varepsilon| < \delta} \sup |f(\xi)^2 \psi_j(\xi)^2 (1+\xi^2)^{2N_1}| \right. \\ & \quad \left. \times |(1+\xi^2)^{-2N_2}| d\xi_1 \cdots d\xi_n \right]^{1/2} \\ & \quad (N_1 - N_2 \stackrel{\text{def}}{=} N, \quad \delta < \varepsilon : \text{Schwarz の不等式を用いた。}) \end{aligned}$$

$$\leq C_2 \sup_{|Im \xi - \varepsilon| < \delta} |f(\xi) \psi_j(\xi) (1+\xi^2)^{N_1}|$$

ここで p. 86 lem. 1.1. 4. と仮定 (S') により $\delta < \delta' < \varepsilon$ と δ' をとれば、 $\forall \varepsilon > 0$ に対しても、

$$\sup_{|Im \xi - \varepsilon| < \delta} |f(\xi) \psi_j(\xi) (1+\xi^2)^{N_1}|$$

$$\leq C_3^0 \sup_{| \operatorname{Im} \zeta - \varepsilon | < \delta'} | J(\zeta) f(\zeta) e^{\theta | \zeta |} |$$

$$\begin{aligned} (\because | \operatorname{Im} \zeta - \varepsilon | < \delta' \text{ において } | \psi_j(\zeta) | \\ \leq A_\varepsilon e^{\varepsilon | \zeta |} \quad (\forall \varepsilon > 0) \text{ 故に}) \end{aligned}$$

従って ρ_* の位相の定義から,

$J(\zeta) f(\zeta) \longmapsto \langle [4], f \rangle$ は $J(\zeta) \rho_*$ で連続。よって 最初に述べたように、Hahn-Banach の定理により 定理は証明された。

さて、条件 (S') は たとえば $S \in \mathcal{D}'_{\text{pos}}$ 即ち、 S^* が通常の偏微分方程式であるならば、常に満たされる。(Malgrange の定理. Malgrange [33], Hörmander [18] Ch. 3. 等参照) 従って 通常の定数係数偏微分方程式は $\mathcal{Q}(\mathcal{D}^n)$ で必ずしも解をもつ。(cf. Hörmander [16])

従って $\{\mathcal{Q}(\Omega)\}$ が flabby sheaf であることから、特に、 $\forall \Omega \subset \mathbb{R}^n$ に対し

$\mathcal{P}(\mathcal{D}_x) : \mathcal{B}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{B}(\Omega)$ が必ずしも

解ける。これは Harvey [15] の定理の一つの別証明である。しかし、更に、通常の偏微分方程式を対象にすると次の定理が成立する。

Th. 1.1.5. $P(D_x)$ を偏微分方程式系とし、 $Q(D_x)$ を $P(D_x)$ の compatibility system と仮定する。(用語、その他については、たとえば小松 [28] (Ch. 7. Hörmander [20] Ch. 7. § 7.6. 等参照) 今、 $f \in \mathcal{G}(D^n)^J$, $Q(D_x) f = 0$ とすると、 $\exists u \in \mathcal{G}(D^n)^K$ s.t. $P(D_x) f = u$.

証明] Fourier 変換により、Th. 1.1.4. と同じく除法の問題に直せばよい。しかるに、

$v(\xi) \in \mathcal{O}_*$ とするとき、

Hörmander - Malgrange の不等式 (たとえば、Hörmander [20] p. 188. Prop. 7.6. 5. 参照) により、 $\exists v_1(\xi) \in \mathcal{O}_*$ か

$$\sup_{|Im \xi| < \delta'} |v_1(\xi)| \leq \sup_{|Im \xi| < \delta} |P(\xi) v_1(\xi) \times (1 + |\xi|^2)^N|$$

(但し $\delta' < \delta$) となり, しかも, $\star P(\zeta) v(\zeta)$
 $= \star P(\zeta) v_1(\zeta)$ としてよい。従って仮定
 より $v_1(\zeta) - v(\zeta) = Q(\zeta) \varphi(\zeta)$ も53ん
 こゝで 再び, 上の Hörmander - Malgrange
 の不等式により, $\varphi(\zeta) \in \mathcal{D}_\star$ としてよい。

従って $\star P(\zeta) v(\zeta) \longmapsto \langle [4], v_1 \rangle$
 は, $Q(\zeta)[4] = 0$ なる限り well-defined
 となり, しかも, v_1 の仮定から, この写像は
 連続である。従って Hahn-Banach の定理
 により, 定理が 成立することは, Th. 1.1.44.
 の証明と同じである。

⑨ 追加: 尚 条件 (S') は空間 $\mathcal{F}$ を少し変える
 ことにより もっと弱めうることが判った。これについては
 又別の機会に触れることとする。

§2. Ellipticity, Partial Ellipticity

この節では, local operator に対して その ellipticity, partial ellipticity etc. が完全に代数的条件で記述されることを示す。更にもっと一般の作用素に対しても, 適当な付帯条件の下では, 定理が成立することも示される。

2.1. local operator の ellipticity, partial ellipticity について。

Th. 2.1.1. $S \in$ 原点に support をもつ超函数とする。 $J(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \langle S, e^{-i\xi x} \rangle$ とし、更に、

$V = \{ \xi \in \mathbb{C}^n \mid J(\xi) = 0 \}$ と定める。今、

$p(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \text{dist}(\xi, V)$ として、 $|\xi| \gg 1, \xi \in \mathbb{R}^n$

なら $p(\xi) \geq c|\xi|$ ($c > 0$) が成立する

とする。この時、 S^* は elliptic operator

である。即ち、 $S^*u = f \quad f \in \mathcal{Q}(\Omega), u \in \mathcal{B}(\Omega)$

$\Rightarrow u \in \mathcal{Q}(\Omega)$

(ここで $\text{supp } S = \{0\}$ 故、 S^* は $\mathcal{B}(\Omega)$ を $\mathcal{B}(\Omega)$

内に移すことに注意: local operator の名の由縁である。)

注意 1. $\mathcal{D}'$ の範囲で作用素を考える時、合成積方程式迄許しても、楕円型方程式は余りたくさんないことが Ehrenpreis によって知られている。(即ち translation と通常の楕円型作用素の合成に限る。Ehrenpreis [5] 参照) これに対して $\mathcal{D}'$ の範囲では、極めて多種多様な作用素が楕円型になることか、この定理により知られる。それは、次のようにすればよい。たとえば、 $m=1$ とする。ここで $\{\alpha_m\}$ を $|\operatorname{Im} \alpha_m| > C |\operatorname{Re} \alpha_m|$ を満たし、しかも $\lim_{m \rightarrow \infty} m/\alpha_m = 0$ かつ、 $|\sum_{m=1}^k 1/\alpha_m| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ を満たす $\mathbb{C}$ 内の点列とする。このとき、 $J(z) \stackrel{\text{def}}{=} \prod (1 - z/\alpha_m)$ と定めると、Hindelf [32] の古典的結果により、 $\forall \varepsilon \exists A_\varepsilon \quad |J(z)| \leq A_\varepsilon e^{\varepsilon |z|}$ が成立し、従って analytic functional の表現定理 (Polya [40], Martineau [37], 等) により $\exists S$ s.t. $S \in \mathcal{B}$, $\operatorname{supp} S = \{0\}$

かつ $\langle S, e^{-iz^2} \rangle = J(f)$ とできるからである。即ち、このような S により、 S^* を考えれば、これは elliptic operator になっている。

注意2. 通常の偏微分方程式の ellipticity は、定数係数の場合、Harvey [15], 小松 [27], Bengel [1], 変数係数の場合、佐藤 [43], Schapira [46] 等により証明された。この内方法論的に面白いのは、小松 [27] と佐藤 [43] である。小松 [27] の idea は、複素領域の偏微分方程式論に話を持ち込んで、解の自然境界を調べる、というものであり、 $n=1$ の場合は、古典的な函数論を援用することにより、その方法を用いて、定理を極めて一般の場合に証明することもできる。(たとえば、Valiron [47] は我々に必要な道具の殆んどすべてを与えてくれている。) 以下の方法は、小松 [27] の idea の一つの欠点であった、
 “正則性の証明に、極めて大域的な

存在定理を必要とする" という点を Fourier 変換により 逃がれた物である。上に触れた。

Valiron の結果を用いる証明も中々味わいがあるのだけれど、既に以下の結果により、それは一つの"実験"と見なさるべき物となったと判断し、ここでは省略する。又、佐藤 [43] の idea は F. John [22] の基本解の構成の方法を代数的に再構成して極めて一般の定理を与える見事な物である。ここでもその idea を借用することにより、次の Th. 2.1.5. において partial ellipticity の理論を展開する。

Th. 2.1.1. の証明] S^* の parametrix $P(x)$ を構成すれば、十分。即ち $S^*P = \delta - W$ W は実解析函数。(実は以下で判るように, entire で"とれる。) かつ $\text{sing supp } P = \{0\}$ が証明できれば十分。

簡単の為 $m=1$ としよう。証明は、最後に注意するように $m \geq 2$ でも全く同様である。

今 $(\mathcal{P}_*)'$ の元 $Q(\zeta)$ を次のように定める。

$$\langle Q(\zeta), f(\zeta) \rangle = \int_{|\zeta| \geq K} f(\zeta) \frac{1}{J(\zeta)} d\zeta.$$

但し、ここで、 K は十分に大きくとることとし、 $|\operatorname{Im} \zeta| < C(\operatorname{Re} \zeta - K)$ or $|\operatorname{Im} \zeta| < -C(\operatorname{Re} \zeta - K)$ で $J(\zeta) \neq 0$ となるようにしておく。($J(\zeta)$ についての仮定) この時、

後に示す補題 Lem 2.1.2. により、

$J(\zeta)$ は $|\operatorname{Im} \zeta| < C'(\operatorname{Re} \zeta - K)$ or $|\operatorname{Im} \zeta| < -C'(\operatorname{Re} \zeta - K)$ ($C' < C$) において、

$$|J(\zeta)| \geq \exists C_\varepsilon e^{-\varepsilon|\zeta|} \quad (\forall \varepsilon > 0) \text{ を満}$$

たすとしてよい。従って $Q(\zeta)$ は well-defined である。積分を $\zeta > K$ の部分と $\zeta < -K$ の部分に分けることにし、 $Q(\zeta) = Q_1(\zeta) +$

$+ Q_2(\zeta)$. $\operatorname{supp} Q_1 \subset \{\zeta \geq K\}$,

$\operatorname{supp} Q_2 \subset \{\zeta \leq -K\}$ と仮定してよい。

従って、 $P(x) \equiv \mathcal{F} Q(\zeta)$ とすれば、

$$P(x) = \left\{ \int_{\zeta > K} e^{ix\zeta} \frac{1}{J(\zeta)} d\zeta, \int_{\zeta < -K} e^{ix\zeta} \frac{1}{J(\zeta)} d\zeta \right\}$$

$\in H^1_b(D \times i\mathbb{R}, \tilde{\mathcal{O}})$ なる Fourier 超函数

が得られる。この時 $S * P = \delta - W$

(W ; 実解析函数) となっている。実際、

$f(x) \in \mathcal{D}_*$ とし、

$$\langle S * P, f \rangle \underset{\text{by def.}}{=} \langle P, \check{S} * f \rangle$$

$$\underset{\text{by def.}}{=} \langle \overline{F}P, \overline{F}(\check{S} * f) \rangle \underset{\text{by def. of } P}{=} \langle Q, \overline{F}\check{S} \overline{F}f \rangle$$

$$\underset{\text{by def. of } Q}{=} \int_{|\xi| > K} \frac{1}{J(\xi)} \cdot \langle S, e^{-i\xi x} \rangle \overline{F}f \, d\xi$$

$$\underset{\text{by def. of } J(\xi)}{=} \int_{|\xi| > K} \overline{F}f \, d\xi$$

$$= \int \overline{F}f \, d\xi - \int_{|\xi| \leq K} \overline{F}f \, d\xi$$

$$= \langle \delta, f \rangle - \langle W, f \rangle \quad \text{但し、} W(x)$$

$$= \int_{|\xi| \leq K} e^{i\xi x} \, d\xi \quad \text{従って } S * P = \delta - W \text{ かつ}$$

$\mathcal{D}$ 上で"成立し、これを $\mathbb{R}$ に制限すれば、

W は明らかに real analytic になっている。

従って、我々は $\text{sing supp } S = \{0\}$ を示

せばよい。たとえば、 $\int_{\delta > k} e^{iz\delta} / J(\delta) d\delta$ について

($\text{Im } z > 0$ で定義されたこの正則函数が) $x \neq 0$ なる限り実軸を越えて解析接続されることと言えはよい。実際、それは積分路の変更によって次のようになされる。

今、 $x > \varepsilon, y > \varepsilon$ ($x = \text{Re } z, y = \text{Im } z$) として積分路を $\{\gamma = k(\delta - k)\}$ に変更する。

($0 < k < c/2, \gamma = \text{Im } \delta, \delta = \text{Re } \delta$) 実際、その変更は、 $x > \varepsilon, y > \varepsilon$ としてあるから、

$|J(\delta)| \geq C_\varepsilon e^{-\varepsilon|\delta|}$ ($\forall \varepsilon$) により、Cauchyの積分定理により可能である。所が、

$\{\gamma = k(\delta - k)\}$ 上での上の積分は、

(#) $\left\{ \begin{array}{l} y > -\frac{k}{2}x + t \quad (t = (1 + k/2)\varepsilon) \\ \text{解析接続される。} \end{array} \right.$

ことを示せば、 ε は任意、 k は fixed constant 故、 $\int e^{iz\delta} / J(\delta) d\delta$ は、 $x > 0$ で real analytic, 同様に $x < 0$ での解析性を調べるには、積分路を、 $\{\gamma = -k(\delta - k)\}$ に変更してやればよい。とこ

るが $J(s)$ についての条件から $y > -\frac{k}{2}x + k$
 $(k = (1+k/2)\varepsilon)$ ならば、

$$\int_{\gamma = k(s-k), s > k} e^{i\pi s} / J(s) ds \text{ は絶対収束するから}$$

明らかに、(H) は成立する。

次に $m \geq 2$ 以上の時も、上の論法はそのままの形で成立することは次のようにすれば判る。 $m=1$ の時の $Q(s)$ と同じく、

$$\langle Q(s), f(s) \rangle = \int \int_{|s| \geq K}^1 \frac{1}{J(s)} \cdot f(s) d\xi_1 \cdots d\xi_n$$

と定め、これをたとえば、 s -空間の各 j 象限毎に積分区間を分けて、それらを $(Q_1, \dots, Q_{2^n})$ として、 $\varphi(x) = \sum Q(s)$ を

$$\left\{ \int \cdots \int_{|s| > K, \text{第 } j \text{ 象限}} e^{i\pi s} / J(s) d\xi_1 \cdots d\xi_n \right\} \text{ と}$$

正則函数で表現し、この正則性を調べればよい。(積分路を $\gamma = \varepsilon s$ 、

$|s| > K$ に変更すれば、その積分と上の積分の差は、ある compact set Γ 上での

$e^{i\pi s} / J(s)$ の積分故 もろく ε につい

て正則 (entire) 函) $\int \dots \int e^{iz\xi} / J(\xi) d\xi_1 \dots d\xi_n$
 $\gamma = \varepsilon \xi, \xi \in \text{第 } j \text{ 象限}$
 $|\xi| > K$

の $x_1 > 0, \dots, x_n > 0$ における正則性は $n=1$ のときと同様。従って $P(x)$ は、

$x_1 \neq 0$ か $\dots$ か $x_n \neq 0$ において正則、しかるに $P(x)$ は $H_{D^n}^n(D^n \times i\mathbb{R}^n, \tilde{\mathcal{O}})$ の元として、座標系の取り方によらないから $x \neq 0$ で $P(x)$ は実解析的となる。

又、 $S * P = \delta - W$ W ; 実解析的、も $n=1$ の時と全く同じである。

注意. $S * P = \delta - W$ の証明で、上で P は Fourier 超函数の理論を用いたが、これは直接にも証明できる。

次に、上で残した $|J(\xi)|$ の下からの評価をしておく。

lem 2.1.2. Γ を $\mathbb{C}^n$ 内の open cone で (簡単の爲) 原点を頂点にする物としよう。
 (ここで Γ が $\mathbb{C}^n$ 内の原点を頂点にする cone

であるとは、もちろん $t \in \mathbb{R}^+$, $\xi \in \Gamma$
 $\Rightarrow t\xi \in \Gamma$ のことである。今 $J(\xi)$
 が Γ 内では決して零にならない。しかも、
 ① "全体で" order 1, minimum type
 の entire function であるとする、即ち、
 $\forall \varepsilon \quad |J(\xi)| \leq A_\varepsilon e^{\varepsilon|\xi|}$ が成立する
 とする。又、本質的なことではないから、
 $J(0)=1$ と normalize してあるとする。
 この時 $\forall \Gamma' \subset \Gamma$ においても $|J(\xi)|$ は、
 次のような下からの評価を満足する。
 $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists C_\varepsilon$
 $|J(\xi)| \geq C_\varepsilon e^{-\varepsilon|\xi|} \quad (\forall \xi \in \Gamma')$

a この事実が local operator の時には
 成立する (一般の convolution operator
 には成立しない。) ことを、最初気付かず、
 local operator と convolution operator
 の区別をせずにやっていて、佐藤先生に
 御叱りを受けた。佐藤先生の御指摘に
 深く感謝致します。

lem. 2.1.2. の証明に先立ち、一変数函数論
 でよく知られた次の補題をまず述べ置いておこ
 う。いずれもよく知られているが、たとえば、
 証明については Levin [31] p.19. Th. 9.
 p.21. Th. 11. を各々参照されたい。

lem. 2.1.3. $f(z)$ が $|z| \leq R$ で正則かつ
 そこでは $f(z) \neq 0$ と仮定する。この時 $r < R$
 とし、 $\forall z$ s.t. $|z| < r$ に対して、

$$(1) \log |f(z)| \geq -\frac{2r}{R-r} \log \sup_{|z|=R} |f(z)| \\
+ \frac{R+r}{R-r} \log |f(0)| \quad \text{が成立する。}$$

lem. 2.1.4, $f(z)$ が $|z| < 2eR$ で正則
 かつ $f(0) = 1$ とする。この時 $\forall \eta$ ($0 < \eta < 3e/2$;
 $e = 2.7 \dots$) に対しても、 $|z| \leq R$ 内において
 その半径の和が、高々 $4\eta R$ であるような円達
 の内部を除けば、任意の z に対して、

$$(2) \log |f(z)| > -H(\eta) \log \sup_{|z|=2eR} |f(z)|$$

が成立する。但し、 $H(\eta) = 2 + \log 3e/2\eta$

[lem. 2.1.2. の証明] 今 $\{z \in \mathbb{C}^n \mid |z|=1\}$

$\overline{\Gamma} \cap S$ とする。 $z \in S \cap \Gamma$ として、 $\{t\} \mid$

$|\operatorname{Im} t| < c \operatorname{Re} t\} \subset \Gamma$ ($c \ll 1$) とする

から、 $C_U = \bigcup_{z \in U} \{t\} \mid |\operatorname{Im} t| < c \operatorname{Re} t\}$

(但し U は $\Gamma \cap S$ の open set) と定め

る。 C_U は open cone になり、 U は

$U \subset \Gamma \cap S$ なら、 c を十分小さくとれば

$C_U \subset \Gamma$ となる。従って $\Gamma' \subset \Gamma$ ならば、

Γ' はこのような物の有限個で cover できる

から、 $J(tz_1, \dots, tz_n) \overline{f_z(t)}$ が、 $(z_1, \dots, z_n)$

によらず、ただ、 c のみによって影響を受ける

constant により、下からの評価を $\{t \in \mathbb{C} \mid$

$|\operatorname{Im} t| < \frac{c}{2} \operatorname{Re} t\}$ で持てば、証明は終る。

その証明をしよう。任意に $\varepsilon > 0$ を fix する。

この時 $J(z)$ についての仮定から

$|J(z)| \leq A_\varepsilon e^{\varepsilon |z|}$ が成立する。 (A_ε は

z にもらさぬ定数) 従って、特に $(z_1^0, \dots, z_n^0)$

$\in \Gamma \cap S$ に fix して $|f_{z^0}(t)| \leq A_\varepsilon e^{\varepsilon |t|}$

が $t \in \mathbb{C}$ に対して成立する。従って lem.

2.1.4. により, $|t| = R$, $|\operatorname{Im} t| < \frac{c}{2} \operatorname{Re} t$

なる任意の t に対し $\exists t_0$. $|t - t_0| < \delta \eta R$

(η は後に fix する。) s.t. $|f_{j_0}(t_0)|$

$\geq -H(\eta) \log(A_\varepsilon e^{2\varepsilon e R})$ が成立する。

ここで, $|t - t_0| < \frac{c}{4}(R - \delta \eta R)$ で,

$f_{j_0}(t) \neq 0$ と仮定してもよいから, ここで

lem. 2.1.3. を用いて, $|t - t_0| < \frac{c}{8}(1 - \delta \eta)R$

なる限り

$$\log |f_{j_0}(t)| \geq -2 \log \sup_{|t - t_0| = \frac{c}{4}(1 - \delta \eta)R} |f(z)|$$

$$+ 3 \log |f_{j_0}(t_0)|$$

$$\text{今ここで } \left(1 + \frac{c}{8}\right)(1 - \frac{\eta}{8})R > R$$

となるように η を十分小さくとれば,

(たとえば, $c < 1/2$ として $\eta = c/4$ で十分)

$$|t - t_0| < \frac{c}{8}(1 - \delta \eta)R \quad \text{となり, 又}$$

$$\{t \mid |t - t_0| = \frac{c}{4}(1 - \delta \eta)R\} \subset \{t \mid |t|$$

$< 2eR\}$ としてよいから,

上の不等式をつなぎあわせると,

$$\begin{aligned}
\log |f_{\zeta_0}(t)| &\geq -2 \log (A_{\varepsilon} e^{2\varepsilon e^R}) \\
&\quad - 3H(\gamma) \log (A_{\varepsilon} e^{2\varepsilon e^R}) \\
&= -(2+3H(\gamma)) \log (A_{\varepsilon} e^{2\varepsilon e^R})
\end{aligned}$$

ここで γ は C のみによって定まり,

A_{ε} は ζ_0 によらぬから, 結局, 考えている

領域では C のみによる constant C_{ε}

により, $|f_{\zeta}(t)| \geq C_{\varepsilon} e^{-2e(2+3H(\gamma))(\varepsilon|t|)}$

が成立する。 ε は任意であったから, 結局,

C を固定する限り,

$|f_{\zeta}(t)| \geq C_{\varepsilon} e^{-\varepsilon|t|}$ が成立する。

従って $\forall \Gamma' \subset \Gamma$ において求める評価が成立する。

次に, 上の定理 (Th. 2.1.1.) を更に精密化

しよう。即ち, $S^*u = f$ $f \in Q(\Omega)$, $u \in B(\Omega)$

とする時, S^* が elliptic でなくても, かなり

強い制約が u につらうることがある。その制

約を表現するには, 佐藤 [43] において

展開された sheaf C の理論が有効であ

る。実際 定理は次のように定式化される。

Th. 2.1.5. (Directional Regularity)

$$(A) \begin{cases} \exists c, c' > 0 \quad \text{s.t.} \quad (|\zeta_1| > c'(1+|\zeta|) \text{かつ} \\ \operatorname{Re} \zeta_1 > 0) \xRightarrow[\text{for } \zeta \text{ is}} (|\operatorname{Im} \zeta| < c(1+|\zeta|)) \\ \text{なす領域に } J(\zeta) \text{ の零点は存在しない} \end{cases}$$

という条件が成立しているとする。この時。

$S^*u = f \in \mathcal{A}(\Omega)$ とすれば, $[u] \in \mathcal{B}/\mathcal{A}$

を $S^{n-1} \times \Omega$ ($S^{n-1} \times \Omega$ は cosphere bundle)

上の sheaf $\mathcal{C}$ の元 $\beta(u)$ の direct image

として表現する時, $\operatorname{supp} \beta(u) \cap \{(1, 0, \dots, 0)\}$

$\times \Omega = \emptyset$ である。

注意 上の条件 (A) は, $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ の無限遠方

に S_{∞}^{2n-1} を付加して $\mathbb{D}^{2n}$ をつくるとき,

$\{\zeta \mid J(\zeta) = 0\}_{\partial \mathbb{D}^{2n}}^{\mathcal{A}} \cap S_{\infty}^{2n-1}$ の $\{(1, 0, \dots, 0)\}$

という点と交わらない, と表現できる。(この注

意は佐藤先生から頂いた。) 従って $J(\zeta)$

が多項式 $P(\zeta)$ のとき, 上の条件 (A) は,

$P_m(1, 0, \dots, 0) \neq 0$ と同値である。(P_m は P の

principal part) ここで, local operator

S^* に対しては、一般には、 $Re S_1$ の正負、
 2つの方向を区別して考えねばならぬこと
 に注意。これは、sheaf $\mathcal{C}$ の定義に、
 projective bundle ではなく cosphere
 bundle の現われざるを得なかった事実
 と対応する。(有限位数の作用素の場合
 に話を限っては、その事情は理解しにく
 かった訳である。)

証明] 証明は Th. 2.1.1. と同様である。

実際 $\{ \xi \in \mathbb{R}^n \mid |\xi| < c|\xi_1|, \xi_1 > k \}$

を Δ とすると仮定 (A) により、 c, k を
 適当にとれば、 Δ の D^{2n} での近傍に
 おいて $|J(\xi)| \geq C_\varepsilon e^{-\varepsilon|\xi|}$ が成立す
 ることは、lem. 2.1.2. により判るから。

$$\langle Q(\xi), f(\xi) \rangle = \int_{\Delta} f(\xi) \cdot \frac{1}{J(\xi)} d\xi_1 \cdots d\xi_n$$

($f(\xi) \in \mathcal{P}_*$) により ($\mathcal{P}_*$)' の元 $Q(\xi)$
 を定め、 $\mathcal{P}(x) = \int Q(\xi)$ と定めれば、
 $\text{supp } \mathcal{P}(P) \subset (\partial I) \times \mathbb{R}^n \cup I \times \{0\}$ (I は $(1, 0-0)$ の
 S^{n-1} での近傍) であることは、

Th. 2.1.1. と全く同じで"ある。ここで、

Th. 2.1.1. と同様にして、 $S * P = \delta - W$ を得るか、ここで W は formal には、

$\int \dots \int e^{ix\xi} d\xi_1 \dots d\xi_n$ と書かれる Fourier
§44

超函数となる。そこで $\mathcal{L}$ を有限個の convex cone と compact set の和集合で cover して、その各々の集合の特性函数 (ie. その上で $\equiv 1$, 他で $\equiv 0$) の Fourier 変換を考えれば、これは Ch. 1. §5 の結果により、 $(1, 0, \dots, 0)$ を含まない方向からの正則函数の極限值として表現できる。従ってこれを属 $\mathcal{C}$ の言葉に言い直せば、定理が直ちに得られる。

Cor. 1. $S * u = 0$ が $J(S)$ が Th 2.1.5. の $\pm(A)$ の条件を満たせば、 u は x_1 について real analytic に depend する。

証明] real analytic dependence の定義 (佐藤 [42] Ch. 3 §8 参照、尚、

real analytic parameter をもつ超函数
の理論については 柏原 [25] が明快で
ある。) により明らか。

更に我々は Th. 2.1.6. の逆が 成立することを示さ
う。

Th. 2.1.7. $J(S)$ は 前 Th. の条件 (A) を満
たさないとする。このとき $S*u=0$ の解で、
しかも $\text{supp } \beta(u) \cap \{(1, 0, \dots, 0)\} \times \Omega \neq \emptyset$ なる物
が存在する。

Q この定理が $m \geq 2$ 迄初めて $m=1$ の時と同じ方法
で証明できることは、小松先生から 御指摘を
受けた。小松先生に深く感謝致します。

証明] (A) が成立たないと仮定すれば、

$\varepsilon_m \downarrow 0$ として、次のような $\{S^m\}$ を選ぶことが
できる。(0) $J(S^m) = 0$

$$i) |S^m| > m^2 \quad ii) \left| \frac{\text{Im } S_j^m}{|S^m|} \right| < \varepsilon_m.$$

$$iii) \left| \frac{\text{Re } S_j^m}{|S^m|} \right| < \varepsilon_m \quad (j=2, \dots, n)$$

$$iv) \operatorname{Re} \zeta_1^m / |\zeta_1^m| > \delta \quad (\delta > 0)$$

$$v) |\zeta_1^m| - |\zeta_1^{m-1}| > 0,$$

$$\text{ここで } \sum_{m=1}^{\infty} \exp(-i \langle \zeta^m, z \rangle) \overline{\partial} F(z)$$

と定めると、定義により $\{| \operatorname{Re} z| < M\}$

$\times \sqrt{-1} \{ \operatorname{Im} z_1 > 0 \}$ で $F(z)$ は広義一様

に絶対収束する。もしこれが、これが実軸

(ie $\mathbb{R}^n$) をこえて接続されたとしよう。

$$\text{この時、 } F(z) = \sum a_m \exp(-i \zeta_1^m z_1)$$

と書いてみると、 $\{\zeta^m\}$ についての仮定により、

$F(z)$ は、 $z_2, \dots, z_n$ を fix して、 z_1 の函数と

見た時、ある ^{1変数の} local operator S_1 に対し、

$S_1 * F = 0$ を F が正則なる限り満足

する。しかるに、 S_1 が local operator であ

れば、 $\sum a_m \exp(-i \zeta_1^m z_1)$ の絶対収束

域と、 $F(z_1, z_2, \dots, z_n)$ の正則域は

一致するから (たとえば Valiron [47]

p. 46. XX 参照) $\sum |a_m| \exp(-\eta_1^m z_1)$

$< \infty$ ($\eta_j^m = \operatorname{Im} \zeta_j^m$, $\xi_j^m = \operatorname{Re} \zeta_j^m$ と

する) が成立せねばならぬ。しかるに

$M \subset \{1, 2, 3, \dots\}$, $\#(M) = \infty$ として、

$m \in M$ ならば: $\gamma_j^m, \xi_j^m > 0$ として一般性を失わない。ここで $x_j > 0, y_k > 0$ ($k \geq 2$) として $\sum_{m \in M} |a_m| \exp(-\xi_1^m x_1) = \infty$ は明らか。従って、 $F(z)$ は $\mathbb{R}^n$ を含む "open set" で "正則" とはならない。

このような $F(z)$ の "境界値" として定まる $u \in \mathcal{B}(\Omega)$ を考えれば、定義より $S^* u = 0$ かつ $\text{supp } \beta(u) \cap \{(1, 0, \dots, 0)\} \times \Omega \neq \emptyset$ は明らか。

注意. Th. 2.1.1. の逆定理は次のようにして極めて容易に証明できる。 $\mathcal{Q}$ という sheaf を考えるべきことは、佐藤先生に御指摘を受けた。佐藤先生に深く感謝致します。

Th. 2.1.7' S^* が elliptic でないならば、 S^* は決して parametrix P を持たない。

証明] p. 107. で導入した $\mathbb{D}^{2n}$ 上に sheaf $\mathcal{Q}$ を次のように定義する。

$$\mathcal{Q}_z = \begin{cases} \mathcal{O}_z & z \in \mathbb{C}^n \\ \varinjlim_{U_m \ni z} \mathcal{Q}^m(U_m) & z \in \mathbb{D}^{2n} - \mathbb{C}^n \end{cases}$$

但し. $\mathcal{O}^m(U_m) = \{ f \in \mathcal{O}(U_m \cap \mathbb{C}^n) \mid$
 $\sup_{U_m \cap \mathbb{C}^n} |f(z)| e^{\frac{1}{m}|z|} < \infty \}$

このとき $D^{2n} \supset D^n = \mathbb{R}^n \cup S_\infty^{n-1}$ 上で,
 下の exact sequence を考える.

$$0 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}/\mathcal{O} \rightarrow 0$$

ここで. $H^1(D^n, \mathcal{O}) = 0$ の証明 (p. 51.)
 と全く同様にして $H^1(D^n, \mathcal{O}) = 0$ が成立
 する. 従って $0 \rightarrow \mathcal{O}(D^n) \rightarrow \mathcal{G}(D^n)$
 $\rightarrow (\mathcal{G}/\mathcal{O})(D^n) \rightarrow 0$

一方, $\mathbb{R}^n$ 上で $\mathcal{G}/\mathcal{O} \cong \mathcal{B}/\mathcal{a}$ として
 もし. $S^*[P] = [\delta]$ が $\mathbb{R}^n$ 上で 成立す
 るなら ($[P], [\delta]$ は 各々, $P, \delta \in \mathcal{B}$
 の $\mathcal{B}/\mathcal{a}$ での equivalence class) 仮定か
 ら P が parametrix であるなら $\text{supp}[P]$
 $= \{0\}$ 従って $\exists \tilde{P} \in \mathcal{G}(D^n)$ s.t.

$$S^*[\tilde{P}] = [\delta] \text{ on } D^n.$$

$$\text{故に } S^*\tilde{P} = \delta + \varphi \quad \varphi \in \mathcal{O}(D^n)$$

$\mathcal{O}(D^n)$ も明らかに Fourier 変換に対し

て安定だから、上式を Fourier 変換して、

$$J(\xi) \mathcal{F}\tilde{p} = 1 + \mathcal{F}q \quad \text{ここで } \text{supp}[\tilde{p}] = \{0\}$$

(in $\mathbb{D}^n$) 故 $\mathcal{F}\tilde{p}$ は $\mathbb{D}^n$ の $\mathbb{D}^{2n}$ における近傍で正則。 (後にこの周辺については再び詳しく触れる。 p. 併参照)

しかるに、そこで $\mathcal{F}q(\xi) \rightarrow 0$ であっても S^* が elliptic でないなら、ある方向に対して、 $J(\xi) \mathcal{F}\tilde{p} \rightarrow 0$, 一方右辺 $\rightarrow 1$ となり、明らかに矛盾。

さて、Th. 2.1.5. の意味する所に戻そう。

p. 107. での注意を用いて、

$$N(J) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \xi \mid J(\xi) = 0 \}_{\mathbb{D}^{2n}}^a \cap S_\infty^{n-1}$$

と定めよう。 (S_∞^{n-1} は $\mathbb{R}^n (\subset \mathbb{C}^n)$ に付加えた無限遠球面)。この時、Th. 2.1.7. を合せて、

Th. 2.1.7. S^* を local operator とし、

$$\pi_\varepsilon : S_\infty^{n-1} \times \Omega \rightarrow S_\infty^{n-1} \quad \text{とし、} \quad S_\infty^{n-1} \subseteq$$

S_∞^{n-1} と identify すれば、

$$\bigcup_{S^*u=0} \text{supp } \beta(u) = N(J) \quad \text{が成立する。}$$

従って, partial ellipticity, conditional ellipticity
を Gårding - Malgrange [11] に従って,
次のように定義すれば, Th. 2.1. Th. 2.1. は
殆んど自明な系として得られる。

Def. 2.1.8. $S*u=0$ の解が, 常に $(x_1, \dots, x_m)$
について ^{weakly} complex holomorphic に depend する
 $\iff S*$ は $(x_1, \dots, x_m)$ に関して
partially elliptic.

Def. 2.1.9. $[S*u=0 \iff u$ は $(x_{m+1}, \dots, x_n)$
について ^{weakly} complex holomorphic に depend する
 $\Rightarrow u$ は real analytic]

$\iff_{\text{df.}} S*$ は $(x_1, \dots, x_m)$ に関して conditionally
elliptic.

ここで u が $(x_1, \dots, x_m)$ に weakly に
complex holomorphic に depend するとは

$\text{supp } \beta(u) \subset \{ \xi_1 = \dots = \xi_m = 0 \}$ のことである

(佐藤 [43] 参照)

注意: Gårding - Malgrange の意味で,
partially elliptic な 偏微分作用素は,

Def. 2.1.8 の意味で "partially elliptic" である。

証明は、Gårding-Malgrange の a priori 評価

(Gårding-Malgrange [11] p. 18) と小松 [27] の方法を組み合わせるだけで特に新しい

物ではないからここでは省略する。又、

Gårding-Malgrange の意味で "conditionally elliptic" ならば、下の Th. 2.1.11. の判定条件に

より、明らかに、Def. 2.1.9. の意味で "conditionally elliptic" になる。

Th. 2.1.10. S^* から $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ について

partially elliptic

$$\iff N(J) \subset \{ \xi_1 = \dots = \xi_m = 0 \}$$

証明は、^{weakly} complex holomorphic に depend
するということの sheaf C を用いての言い換
えに過ぎない。(佐藤 [43] 参照) (もち
ろん Th. 2.1.5. と Th. 2.1.7. を用いて。)

次の定理も同様である。

Th. 2.1.11. S^* が $(x_1, \dots, x_m)$ について.

conditionally elliptic

$$\iff \{ \xi_{m+1} = \dots = \xi_m = 0 \} \cap N(J) = \emptyset$$

更に, Th. 2.1.5. は “偏微分方程式(の解)が type p ” ということの判定条件¹ を与える。

まず.

Def. 2.1.12. $u(x) \in \mathcal{B}(\Omega)$ が type p

$\iff$ 適当な座標系をとることにより, local

$$\text{には } u(x) \in H_{\Omega'}^{p-1}(V, \alpha).$$

($\Omega' \subset \Omega$ かつ V は Ω' の $\mathbb{C}^{p-1} \times \mathbb{R}^{n-p+1}$

での近傍, p は Ω' によらないとする。

α は - 部分の変数に関しては real

analytic, の意:

$$\text{e.g. } u(x) \in \mathcal{A}(\Omega) \implies u \in H^0(\Omega, \alpha), \text{ 即ち}$$

u は type 1.

Def. 2.1.13. $S^* u = 0$ の任意の解が 高々

type $p \iff S^*$ は type p

eg. wave operator は、次元によらず、
 $\mathcal{S}'$ に属する解については type 2
 (Jost-Lehman-Dyson の公式、たと
 えは Pham et al. [39] による。)
 $\mathcal{S}'$ -solution に対しても そうであることは、
 Martineau-Zerner により 得られたと
 のこと。(Martineau 教授による。)

Th. 2.1.14. 上の事実は超関数解に対しても正しい。

証明は、Th. 2.1.5. より明らか。

注意. p. 114. 以降のことはすべて、変数係数の
 場合にも同様の定式化ができ、通常の偏微
 分方程式の場合には、佐藤の基本定理
 (佐藤 [43] 参照) を用いれば、上と全く
 同じ議論が可能である。

2.2. Convolution operator に対する ellipticity

この subsection では, $\text{supp } S$ compact として, S^* に対する ellipticity を考察する。更に一般の作用素に対しても理論を展開できるけれども、それは、§3 で、Propagation of regularity を論じる際に合せて論じることにする。(p. 参照) この節は、本質的には 2.1. と同じ内容である。(但し、Th. 2.2.2. (存在定理) は別)

Th. 2.2.1. $S \in \mathcal{B}_*$ (即ち compact support の超函数とする。この時 $\langle S, e^{-izs} \rangle \in J(S)$ が下の条件 (S) を満たすと仮定する。

この時、Th. 2.1.1. と同様の仮定をする。

即ち、p. 114. で導入した記号 $N(J)$ を用いれば、 $N(J) = \emptyset$ と仮定する。この時、

$u \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $S^*u = f \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ ならば $u \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ である。

但し、条件 (S) とは、

(S) $\forall \varepsilon > 0$. $\exists N_\varepsilon$ s.t. $|\xi| > N_\varepsilon$, $\xi \in \mathbb{R}^n$

ならば $\exists \eta \in \mathbb{C}^n$ s.t. i) $|\xi - \eta| < \varepsilon |\xi|$ かつ

ii) $|J(\eta)| \geq e^{-\varepsilon|\xi|}$ を満たす。

注意) 条件 (S) の下では, $S+u=f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

は常に解けることを次に Th. 2.2.2. により証明する。従ってこの定理は空虚でない。

又、条件 (S) は、現在検討中の “modified Fourier hyperfunction” の理論から必然的に現われてきたものであるが、私の知る限り、今迄 explicit にこの条件に触れた文献はないように思われる。多分、超函数論においては、最も本質的な条件として活用されるべき物と確信している。

ii) Th. 2.1.5. に相当する事実も同様に、条件 (S) の下で得ることができる。その時は、以下の証明と Th. 2.1.5. の証明の仕方から、条件 (S) を更に弱めて、“ $|\xi| < C|\xi_1|$ か $|\xi| > N\varepsilon$ ならば” として十分。

iii) 定理をある程度 “local” な形に formulate

することも考えうるが、non-local' + convolution operator に対しては上の定理の形(即ち $\mathbb{R}^n$ 全体で考察する)のが最も自然であろう。もっとも、parametrix の存在から regularity を出す所では結局、"pseudo-local" にやることになるけれど。

Th. 2.2.1. の証明] Th. 2.1.1. の証明と

同様に、 $S * P = \delta + W$, W : real analytic, $\text{sing. supp } P$ compact P を構成すればよい。
(K は $\mathbb{R}^n$ の compact set)
 これは、 $\mathbb{C}^n - K$ の $\mathbb{D}^{2n}$ におけるある近傍において、 $|J(\zeta)| \geq C_\varepsilon e^{-\varepsilon|\zeta| - A|\text{Im } \zeta|}$

($\forall \varepsilon > 0$, A : fixed) という評価ができれば十分。我々は、それを、条件 (5) の下では、Ehrenpreis [4] の minimum modulus theorem を用いて証明することもできるが、より初等的な、Malgrange - Hörmander の不等式 (p. 86. Lem 1.1.4. 参照) を用いることにする。

今、 $J(\zeta) \neq 0$ in $\exists C |\text{Re } \zeta| > |\text{Im } \zeta|, |\text{Re } \zeta| > K$

としよう。 $C|Re\zeta| > |Im\zeta|$, $|Re\zeta| > k$ で

$|J(\zeta)|$ を下から評価で"きぬは"十分。

そこで、条件 5 により $\varepsilon > 0$ を fix して

$|\zeta| > N\varepsilon$ として ($\xi = Re\zeta$) $\exists \zeta'$ s.t.

$|\zeta' - \xi| < \varepsilon|\xi|$, $|J(\zeta')| \geq e^{-\varepsilon|\xi|}$ となる。

よって ζ' を中心として、半径 $2(\varepsilon|\xi| + |\eta|)$

($\eta = Im\zeta$) の球 C を描こう。この球に対

して Lem. 1.1.4 (p. 86.) を適用すると、

$$|1/J(\zeta)| \leq [A_\varepsilon e^{\varepsilon(2\varepsilon|\xi| + |\eta| + |\zeta'|) + \alpha(\varepsilon|\xi| + 2(\varepsilon|\xi| + |\eta|))}]^2 \times (e^{-\varepsilon|\xi|})^3$$

$$(\because |J(\zeta)| \leq A_\varepsilon e^{\varepsilon|\zeta| + \alpha|Im\zeta|} \quad (\forall \zeta))$$

又、 ζ は ζ' を中心、半径 $(\varepsilon|\xi| + |\eta|)$ の球に含まれることに注意)

$$\therefore |1/J(\zeta)| \leq A_\varepsilon^2 e^{(6\varepsilon^2 + 7\varepsilon + 6\alpha\varepsilon)|\zeta| + 4\alpha|\eta|}$$

従って $\alpha < \infty$ 故、 $\forall \theta > 0$, $6\varepsilon^2 + 7\varepsilon + 6\alpha\varepsilon < \theta$

となるように十分小さく ε をとることにすれば

$$|1/J(\zeta)| \leq B_\theta e^{\theta|\zeta| + 4\alpha|Im\zeta|}.$$

Q.E.D.

注意 この定理の逆、即ち、 $N(J) = \emptyset$ のみならず、条件 (S) も ellipticity の必要条件であることは、Th. 2.1.7' (p. 112.) と同様にして証明できる。(もっと強い形の評価が必要であること迄、実は判って しまう。)

Th. 2.2.2. S^* が 条件 (S) を満たすとする。この時、 $S^* \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ である。

証明] $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ の定義により、 $\mathbb{R}^n$ の複素近傍として $\mathbb{C}^n$ をとる事として、 $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n \times \sqrt{t} \{y_1 > 0, \dots, y_n > 0\} \text{ etc.})$ という柱状領域において、 S^* が surjective に operate すれば十分。しかるに、一般に、 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ は $\text{open}_{\text{convex}} \text{ set}$ として、 $\lim_{K \uparrow \Omega} \mathcal{O}(K) = \mathcal{O}(\Omega)$ $K \text{ convex, compact}$

は、容易に判るように 位相迄 こめて成立し、しかも、 $\mathcal{O}(K)'$ は Fourier-Borel 変換により (K が convex compact なら) 正則函数の増大度によって規定できる (Martineau

[37]他) から $[O(\Omega)]'$ の元の Fourier-Borel 変換により, $S^*: [O(\Omega)]' \rightarrow [O(\Omega)]'$ が closed range で "あることをいえる" よい。
 それには, 従って, (簡単な為 $n=2$ として)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{i) } F(s)/J(s) \text{ が entire} \\ \text{ii) } |F(s)| \leq \begin{cases} A e^{K|\eta| - \delta \xi_1 - \delta \xi_2} & (\xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0) \\ A e^{K|\eta| - K\xi_1 - \delta \xi_2} & (\xi_1 < 0, \xi_2 \geq 0) \\ A e^{K|\eta| - \delta \xi_1 - K\xi_2} & (\xi_1 \geq 0, \xi_2 < 0) \\ A e^{K|\eta| - K\xi_1 - K\xi_2} & (\xi_1 < 0, \xi_2 < 0) \end{cases} \end{array} \right.$$

$$(K, \delta > 0, \quad \xi_j = \operatorname{Re} s_j, \quad \eta_j = \operatorname{Im} s_j)$$

の成立する時, $|F(s)/J(s)|$ が $|F(s)|$ と同じ形の評価 (もちろん, A, K, δ は違ってよい) をもては "十分"。それを証明しよう。所が, 条件 (S) と, Lem 9.1.4, (p.86.) により, 前 Th. と同様にいて, たゞえは,

$$\begin{aligned} & \xi_1 > \varepsilon_0 |\xi|, \quad \xi_2 > \varepsilon_0 |\xi| \text{ の時 } \forall \varepsilon (< \varepsilon_0), \quad \forall \theta \\ & |F(s)/J(s)| \leq \\ & \leq A e^{K(3\varepsilon|\xi| + |\eta|) - \delta(-3\varepsilon|\xi| - 2|\eta| + |\xi|)} \\ & \times [B_0 e^{\theta|\xi| + \alpha(3\varepsilon|\xi| + |\eta|)}]^2 \times (C_\varepsilon e^{\varepsilon|\xi|})^3 \\ & \leq C \exp((2\delta + 3K + 2\theta + 2\alpha)|\eta| + \end{aligned}$$

$+|\xi|(-\delta+3\varepsilon(K+\delta+2\alpha+1)+2\theta))$ となる。

従って $3\varepsilon(K+\delta+2\alpha+1)+2\theta < \delta/2$ と

なるように ε, θ を fix すれば、求める

評価が得られる。

2. $0 \leq \xi_1 < \varepsilon|\xi|$, $\xi_2 \geq 0$ の時は、 $\xi_2 > C|\xi|$

となっていることに注意すれば、上の場合と

同様にして、

$$\begin{aligned} & |F(\xi)/J(\xi)| \leq \\ & \leq A \exp(K(3\varepsilon|\xi|+|\eta|-K(-3\varepsilon|\xi|-2|\eta|+ \\ & +\xi_1)-\delta(-3\varepsilon|\xi|-2|\eta|+\xi_2))) \times [B_0 \times \\ & \times \exp(\theta|\xi|+\alpha(3\varepsilon|\xi|+|\eta|))]^2 \times (C_\varepsilon e^{\varepsilon|\xi|})^3 \\ & \leq C \exp((2\delta+5K+2\theta+2\alpha)|\eta|+ \\ & + (3\varepsilon(2K+\delta+2\alpha+1)+2\theta)|\xi|-K\xi_1-\delta\xi_2)) \\ & \leq C \exp((2\delta+5K+2\theta+2\alpha)|\eta|-K\xi_1 \\ & + [(3\varepsilon(2K+\delta+2\alpha+1)+2\theta)-\delta]\xi_2) \end{aligned}$$

従って $3\varepsilon(2K+\delta+2\alpha+1)+2\theta < \delta/2$

となるように ε, θ を十分小さくとれば、求める評価が得られる。

他の象限でも事態は本質的には変わらないから。(むしろ易しくなる。) これで証明は

完結した。即ち $S * \mathcal{B}(\Omega) = \mathcal{B}(\Omega)$

注意. $S \in \mathcal{E}'$ (compact support の distribution)
 の時 $J(S)$ が 条件 (5) を trivial に満
 たすことは容易に判る。(たとえば Ehrenpreis
 [6] p. 554. Prop. 4.5.) 従って特に.

$$S \in \mathcal{E}' \text{ なら, } S * \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

この事実 は Schapira [45] も注意している。

§3 Propagation of regularity

この節では, local operator に対して, 正則性の伝播の問題を取り扱う。この結果はかなり best possible な物に近いことは, F. John [24] p. 568. ~ 573. の反例によりうかがわれるが, 本当に best possible であるかどうかは残された興味ある問題である。この節の結果は, distribution における Malgrange ^{の結果} [35], Boman [2] から考えて, 特に珍しい物ではないけれど, 方法論としてかなり面白い物と思う。尚, 通常の偏微分作用素の場合には, 一般の system の場合もとり扱う。

3.1. Propagation of regularity

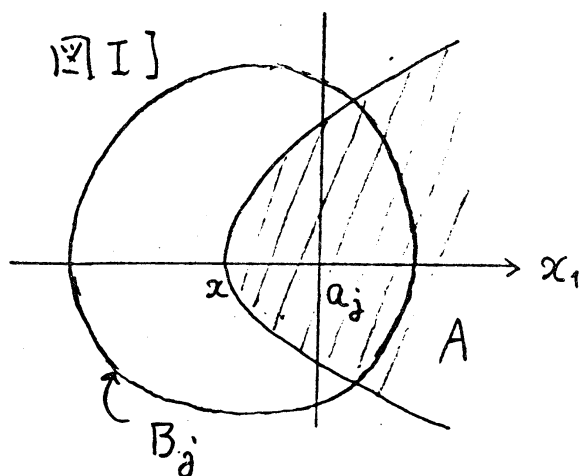
Th. 3.1.1 $S \in \mathcal{B}$, $\text{supp } S = \{0\}$ とする。今

A は properly convex closed set (下図 I 参照), $x \in \partial A$ とする。この時, 次の条件 i), ii) を満たす open set の系 $\{U_j\}$ が存在する。

i) $\{U_j\}$ は x の基本近傍系

ii) $S * u = f \in \mathcal{A}(U_j)$, $u \in \mathcal{B}(U_j)$ かつ

$$u \in \mathcal{A}(U_j - A) \quad \text{ならば} \quad u \in \mathcal{A}(U_j)$$



$$U_j \stackrel{\text{def}}{=} B_j \cap \{x_1 < a_j\}$$

証明] B_j を, x を中心, 半径 j^{-1} の ball とする。適当に座標軸をとることにより, a_j を十分小さくすることにより, $U_j (\stackrel{\text{def}}{=} B_j \cap \{x_1 < a_j\})$ が次の性質をもつとしてよい。
(A についての仮定による。)

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} \forall c (\leq a_j) \text{ に対して } A \cap \{x_1 = c\} \\ \text{は } U_j \cap \{x_1 = c\} \text{ 内で "compact" である。} \end{array} \right.$$

さて証明に入ろう。まず, $\mathcal{B}/\mathcal{A}$ は flabby sheaf であることに注意しよう。(佐藤の注意) $\mathcal{B}$ が flabby であることと $H^1(\Omega, \mathcal{A}) = 0$ ($\forall \Omega \subset \mathbb{R}^n$) から明らかである。cf. 佐藤 [43]) 従って $\nu_{\text{pf}} [u] \in \mathcal{B}/\mathcal{A}(U_j)$

に対して $\exists \tilde{\nu} \in \mathcal{B}/a(\mathbb{R}^n)$ かつ
 $\text{supp } \tilde{\nu} \subset (U_j \cap A)^a$ (a は closure の意)
 かつ $\nu = \tilde{\nu}$ in U_j となる $\tilde{\nu}$ を見つける。
 このとき $S * \tilde{\nu} = S * \nu = [f] = 0$ in U_j .
 かつ $S * \tilde{\nu} = 0$ in $x_1 < a_j$ となる。
 (U_j の条件 (4) による。) ここで $\tilde{\nu}$ は compact
 support になったから、ここで p. 112. で導入
 した sheaf $\mathcal{O}_{\approx}$ を用いれば、 $\exists \mu \in [\mathcal{B}/\mathcal{O}_{\approx}](D^n)$
 s.t. $\text{supp } \mu \subset (U_j \cap A)^a$, $\mu = \tilde{\nu}$ on $\mathbb{R}^n$
 とできる。従って、我々は、

$$S * \mu = \theta, \quad \text{supp } \theta \subset \partial U_j \cap A,$$

$$\text{supp } \mu \subset (U_j \cap A)^a \quad \text{というように与えて}$$

$$\text{す。} \quad \mu, \theta \in [\mathcal{B}/\mathcal{O}_{\approx}](D^n)$$

$$\text{今、p. 113. と同様にして、} \quad H^1(D^n, \mathcal{O}_{\approx}) = 0$$

により、 μ の "kernel" $\psi(x)$, 即ち、

$$[\psi] = \mu \in \mathcal{B}/\mathcal{O}_{\approx}, \quad \psi \in \mathcal{B}(D^n) \text{ かつ}$$

$\psi \in \mathcal{O}_{\approx}(D^n - \text{supp } \mu)$ な条件を満たす
 超函数 ψ を見つけることができる。同様に

して θ の "kernel" $\varphi(x)$ も $\varphi \in \mathcal{O}_{\approx}(D^n - \text{supp } \theta)$ として選べる。このとき、

定義により $S*\psi = \varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{D}^n)$ において,

$$\int \psi(x) e^{ix\xi} dx \stackrel{\text{def}}{=} F(\xi), \quad \int \varphi(x) e^{ix\xi} dx \stackrel{\text{def}}{=} G(\xi) \text{ と定めれば, (sing supp } \psi, \varphi$$

はいずれも compact 支. 上の積分は, 通常の compact support の超関数と, 通常の積分の和と 思ってよい。) $\mathcal{O}(\mathbb{D}^n)$ が

Fourier 変換に安定であることから,

$$J(\xi) F(\xi) - G(\xi) \in \mathcal{O}(\mathbb{D}^n)$$

ここで, $F(\xi), G(\xi)$ は下の lem. 3.1.2.

により, $\mathbb{D}^n$ の $\mathbb{D}^{2n}$ での近傍での正則関数

となり. そこで, $\text{supp}[\psi], \text{supp}[\varphi]$ により

定まるある増大度をもつ. しかるに $J(\xi)$ は

local operator $S*$ から得られたものであるから, $J(\xi)$ は, 条件 (SS) 即ち, “ $\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon$

s.t. $\forall \xi \in \mathbb{C}^n \exists \xi'$ s.t. i) $|\xi - \xi'| < \varepsilon |\xi|$

ii) $|J(\xi')| \geq e^{-\varepsilon |\xi|}$ ” を満たしていることは,

(p. 103. lem 2.1.3.1 により

容易に判る。(p. 104 の lem 2.1.2. の証明

参照) 従って, p. 86 の lem. 1.1.4. を用いる

ことにより, p. 124 の Th. 2.2.2. の証明と
 全く同様にして, $F(\zeta)$ の増大度と $G(\zeta)$ の
 増大度は同じ形であることが判る。(尚,
 この事実の一般化を後に詳しく証明する,
 p. 140. Th. 3.2.1 参照) 従って Lem. 3.1.2.
 により, $\text{supp } [\psi] = \text{supp } [\varphi]$. 従って
 $\text{supp } \psi = \partial U_j \cap A$ しかるに $[\psi] = [\alpha]$ in
 U_j , となっていたから, $[\alpha] = 0$ in U_j
 従って $\alpha \in Q(U_j)$ a. E. D.

Lem. 3.1.2. $\mu(x) \in \mathcal{Q}(\mathbb{D}^n) \cap \mathcal{Q}(\mathbb{D}^n - K)$

$K \subset \mathbb{R}^n$, compact, convex とする.

この時 $F(\zeta) = \int_{\mathbb{D}^n} \mu(x) e^{i x \zeta} dx$ とすると.

$F(\zeta)$ は, 次の条件 (*) を満足する.

(*) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists C_\varepsilon \quad F(\zeta)$ は

$C_\varepsilon (|\text{Re } \zeta| + 1) > |\text{Im } \zeta|$ で正則, かつ

$|F(\zeta)| \leq A_\varepsilon e^{\varepsilon |\zeta| + \chi_K(\text{Im } \zeta)}$ が成立する.

且し $\chi_K(\eta) = \sup_{x \in K} (-\langle x, \eta \rangle)$

又, 逆に $F(\zeta)$ が, 上の条件 (*) を満たす

ならば, $\int F(z) e^{-izs} dz = \mu(x)$ 是.

積分路を適当に動かして 容易に判るように

$\mathcal{O}(\mathbb{D}^n) \cap \mathcal{O}(\mathbb{D}^n - K)$ の元である。

Q この定理の証明は、佐藤先生の御助言により、著しく簡単になったものである。
佐藤先生に深く感謝致します。

証明] ε を fix して K_ε を K の ε -近傍とすれば, $\left| \int_{K_\varepsilon} \mu(x) e^{izs} dx \right| \leq A_\varepsilon e^{\varepsilon|s| + \chi_K(\eta)}$

は明らか故, $G(s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{K_\varepsilon} \mu(x) e^{izs} dx$

についての正則性と増大度を考えればよい。

($\int_{K_\varepsilon} \mu(x) e^{izs} dx$ は明らかに entire 故)

今簡単の爲 $n=2$ としておこう。(全く $n \geq 3$ でも同じである。)

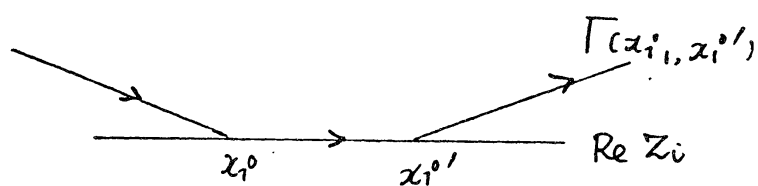
$\mu(x) \in \mathcal{O}(\mathbb{D}^n - K)$ 故.

$$\int_{K_\varepsilon} \mu(x) e^{izs} dx =$$

$$= \int_{\Gamma} \mu(z) e^{iz\zeta} dz \quad \text{但し,}$$

$$\Gamma \supset \Gamma(x_1^0, x_1^{0'}) \times \Gamma(x_2^0, x_2^{0'}) \quad \text{ここで}$$

$\Gamma(x_i^0, x_i^{0'})$ とは 下図の如き 積分路で
あって $K_\varepsilon \subset (x_1^0, x_1^{0'}) \times (x_2^0, x_2^{0'})$ とする。



但し. Γ は $(\mu(z)$ の正則域) $\cup K_\varepsilon$ に含まれるとしておく。

すると明らかに $\mu(z)$ の定義から

$$\exists C_\varepsilon (|\operatorname{Re} \zeta| + 1) > |\operatorname{Im} \zeta|, \quad \operatorname{Re} \zeta_j \geq 0 \text{ において}$$

$$|G(\zeta)| \leq A_\varepsilon e^{\chi_\Gamma(\operatorname{Im} \zeta)}, \quad \text{これは 積分路}$$

Γ を変更することにより, $\operatorname{Re} \zeta_j \geq 0$ である

必要はないから, $\exists C_\varepsilon (|\operatorname{Re} \zeta| + 1) > |\operatorname{Im} \zeta|$

$$\text{において, } |G(\zeta)| \leq A_\varepsilon e^{\chi_\Gamma(\operatorname{Im} \zeta)}$$

ここで C_ε は Γ の傾きと $\mu(z)$ の減少度
のみに依存するから, 座標軸をとりかえて
も一定にとれる。従って, K_ε が凸にとれる
ことから $\exists C_\varepsilon (|\operatorname{Re} \zeta| + 1) > |\operatorname{Im} \zeta|$ に

において $|G(s)| \leq A_\varepsilon e^{\chi_{\Gamma_\varepsilon}(\operatorname{Im} s)}$ が成立する。
従って求める $|F(s)|$ の評価も得られた。

逆に $F(s)$ が上の条件を満たす時、

$\int F(s) e^{-isx} ds$ に積分の意味付けを与え

よう。それは、 $F(s)$ が、 D^n の $(D^{2n}$ における)
近傍で正則故容易である。簡単の爲。
 $n=1$ としておく。 $n \geq 2$ の時も、直積 type の
compact set K に対しては、全く同い
議論が成立し、従って一般の K に対しても
 K の凸性により明らかである。

今 $K = [-K, K]$ としよう。

今 ε を一つ fix して、

$$\Omega_{\delta, \varepsilon} = \overline{\{z \mid \operatorname{Im} z > -\delta(\operatorname{Re} z - K) + \varepsilon\}}$$

とすると、 $z \in \Omega_{\delta, \varepsilon}$ に対し、

$$\int_{\substack{\operatorname{Im} s = \delta \operatorname{Re} s \\ \operatorname{Re} s \leq 0, \delta > 0}} F(s) e^{-isx} ds = \overline{\int_{\operatorname{Re} s \leq 0} F(s) e^{-isx} ds}$$

と定める。明らかに $\bigcup_{\delta > 0} \Omega_{\delta, \varepsilon} = \{\operatorname{Im} z > 0\}$
であり、上の積分は、 $F(s)$ についての条件

(*) により, $\mathcal{O}(\mathcal{D} - \{x < K + 2\varepsilon\})$ の元を定めている。同様に, $\Omega'_{\delta, \varepsilon} \stackrel{\text{def}}{=} \{z \mid$

$\text{Im } z > \delta(\text{Re } z + K) + \varepsilon\}$ とし, $z \in \Omega'_{\delta, \varepsilon}$ に対して $\int_{\xi \leq 0} F(\xi) e^{-i\xi z} d\xi$

$\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\substack{\text{Im } \xi = -\delta \text{Re } \xi \\ \text{Re } \xi \leq 0, \delta > 0}} F(\xi) e^{-i\xi z} d\xi$ は well-defined

としても $\Omega'_{\delta, \varepsilon} \cap \Omega_{\delta, \varepsilon} \ni z$ に対して,

上の2つの定義は compatible である。

もちろん $\cup \Omega'_{\delta, \varepsilon} = \{\text{Im } z > 0\}$ も同様。

従って $\int_{\xi \geq 0} F(\xi) e^{-i\xi z} d\xi$ も同様に定義

して, $(\int_{\xi \leq 0} F(\xi) e^{-i\xi z} d\xi, \int_{\xi \geq 0} F(\xi) e^{-i\xi z} d\xi)$

なる定義関数により定まる超関数か。

求める物である。(上のことから明らかに

その singular support は $(-\varepsilon - K, K + \varepsilon)$

($\forall \varepsilon$) に含まれている。)

通常の偏微分作用素に対しては、更に、
system の場合にも、Th. 3.1.1. は然るべく拡張される。しかし、もちろんすべての system に対して Th. 3.1.1. が拡張される訳ではない。
実際

Th. 3.1.3. $P(D) : \mathcal{B}^r \rightarrow \mathcal{B}^r$ が
与えられたとする。このとき $A_{\overline{\partial}} \subset [x_1, \dots, x_n]$
(多項式環) とし、 $M_{\overline{\partial}} : A^r / {}_tP(x) A^r$

とすれば、 $\text{Ext}^0(M, A) = 0$

$$\iff \Gamma_*(\mathbb{R}^n, (\mathcal{B}/a)^P) = 0$$

(Γ_* は compact support の section
の意である。)

[証明] $\text{Ext}^0(M, A) \neq 0$ としよう。この時

$P(x)$ の行は A 上 - 次独立にはなれない
から $\Leftarrow$ は明らかである。($\Gamma_{\{0\}}(\mathcal{B}^P) \neq 0$ が成立)

$\Rightarrow$ を証明しよう。 Th. 3.2.1. の証明
と同様に、 $P(D)u = 0$, $\text{supp}[u] = 0$
ならば、 $\exists \phi \in \mathcal{Q}(\mathbb{D}^n)^r$, $\text{supp}[\phi] = \text{supp}[u]$,

$\psi \in \mathcal{O}_{\approx}^{r_0}(D^n - \text{supp } [u])$ とできる。

従って $P(D)\psi = \theta \in \mathcal{O}_{\approx}^{r_0}(D^n)$

故に $P(\xi)\hat{\psi}(\xi) = \hat{\theta}(\xi) \in \mathcal{O}_{\approx}^{r_0}(D^n)$

従って, p.91. の Th. 1.1.5. の証明と同様に,

Hörmander-Malgrange の不等式により,

$\exists \psi(\xi) \quad P(\xi)\psi(\xi) = \hat{\theta}(\xi),$ かつ

$\psi(\xi) \in \mathcal{O}_{\approx}^{r_0}(D^n)$ しかるに,

$\text{Ext}^0(M, A) = 0$ を仮定したから,

$\psi(\xi) = \hat{\psi}(\xi)$ でなければならぬ。

$\therefore \psi(x) \in \mathcal{O}_{\approx}^{r_0}(D^n)$

従って $[4] = 0 \quad \therefore [u] = 0$ 即ち.

$$\Gamma_*(\mathbb{R}^n, (B/a)^P) = 0$$

上の Th. 3.1.3. により, 我々は, Th. 3.1.1.

を system の場合に拡張するには, 最低限

$\text{Ext}^0(M, A) = 0$ は仮定すべきことを知った。

しかし, 実は, Th. 3.1.1. は $\text{Ext}^0(M, A) = 0$ の

仮定の下に成立する。実際, それは, Th. 3.1.3.

の証明法と lem. 3.1.2. により, Hörmander-

Malgrange の不等式により Th. 3.1.1. の証明と全く同じである。定理の形にまとめておこう。

Th. 3.1.1'. $\text{Ext}^0(M, A) = 0$ とする。

この時, A を properly convex closed set, $x \in \partial A$ とする。この時 次の条件 i), ii) を満たす open set の系 $\{U_j\}$ が存在する。

i) $\{U_j\}$ は x の基本近傍系

ii) $P(D)u = f \in \mathcal{A}(U_j)^{r_1}$, $u \in \mathcal{B}(U_j)^{r_0}$

かつ $u \in \mathcal{A}(U_j - A)^{r_0}$ ならば,

$u \in \mathcal{A}(U_j)^{r_0}$

さて Th. 3.1.1. から 次の系は直ちに得られる。(同値である。)

Cor. 1. $S \in \mathcal{B}_{\{0\}}$ として $u \in \mathcal{A}(\Omega - L) \cap \mathcal{B}(\Omega)$, $S * u \in \mathcal{A}(\Omega - K) \cap \mathcal{B}(\Omega)$
(但し $K, L \subset \Omega$, K convex)
ならば $u \in \mathcal{A}(\Omega - K)$

この系を読み直せば, $\text{Ch}(\text{sing supp}$

$S * u = Ch(\text{sing supp } u)$ がこの場合成立することになる。(但し Ch は convex hull の意) では、この事実ほどの程度迄一般化できるだろうか。

3.2 singular support についての考察

この subsection は 佐藤 先生 が sheaf $\mathcal{C}$ での analysis に関して提出された問題に対する一つの不十分な考察である。即ち $\mu, \nu \in \mathcal{B}$, $[\mu], [\nu]$ を $\mathcal{B}/a$ での各々の equivalence class として, $\text{supp}[\mu], \text{supp}[\nu]$ compact とおけば, $[\mu], [\nu]$ は自然に $\mathcal{G}/\mathcal{O}(D^n)$ 元と見なせる。従って ひとつと同様に, $H^1(D^n, \mathcal{O}) = 0$ を用いて, $\mu \in \mathcal{G}(D^n) \cap \mathcal{O}(D^n - \text{supp}[\mu])$ の元としておいてよい。 ν についても同様。この時, $\text{sing supp } \mu * \nu$ と $\text{sing supp } \mu, \text{sing supp } \nu$ には, 即ち $\text{supp}[\mu * \nu]$ と $\text{supp}[\mu], \text{supp}[\nu]$ にはどのような関係があるだろうか。 lem. 3.1.2.1 により, もちろんそれは $\int \mu(x) e^{ix\zeta} dx \stackrel{\text{pf}}{=} F(\zeta),$

$\int \nu(x) e^{ixs} dx \stackrel{\text{def}}{=} G(s)$ とすることにより, $F(s)$, $G(s)$ の増大度と $(FG)(s)$ の増大度の関係を調べることに帰着される。しかし一般に極めてこれは難しい。実際 μ, ν が共に compact

support であってすら $\mu * \nu$ の support が一点になってしまうことすらあるということか。

Polya [40] により知られている。(私はこの例を佐藤先生にお教え頂いた。Polya^[40] p.596-

p.597 参照) しかし、たとえば、 $F(s)$ が条件 (S) 即ち、 $\forall \varepsilon \exists N_\varepsilon \quad |\xi| > N_\varepsilon$

$\xi \in \mathbb{R}^n$ ならば $\exists \eta \in \mathbb{C}^n, \quad |\xi - \eta| < \varepsilon |\xi|$

かつ $|J(\eta)| \geq e^{-\varepsilon |\xi|}$ を満たしているとする

れば、 $\forall K$ compact $\exists L$ compact s.t.

$\text{Ch supp } [\mu * \nu] \subset K \Rightarrow \text{Ch supp } [\nu] \subset L$

は成立する。即ち。

Th. 3.2.1. $F(s)$ は i) 条件 (S) を満たす

ii) $\forall \varepsilon > 0 \exists C_\varepsilon \quad C_\varepsilon (|\text{Re } s| + 1) > |\text{Im } s|$

において $|F(s)| \leq A_\varepsilon e^{\varepsilon |\text{Re } s| + \chi_M(\text{Im } s)}$

(但し、 M は compact convex, $\chi_M(\eta)$

$\stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in M} (-\langle x, \eta \rangle)$ とする。) を満たす、

とする。この時 „ $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists C'_\varepsilon$

$C'_\varepsilon (|\operatorname{Re} \zeta| + 1) > |\operatorname{Im} \zeta|$ において

$|FG(\zeta)| \leq A'_\varepsilon e^{\varepsilon|\zeta| + \chi_K(\operatorname{Im} \zeta)}$ を満たすような $(D^n$ の $(D^{2n}$ における) ある近傍で

正則な) $G(\zeta)$ に対して 次のような評価が

成立する。 $\forall \varepsilon \quad \exists C''_\varepsilon \quad C''_\varepsilon (|\operatorname{Re} \zeta| + 1)$

$> |\operatorname{Im} \zeta|$ において $|G(\zeta)| \leq B_\varepsilon e^{\varepsilon|\zeta| + \chi_L(\operatorname{Im} \zeta)}$

が成立する。ここで、 L は K と M のみに依存する。

[証明] p. 86 Lem. 1.1. 4. から容易である。

実際 $|G(\zeta)| = |FG(\zeta)/F(\zeta)|$

$$\leq \sup_{|\zeta - \zeta'| \leq 4\theta|\zeta| + 3|\eta|} |FG(\zeta)| \sup_{|\zeta - \zeta'| \leq 8\theta|\zeta| + 8|\eta|} |F(\zeta')| \times$$

$$\times (C''_\theta e^{-\theta|\zeta|})^{-2} \quad (\zeta = \operatorname{Re} \zeta, \eta = \operatorname{Im} \zeta)$$

よって $L \overline{\mu} \rho K + M$ とおけば十分である。

ある。ここで 特には $\mu = S$, $\operatorname{supp} S = \{0\}$ の時は、条件 (SS) (p. 130.) により。

$$\text{右辺} \leq \sup_{|\zeta - \zeta'| < \theta|\zeta|} |FG(\zeta)| \sup_{|\zeta - \zeta'| < \theta|\zeta|} |F(\zeta')| \times$$

$\times (C_0^\infty e^{-\theta|s|})^{-2} \quad (\forall \theta > 0)$ におきかえられるから、p.131. l.2. ~ l.3. で述べた事実が成立する。

注意 今の証明から容易に判るように、 $\text{supp}[\mu]$ が compact となるような μ に対し、 μ^* を考えることにすれば、これは、条件(S)と、 $F(S) \neq 0$ in U (U は $D^n - M$ ($M \subset \mathbb{R}^n$) の D^{2n} での近傍) から $\exists \nu$ s.t. $[\mu + \nu] = [\delta]$ なる ν をもつことがわかる。従ってこのような作用素に迄 "ellipticity" を考えることができる。(cf. Th. 2.2.1.) このような作用素迄考えに入れるべきことは、佐藤先生から教えを受けた。佐藤先生に深くお礼申し上げます。

§4. Hyperbolicity

この節では、hyperbolicityの問題を、主として local operator の場合を中心として論じる。我々はここで Gårding [8] にならって、基本解の性質により hyperbolicity を定義し、その定義により作用素の hyperbolicity の criterion を与える。更に、後半において、通常の偏微分作用素の場合に、上の定義による双曲性か、物理現象の記述として適当であることを示すある F. John の理論 (Non-admissible data に関する物) が、我々の場合にも成立することを注意する。

4.1. Hyperbolicity の必要条件

Def. 4.1.1 $S \in \mathcal{B}$, $\text{supp } S = \{0\}$ とする。

この時 S^* が $(1, 0, \dots, 0)$ 方向に双曲型

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \text{Def. } \exists E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \quad \text{supp } E \subset \Gamma(\text{cone}) \\ \Gamma \in \{x_1 > 0\}^{\text{1次面族}} \text{ かつ } S^* E = \delta \end{aligned}$$

即ち $S^* u = 0$ によって記述される物理現象が有限伝播速度をもつことにより、双曲性

を定義する。

この定義は、 $S \in \mathcal{D}'$ の時は通常の物である。
(たとえば、Hörmander [18] Ch. 5) ただし
後に示すように、対象を $\mathcal{B}$ に迄広げたこ
とにより、理論がより統一的な物となる。(p.

Th. 4.4.1. 参照) (注意: $\Gamma \subset \{x_1 > 0\}$ とは、

$\Gamma \cap \{|x|=1\} \subset \{x_1 > 0, |x|=1\}$ の略記, 従って 原点は除いて
書いている。)

Th. 4.1.2. S^* が $(1, 0, \dots, 0)$ 方向に双曲型
 $\Rightarrow \langle S, e^{iz\xi} \rangle \stackrel{\cdot}{=} J(\xi)$ は次の条件 (H_1)
を満たさねばならぬ。

$(H_1) \quad \exists C > 0$ が存在して、 $J(\xi) = 0$, かつ

$|\eta| < C\eta_1$ ならば、 $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists C_\varepsilon$

$\eta_1 \leq \varepsilon |\xi| + C_\varepsilon$ が成立する。

(但し $\eta_j = \operatorname{Im} \xi_j$, $\xi_j = \operatorname{Re} \xi_j$)

証明] 仮定により、 $\exists E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ s.t.

$S^* E = \delta \quad \operatorname{supp} E \subset \Gamma \subset \{x_1 > 0\}$

従って、 $\mathcal{Q}(\mathbb{D}^n)$ に話を持ちこむと、

$\{\mathcal{Q}(\Omega)\}$ は flabby sheaf (p. 56. Th. 4.

4.2. 参照) $\exists \tilde{E} \in \mathcal{Q}(\mathbb{D}^n)$ s.t. $\tilde{E} = E$

in $\mathbb{R}^n$ かつ $\operatorname{supp} \tilde{E} \subset \Gamma_{\mathbb{R}^n}^a = K$ (即ち Γ の

D^n における関包) とできる。従って.

$S * \tilde{E} = \delta + \mu$ 但し $\text{supp } \mu \subset K \cap S_\infty^{n-1}$ となる。ここで, p. 64. Th. 5.1.1. の結果, 即ち, „cone に support をもつ Fourier 超函数の Fourier 変換を正則函数として補える” という物により, $\Gamma \subset \{x_1 > 0\}$ ということから, $\mathcal{F}\tilde{E}, \mathcal{F}\mu$ はいずれも $\exists c'$

$| \eta | < c' \eta_1$ において正則である。更に,

$\mathcal{F}\mu \stackrel{\text{df.}}{=} M(\zeta)$ とすれば, $C < C'$ として,

$M(\zeta)$ は, $| \eta | < C \eta_1$ において,

$$|M(\zeta)| \leq A_\varepsilon e^{\varepsilon |\zeta| - K \eta_1} \text{ を満たす。}(K > 0)$$

(A_ε を $A_{\varepsilon, K}$ として, „ $\forall K$ に対して” として

としないか, それは今必要でない。)

一方, $\mathcal{F}\tilde{E} \stackrel{\text{df.}}{=} F(\zeta)$ として, $S * \tilde{E} = \delta + \mu$ から,

$J(\zeta) F(\zeta) = 1 + M(\zeta)$ が成立する。

従って, $J(\zeta) = 0$, $| \eta | < C \eta_1$ とすれば,

$$-1 = M(\zeta) \quad \therefore \quad 1 = |M(\zeta)|$$

$$\therefore 0 \leq \log |M(\zeta)| \leq \log A_\varepsilon + \varepsilon |\zeta| - K \eta_1$$

$$\therefore K \eta_1 \leq C_\varepsilon + \varepsilon |\zeta| \quad (C_\varepsilon = \log A_\varepsilon)$$

$$\therefore \eta_1 \leq C_\varepsilon + \varepsilon |\zeta| \quad (\forall \varepsilon) \quad (\because K > 0)$$

故に、 $J(S)$ は、定理の条件 (H_1) を満たさねばならない。

注意 1) 上では、証明を、無限遠方に事象を reduce " して行ったか、実は、問題を、原点に reduce " して行うことも可能である。その証明は、Gårding 教授の '69 年 10 月の東大における講演 (Gårding [10]) に接して得た。その概略を示しておこう。

$S * E = \delta$ とする。 $\mathcal{B}$ は flabby sheaf だから、 $\exists \tilde{E}$ s.t. $\begin{cases} \text{i) } E = \tilde{E} \text{ in } \{|x| < 1\} \\ \text{ii) } \text{supp } \tilde{E} \subset \Gamma \cap \{|x| \leq 1\} \end{cases}$

ここで、 $S *$ は local operator 故
 $\exists v \quad \text{supp } v \subset \Gamma \cap \{|x| = 1\}$ s.t.

$S * \tilde{E} = \delta + v$. ここで、 $\Gamma \subset \{x_1 > 0\}$

と仮定したから ($\text{supp } v$ の凸包) $\neq \emptyset$,

この事実を用いて、 $S * \tilde{E} = \delta + v$ を Fourier 変換すれば、証明は、上と全く同様に進行する。

ii) 上の証明で, „無限遠方に support をもつ元” μ が現われたのは, 一見奇妙である。それは „宇宙が compact では波の伝播が起きにくい” ことを示しているわけだが, 数学的にはどのような意味をもつか, 簡単な場合に考えてみよう。即ち, $S \in \mathcal{D}'$ の場合, つまり通常の偏微分作用素 $P(D)$ が $\mathcal{D}'$ -category で双曲型としよう。この時, P の満たすべき代数的性質はよく知られていて, (たとえば, Hörmander [18]) $\xi \in \mathbb{R}^n$ $\tau < \tau_0$ とすれば, $P(\xi + \sqrt{-1}\tau(1, 0, \dots, 0)) \neq 0$ が成立する。即ち, $P(\xi)$ はある tubular domain で零にならない。(これが本質的には, Leray [30] の analysis の出発点だ。 $T=0$) 従って, 適当な平行移動により $P'(\xi) \neq 0$ in $\mathbb{R}^n \times \sqrt{-1}\Gamma$ (Γ : open cone, with vertex at 0) としてよい。従って, その平行移動された作用素 $P'(\xi)$ に対する基本解は, $\mathbb{R}^n \times \sqrt{-1}\Gamma'$ ($\Gamma' \subset \Gamma$) においては Malgrange の不等式 (たとえば, Hörmander [18] 3.1. 参照) と上の性質から, $\mathbb{R}^n \times \sqrt{-1}\Gamma'$ において ($\Gamma' \subset \Gamma$)

$|P(\zeta)| \geq A_\varepsilon e^{-\varepsilon|\zeta|}$, (Ch. 1. §5. の結果により,
 $\overline{P}(\zeta/P') \notin E'$ とすれば, E' は P'
 の基本解になっている。しかし, この E' から,
 P の基本解 E を得るには, E' に 適当
 な 指数函数を かけねばならぬ。それは
 一般には, $\mathcal{G}(\mathbb{D}^n)$ 内では不可能である。
 即ち, “増大度の影響” が 無限遠方の
 μ に しめよせ されていることになる。これが μ
 の 現われる理由であらう。

4.2. Hyperbolic operator に対する 基本解の 構成

この subsection では, Th. 4.1.2. の条件 (H_1)
 の下に, S^* は Def. 4.1.1. の意味で hyperbo-
 lic であることを示すことを目標とする。超函数論
 の merit を感じさせる部分である。尚, 後節で,
 通常の偏微分作用素に対しては, 条件 (H_1) から
 principal part が hyperbolic であることが
 従い, かつ 逆も正しいことを示す。従って, この節
 の結果から $\partial^2 u / \partial x^2 + \partial u / \partial t = \delta$ を満たし, しか

$t \text{ supp } u \subset \{t=0\} \times \{x \geq 0\}$ なる物か
超函数 としては 存在することか 判るけれど、
 (もちろん distribution としては 存在しない)

具体的にその表示式を一つの例として 与えてみる。
 それは単に一つの例でしかないが、更にこの方向に
 理論を発展させることは残された重要な問題で
 あろう。

Th. 4.2.1. S^* を local operator とし、

$\langle S, e^{i\zeta\zeta} \rangle_{\mathcal{D}'_f} J(\zeta)$ が p. 144. の条件
 (H_1) を満たしているとする。この時
 $\exists E \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad S^* E = \delta$ かつ

$\text{supp } E \subset \Gamma \subset \{x_1 > 0\}$ なる物がある。

[証明] まず証明の方法を示す為 $n=1$ として
 考える。後に示すように、 $n \geq 2$ でも本質的な差
 はない。

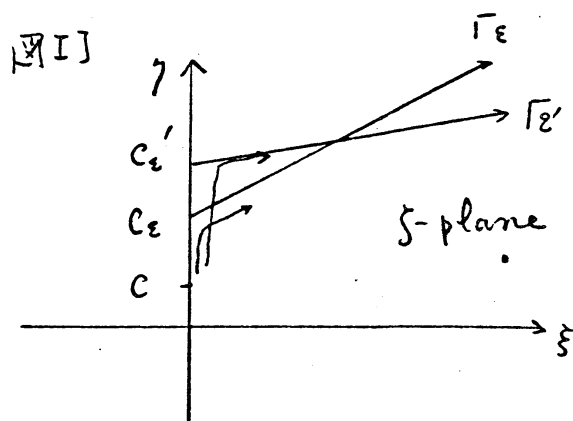
条件 (H_1) と p. 101. Lem. 2.1.2. により
 $\forall \varepsilon$ に対しても $\exists C_\varepsilon$ が存在して、 $\zeta = \varepsilon \xi + C_\varepsilon$
 $(\xi \geq 0)$ 上で、 $\forall \theta \quad |J(\zeta)| \geq A_0 e^{-\theta|\zeta|}$
 と仮定してよい。今たとえは、 $\varepsilon=1$ に対する

C_ε を C と定め, 以下 $\varepsilon < 1$, $C_\varepsilon > C$ としておく。

この時, $E_\varepsilon^+(z) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Gamma_\varepsilon^+} \frac{e^{-iz\xi}}{J(\xi)} d\xi$

とし, ここで $\Gamma_\varepsilon^+ = \{(0+i\eta) \mid 0 \leq \eta \leq C_\varepsilon\} \cup \{(\xi + \sqrt{1-\varepsilon}\xi + C_\varepsilon) \mid \xi \geq 0\}$ と定める。

($\xi = \operatorname{Re} \xi$, $\eta = \operatorname{Im} \xi$) (図 I) 参照。



$z = x + iy$ は

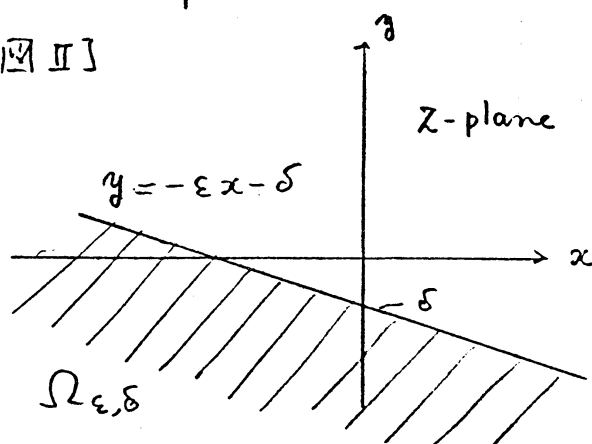
$$y + \varepsilon x < -\delta \quad \varepsilon$$

($\delta > 0$)

を満たす所で考える。

$$\{ \operatorname{Im} z < -\varepsilon \operatorname{Re} z - \delta \}$$

図 II]



$\stackrel{\text{def}}{\Omega}_{\varepsilon, \delta} \ni z$ に好し

ては, $|J(\xi)|$ の下からの評価により明らかに $E_\varepsilon^+(z)$ は絶対収束する積分で

表現されている。又,

従って Cauchy の積分定理 から明らかに

$$\Omega_{\varepsilon, \delta} \cap \Omega_{\varepsilon', \delta'} \ni z \text{ に好し } E_\varepsilon^+(z) = E_{\varepsilon'}^+(z)$$

が成立する。又, 一方 $\bigcup_{\substack{\varepsilon > 0 \\ \delta > 0}} \Omega_{\varepsilon, \delta} = \{ \operatorname{Im} z < 0 \}$

は明らか故. 結局 解析接続により, $\text{Im } z < 0$ で
 正則な $E^+(z)$ が得られる. (いささか符号
 , が見辛い. $\bar{f}(1/J(z))$ を行っている感じ
 だ"からやむを得ない.) 同様に, $\Gamma_\varepsilon^- \overline{\partial}_f$
 $\overline{\partial}_f \{ (0+i\eta) \mid C \leq \eta \leq C_\varepsilon \} \cup \{ \xi - \sqrt{-1}(\varepsilon\xi + C_\varepsilon) \mid$
 $\xi \leq 0 \}$ 上. $E_\varepsilon^-(z) \overline{\partial}_f \int_{\Gamma_\varepsilon^-} \frac{e^{-iz\xi}}{J(\xi)} d\xi$

と定めることにより, $\{ \text{Im } z > 0 \}$ で "正則" な $E^-(z)$
 を得る. この時 $(E^-(z), -E^+(z))$ により定まる
 超函数 $E(x)$ が求める基本解になっていること
 を示そう. まず $S * E = 2\pi\delta(x)$ を示そう.

$z \in \Omega_{\varepsilon, \delta}$ 上 $\text{supp } S = \{0\}$ 故

$S^* : \mathcal{O}(\Omega_{\varepsilon, \delta}) \rightarrow \mathcal{O}(\Omega_{\varepsilon, \delta})$ に注意して

$$\begin{aligned} (S^* E_\varepsilon^+)(w) &= \int_{\Gamma_\varepsilon^+} e^{-i w \xi} \langle S, e^{i z \xi} \rangle \frac{d\xi}{J(\xi)} \\ &= \int_{\Gamma_\varepsilon^+} e^{-i w \xi} d\xi \quad (\because J(\xi) = \langle S, e^{i z \xi} \rangle \text{ by def.}) \\ &= \int_C^{C_\varepsilon} e^{w t} \sqrt{-1} dt + \int_0^\infty e^{-\sqrt{-1} w ((1+\sqrt{-1}\varepsilon)\xi + \sqrt{-1}C_\varepsilon)} \\ &\quad \times (1 + \sqrt{-1}\varepsilon) d\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left. \frac{\sqrt{-1} e^{w\xi}}{w} \right|_C^{C_\varepsilon} + \left. \frac{e^{-\sqrt{-1}w((1+\sqrt{-1}\varepsilon)\xi + \sqrt{-1}C_\varepsilon)}}{-\sqrt{-1}w} \right|_0^\infty \\
&= \frac{\sqrt{-1} e^{C_\varepsilon w}}{w} - \frac{\sqrt{-1} e^{Cw}}{w} + \frac{e^{C_\varepsilon w}}{\sqrt{-1}w} \\
&= \frac{e^{Cw}}{\sqrt{-1}w} \quad \text{従って } \operatorname{Im} w < 0 \text{ に}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{おいて } S * E^+ = \frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{e^{Cw}}{w} \\
&\text{同様に } S * E^- = \frac{-1}{\sqrt{-1}} \frac{e^{Cw}}{w} \quad (\operatorname{Im} w > 0)
\end{aligned}$$

$$\text{従って } S * E = \left[\frac{-1}{\sqrt{-1}} \frac{e^{Cw}}{w} \right] = 2\pi \delta(x)$$

次に $\operatorname{supp} E \subset \{x \geq 0\}$ を示そう。

これには $x \leq a < 0$ とし $\varepsilon > 0$ を fix
して $-E_\varepsilon^+(x) = E_\varepsilon^-(x)$ を言えば十分。

従って Cauchy の積分定理によ

$$\left| \int_{-\xi_0}^{\xi_0} e^{-i x (\xi + \sqrt{-1} (C_\varepsilon + \varepsilon \xi_0))} / J(\xi) d\xi \right|$$

$\longrightarrow 0 \quad (\xi_0 \rightarrow \infty)$ を言えばよい。

かかるに。

$$\left| \int_{-\xi_0}^{\xi_0} d\xi \right| \leq \int_{-\xi_0}^{\xi_0} \frac{e^{(C_\varepsilon + \varepsilon \xi_0)x}}{|J(\xi)|} d\xi$$

$$\leq A_\theta e^{(C_\varepsilon + \varepsilon \xi_0)a} \int_{-\xi_0}^{\xi_0} e^{\theta |\xi|} d\xi$$

$$\leq 2A_\theta e^{(C_\varepsilon + \varepsilon \xi_0)a} (e^{\theta \xi_0} - 1 / \theta)$$

よって $\theta < (-a)\varepsilon$ と θ をとめて $\xi_0 \rightarrow \infty$
とすれば、 $\left| \int_{-\xi_0}^{\xi_0} d\xi \right| \rightarrow 0$

$$\therefore \text{supp } E \subset \{a \leq x\} \quad (\forall a < 0)$$

$$\therefore \text{supp } E \subset \{0 \leq x\}$$

最後に $n \geq 2$ の場合に 修正すべき点に触れて
おこう。この時 適当な Affine 変換を行うこと
により、最初から $\Gamma^\circ \supset \{\text{Im } \xi_j \geq 0 \ \forall j\}$ として
おいて 一般性は失われない。又、以下から判る
ように、こうしておけば $n=2$ としても 特に一般性は
失われないから 記号の簡単の為 $n=2$ としておく。
この時、

$$E_{\varepsilon}^{++}(z_1, z_2) = \overline{\text{pf}} \int \int_{\Gamma_{\varepsilon}^{++}} \frac{e^{-i\langle z, \xi \rangle}}{J(\xi_1, \xi_2)} d\xi_1 d\xi_2$$

$$\text{但し, } \Gamma_{\varepsilon}^{++} = \left[\left\{ 0 + \sqrt{-1} \eta_1 \mid C^1 \leq \eta_1 \leq C_{\varepsilon}^1 \right\} \cup \right. \\ \left. \cup \left\{ \xi_1 + \sqrt{-1}(\varepsilon \xi_1 + C_{\varepsilon}^1) \mid \xi_1 \geq 0 \right\} \right] \times$$

$$\times \left[\left\{ 0 + \sqrt{-1} \eta_2 \mid C^2 \leq \eta_2 \leq C_{\varepsilon}^2 \right\} \cup \left\{ \xi_2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{-1}(\varepsilon \xi_2 + C_{\varepsilon}^2) \mid \xi_2 \geq 0 \right\} \right] \overline{\text{pf}} \Gamma_{\varepsilon_1}^{+} \times \Gamma_{\varepsilon_2}^{+}$$

(p. 150. 図 I 参照: $\eta_j = \text{Im } \xi_j$ etc なる

記号は 前へて することと同じ。)

又 $\bigvee_{\varepsilon_2}^{+} \in \Gamma_{\varepsilon_2}^{+}$ の $\xi_2 = 0$ に 属しての 折り
返し, とし

$$E_{\varepsilon}^{+-}(z_1, z_2) = \int \int_{\Gamma_{\varepsilon_1}^{+} \times \bigvee_{\varepsilon_2}^{+}} \frac{e^{-i\langle z, \xi \rangle}}{J(\xi_1, \xi_2)} \times$$

$\times d\xi_1 d\xi_2$ etc と E_{ε}^{++} を 又, 他も同様

に. $E_{\varepsilon}^{-+}, E_{\varepsilon}^{--}$ を 定める ことにより,

p. 150. と同様にして $\{ \text{Im } z_1 < 0, \text{Im } z_2 < 0 \}$

etc で" (ε に よる ない) 正則 $^{++}$ 函数 E^{++} ,

E^{+-}, E^{-+}, E^{--} を 得る。そこで

$(E^{--}, -E^{-+}, -E^{+-}, E^{--})$

$\overline{\text{pf}} E(x) \in H_{\mathbb{R}^2}^2(\mathbb{C}^2, \theta) \cong \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ とし,

$\mathcal{S} * E = 2\pi \delta(x)$ となることは, $m=1$ の時

と全く同様である。従って $E(x)$ の support の様子さえ見ればよい。

しかるに $x_1 \leq a < 0$ として $z_2^0 \in \Omega_{\varepsilon, \delta}$

(p. 151 図 II 参照) とすれば, $n=1$ の時

$$\text{と同じく } E_{\varepsilon}^{++}(x_1, z_2^0) = -E_{\varepsilon}^{-+}(x_1, z_2^0)$$

が知られる。同様に

$$-E_{\varepsilon}^{+-}(x_1, z_2^0) = E_{\varepsilon}^{--}(x_1, z_2^0)$$

$$\text{従って } \text{supp } E \subset \{a \leq x_1\} \quad \forall a < 0$$

$$\therefore \text{supp } E \subset \{x_1 \geq 0\}$$

$$\text{同じく } (E_{\varepsilon}^{++}, -E_{\varepsilon}^{+-}), (-E_{\varepsilon}^{-+}, E_{\varepsilon}^{--})$$

について同様に考えれば

$$\text{supp } E \subset \{x_2 \geq 0\}$$

$$\therefore \text{supp } E \subset \{x_1 \geq 0\} \cap \{x_2 \geq 0\}$$

Q. E. D.

$$\text{Eg. 4.2.2. } \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) E(t, x) = \delta(t) \delta(x)$$

$\text{supp } E \subset \{t=0\} \times \{x \geq 0\}$ の具体的

表現) 超函数論の一つの demonstration

として, 上のような基本解 $E(t, x)$ を極めて

具体的に表現してみよう。

まず発見的考察を行う。(cf. Gårding [10])

$$\partial^2/\partial x^2 \equiv a(D), \quad \partial/\partial t = b(D) \text{ とし.}$$

$a^{k+1} (= \partial^{2(k+1)}/\partial x^{2(k+1)})$ に対する
基本解を $E(a^{k+1}, t, x)$ と書く。

「幾何級数」により、

$$E(t, x) = \sum (-1)^k b(D)^k E(a^{k+1}, t, x)$$

となることが期待される。

$$\text{ここで } H^2_{\{t=0\} \times \{x \geq 0\}}(\mathbb{C}^2, \mathcal{O})$$

$$\cong H^2(\mathcal{U}, \mathcal{U}', \mathcal{O}) \quad (\text{たとえば小松 [28]}$$

p. 209. 参照) と表現することにする。但し、

$$\mathcal{U} = \{U_j\}_{j=0}^2, \quad \mathcal{U}' = \{U_1, U_2\}, \quad \text{ここに}$$

$$U_0 = \mathbb{C}^2, \quad U_1 = \{(T, Z) \in \mathbb{C}^2 \mid Z \neq 0\},$$

$$U_2 = \{(T, Z) \in \mathbb{C}^2 \mid T \neq 0\} \text{ とする。}$$

$$\text{すると } E(a^{k+1}, t, x)$$

$$= \left[-\frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{(2k+1)!} \frac{Z^{2k+1}}{T} \log Z \right]$$

と表現される a^{k+1} の基本解が存在する

ことは明らか。ここで $\log Z$ は $\log Z$ の

主値. 従って $(Z^{2k+1}/T) \log Z$ は $U_1 \cap U_2$ で一価正則になっていることに注意.

従って $E(h, x)$ の, 上の Čech cohomology についての定義函数としては,

$$= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(2k+1)!} \frac{Z^{2k+1}}{T^{k+1}} \log Z$$

(in $U_1 \cap U_2$) をとることが適当と考えられる. 実際. そうとすればよいことを以下に証明しよう. (発見的考察終り)

$$\text{今 } G(T, Z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(2k+1)!} \frac{Z^{2k+1}}{T^{k+1}}$$

として, これが $T \neq 0$ で一価正則なることをまず示そう. そのために,

$$Q(\tau^2, Z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(2k+1)!} \frac{Z^{2k+1}}{T^{k+1}} \text{ を考え}$$

$$\text{これは, } Q(\tau^2, Z) = \frac{1}{\tau} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(2k+1)!} \left(\frac{Z}{\tau} \right)^{2k+1}$$

$$\text{今 } q(w) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(2k+1)!} (w)^{2k+1}$$

$$\text{なる級数を考える. 一方, } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! w^{2n}}{(2n)!}$$

なる級数を考えると、この級数の収束半径は

$$\infty \text{ で } \sum_{n=1}^{\infty} n! w^{2n} / (2n)! =_{{\text{df}}} h(w)$$

$$= w e^{\frac{w^2}{4}} \int_0^{w/2} e^{-s^2} ds \text{ と表わされること}$$

が知られている。(一松 他 [21] p.58 3° 参照) 従って

$$\begin{aligned} h'(w) &= \sum_{n=1}^{\infty} n! / (2n-1)! w^{2n-1} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} (l+1)! / (2l+1)! w^{2l+1} = g(w) \end{aligned}$$

となり、 $g(w)$ は entire. 従って

$$g(\tau^2, z) = \frac{1}{\tau} g(z/\tau) \text{ は } \tau \neq 0 \text{ で}$$

正則. 故に.

$G(T, Z)$ は $T \neq 0$ で正則] かつ $z \neq 0$ で

$$\sum_{k \geq 0} \frac{k!}{(2k+1)!} \frac{Z^{2k+1}}{T^{k+1}} \text{ なる級数で}$$

表現される.

$$\begin{aligned} \text{従って } F(T, Z) &=_{\text{df}} -\frac{1}{4\pi^2} G(T, Z) \log Z \\ &\in \mathcal{O}(U_1 \cap U_2) \end{aligned}$$

次に.

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial T} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \right) F(T, Z) \right] = \delta(t) \delta(x)$$

を示そう。([] は $H^2(\mathcal{U}, \mathcal{U}', \mathcal{O})$

の元としての意) $(T, Z) \in U_1 \cap U_2$ として,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial Z} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(2k+1)!} \frac{Z^{2k+1}}{T^{k+1}} \log Z \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{Z}{T} \log Z \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left(\sum_{k \geq 1} \right) \\ &= \frac{1}{T} \log Z + \frac{1}{T} + \sum_{k \geq 1} \left(\frac{k!}{(2k+1)!} \times \right. \\ & \quad \times \left. \frac{(2k+1) Z^{2k}}{T^{k+1}} \log Z \right) + \sum_{k \geq 1} \frac{k!}{(2k+1)!} \frac{Z^{2k}}{T^{k+1}} \\ &\sim \frac{1}{T} \log Z + \sum_{k \geq 1} \frac{k!}{(2k)!} \frac{Z^{2k}}{T^{k+1}} \log Z \end{aligned}$$

(ここで $\sim$ とは cohomologous in $H^2(\mathcal{U}, \mathcal{U}', \mathcal{O})$ の意)

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(2k+1)!} \frac{Z^{2k+1}}{T^{k+1}} \log Z \right) \\ \sim \frac{1}{T} \frac{1}{Z} + \sum_{k \geq 1} \frac{k!}{(2k-1)!} \frac{Z^{2k-1}}{T^{k+1}} \log Z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \partial / \partial T \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(2k+1)!} \frac{Z^{2k+1}}{T^{k+1}} \log Z \right) \\
 &= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l l!}{(2l-1)!} \frac{Z^{2l-1}}{T^{l+1}} \log Z \text{ 是}
 \end{aligned}$$

明らか。故に

$$\left(\frac{\partial}{\partial T} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \right) F(T, Z) \sim -\frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{TZ}$$

$$\therefore \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) E(t, x)$$

$$= \left[\left(\frac{\partial}{\partial T} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \right) F(T, Z) \right]$$

$$= \left[-\frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{TZ} \right] = \delta(t) \delta(x)$$

従って、求める $E(t, x)$ の一つの Čech
cohomology に与る具体的表現として、

$$F(T, Z) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{4\pi^2} \sum_{k \geq 0} \frac{k!}{(2k+1)!} \frac{Z^{2k+1}}{T^{k+1}} \times$$

$$\times \log Z \quad (Z \neq 0, T \neq 0) \text{ という}$$

定義函数を与えることができた。

4.3. Generalized hyperbolicity の考察

Def. 4.1.1. の hyperbolicity の定義は 極めてよい物であるが、一般の convolution operator に対しては、もちろん、この定義では理論が進展しないことは明らか。そこで更に一般の作用素に対しても理論を展開するために、Def. 4.1.1. を少し修正して、一般の場合も論じよう。

Def. 4.1.1.' $\mu \in \mathcal{S}$, $\text{supp } \mu$ compact としよう。この時、 μ^* が $(1, 0, \dots, 0)$ 方向に hyperbolic $\Leftrightarrow \exists E \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\text{supp } E \subset \Gamma(\text{cone})$ かつ $\Gamma + a(1, 0, \dots, 0) \in \{x_1 \geq 0\}$, かつ $\Gamma + a(1, 0, \dots, 0) \not\subset \Gamma_a \subset \{x_1 > 0\}$ であって $\mathcal{S} * E = \delta(x)$

即ち、“時間 $x_1=0$ ” での様子から $x_1 > 0$ での状態を知ることはできないが、“ $-a < x_1 \leq 0$ ” での様子を知らば” $x_1 > 0$ での未来のことがわかるという定義である。 $\text{supp } \mu \not\subset \{0\}$ の時は、それは自然な条件である。(cf. Ehrenpreis [7], Gårding [9])

さてこのように „Generalized hyperbolicity” を定義する時 Th. 4.1.2. (p. 144.) に現われた条件 (H_1) はやはり必要条件であることは、その証明を見れば明らか。 (p. 145.) しかし、今度は、そのような代数的条件のみで基本解が存在するとは期待できない。 $|1/J(s)|$ が余りにも大きくなる可能性があるからである、しかし、もちろん、条件 (H_1) の代りに、次の条件 (EH_1) を課せば、存在定理が得られることは、殆んど自明に近い。

(EH_1) $\exists c > 0$ が存在して $| \eta | < c \eta_1$ において次の条件が成立する。

$\left[\begin{array}{l} \exists a \text{ が存在して } \forall \varepsilon > 0 \exists C_\varepsilon \text{ があって} \\ | \eta | < c \eta_1 \text{ なる条件の下で, } \eta_1 > \varepsilon | \xi | + C_\varepsilon \\ \text{ならば, } \forall \theta \exists A_\theta \text{ があって} \\ | J(s) | \geq A_\theta e^{-\theta | \xi | - a \eta_1} \text{ が満たさ} \\ \text{れる。} \end{array} \right.$

もちろん (EH_1) が必要であることは、p. 145. (Th. 4.1.2. の証明) と同様にして判る。実際、

$1+M(\xi)=J(\xi)F(\xi)$ が " $|\eta|<C\eta_1$ で"

成立し、しかもそこで

$$\begin{cases} |M(\xi)| \leq B_\varepsilon e^{\varepsilon|\xi|-K\eta_1} & (K>0; \forall \varepsilon>0) \\ |F(\xi)| \leq B'_\theta e^{\theta|\xi|+a\eta_1} & (\forall \theta>0) \end{cases}$$

が成立するから、

$\exists C_\varepsilon$ s.t. $\eta_1 > \varepsilon|\xi| + C_\varepsilon$ ならば、

$$|M(\xi)| < 1/2 \text{ としてよい。}$$

$$\text{従って } |J(\xi)| \geq 1/2 |F(\xi)|^{-1}$$

$$\geq C_\theta e^{-\theta|\xi|-a\eta_1} \text{ が成立する。}$$

又、この条件下で基本解を構成する

ことは、p. 150 ~ p. 155. と全く同様である。

(ただし、そこで $\Omega_{\varepsilon,\delta} = \{z \mid \operatorname{Im} z < -\varepsilon(\operatorname{Re} z + a) - \delta\}$ とせねばならない。それに応じて

$\operatorname{supp} E$ が a だけ負の方向にも広がるので

ある。p. 153. の評価参照。又、 $\operatorname{supp} \mu$

$\not\subset \{0\}$ であるから $\mathcal{O}(\Omega_{\varepsilon,\delta}) \rightarrow \mathcal{O}(\Omega_{\varepsilon,\delta}$

$+ \operatorname{supp} \mu)$ として convolution をせねば

ならぬから、それは別に $\operatorname{supp} \mu$ が一定故、

別に問題ない。)

しかし、我々は、条件 (H_1) の他に、もう一つ、
条件 (S) (p.119. 参照) の仮定をすれば、

Th. 4.2.1 (即ち基本解の構成) が成立する。
これは、条件 (S) が $\mu \in \mathcal{E}'$ (compact
support の distribution) の時には、常に
満たされる (p.126. 参照) ことを合わせて考
えれば、かなり興味深い。(cf. Ehrenpreis
[7], Gårding [9])

それには、条件 (S) と条件 (H_1) から条件
 (EH_1) が成立することを言えばよい。

ここで我々は Ehrenpreis の極めて深い
結果である Minimum modulus theorem
を用いる。(Ehrenpreis [4] p.317. Th.5.
参照)

Th. 4.3.1. 条件 (S) and 条件 (H_1)
 $\Rightarrow$ 条件 (EH_1) (with some a).

証明] 証明は $n=1$ として行う。 $n \geq 2$
の場合は、それを繰り返せば routine である。
(たとえば、Ehrenpreis [6] p.528 ~ p.529.

と同じである)

$\zeta = \xi + i\gamma$ における $|J(\zeta)|^{-1}$ の評価を
行いたい。条件 $(S)_1$ により $\exists \zeta_1$ s.t.
 $|\zeta_1 - \xi| < \theta|\xi|$, $|J(\zeta_1)| \geq e^{-\theta|\xi|}$ 従って

Ehrenpreis の minimum modulus
theorem により $\exists \zeta_2$ s.t. $\gamma < \text{Im } \zeta_2$
 $< 3\theta|\xi| + 2\gamma$ かつ $\forall \theta' > 0$ に対しても

$$|J(\zeta_2)| \geq K_0 \exp(-B\theta'(1+\theta)|\xi| - C\alpha(3\theta\xi + 2\gamma) - 11\theta|\xi|)$$

が成立する。 (α は $|J(\zeta)|$ の exponential
type. B, C は constant.)

従って ζ_2 を中心、半径 $3(\gamma + \theta|\xi|)$
の円に対して、p. 86 の Lem. 1.1.4 を適用す
れば、(あるいは再び Ehrenpreis の
minimum modulus theorem を用い
てもよい。) その円内で $J(\zeta) \neq 0$ ならば
(条件 (H_1) をここで用いる。) 最初の点 ζ
において、 $|J(\zeta)| \geq C_0' \exp(\theta'(3\gamma +$
 $+ (1+3\theta)|\xi|) + \alpha(5\gamma + 6\theta|\xi|)) \times$
 $\times \{ \exp(-B\theta'(1+\theta)|\xi| - C\alpha(3\theta\xi + 2\gamma) -$

$$-11\theta|\xi|)\}^2$$

$$\geq C_{\theta'} \exp((\beta\theta' + \gamma\theta)|\xi| - \delta\eta)$$

ここで β, γ, δ は θ, θ' によらぬ constants

従って条件 (EH_1) が満たされる。

以上により, $\text{supp } \mu$ が compact の場合は、
ほぼ μ^* の双曲性に対する完全な定理
が得られたといつてよい。しかし、これを更に
一般の作用素に拡張するにはどうすれば
よいか? それを以下で考えよう。この問題は
Gårding 教授にお教え頂いた物である。

その示唆と同時に先生は、未発表の論文
[9] をお貸し下さった。ここで先生の御好
意と御親切に心から感謝致します。

○ Problem (Gårding) $\mu \in \mathcal{B}$,
 $\text{supp } \mu \subset \Gamma$ ($\mathbb{R}^n$ の proper convex cone)
と仮定する。この時 $\mu^* E = \delta$, $\text{supp } E$
 $\subset \Gamma + {}^3a(1, 0, \dots, 0)$ なる $E (\in \mathcal{B})$ が存在
する為、 μ の条件を求めよ。

@ Solution

$\mu \in \mathcal{B}$, $\text{supp } \mu \subset \Gamma$ であるから。
 $\{q(\Omega)\}$ の flabbiness (p. 56. Th. 4.4.2.)
 により $\exists \tilde{\mu} \in q(\mathbb{D}^n)$ s.t. $\text{supp } \tilde{\mu} \subset [\Gamma]_{\mathbb{D}^n}^a$
 $\overline{\text{def}} K$, $\mu = \tilde{\mu}$ in $\mathbb{R}^n$ とできる。そこで、
 このような $\tilde{\mu}$ に対して、上のような問題を考え
 てみよう。E.P.S. $F \in q(\mathbb{D}^n)$, $\text{supp } F \subset K$
 であって、 $\tilde{\mu} * F = \delta + \nu$ $\text{supp } \nu \subset K \cap S_\infty^{n-1}$
 なる F が存在するための条件を求める。

すると $\text{supp } \tilde{\mu} \subset K$ ということから。
 $\langle \tilde{\mu}, e^{-iz\zeta} \rangle_{\overline{\text{def}}} J(\zeta)$ は、 $\mathbb{R}^n \times \sqrt{-1}(\Gamma^0)^i$
 で正則であり、(Ch. I. §5. 参照) そこで
 $J(\zeta)$ が、p. 162 の条件 (EH₁) を満たさぬ
 はならぬことは明らかである。

しかし、このように $\tilde{\mu}$ に問題を帰着して、“定
 理が well-defined” になるであろうか？ 即
 ち μ の拡張として他の $\tilde{\mu}$ をとった時、 $\tilde{\mu}$ が
 上のような F をもつ時、 $\tilde{\mu}$ もやはり $\exists F'$ に
 対して $\tilde{\mu} * F' = \delta + \nu'$ $\text{supp } \nu' \subset K \cap S_\infty^{n-1}$
 となるであろうか。答は肯定的である。実際

$\text{supp} (\tilde{\mu} - \tilde{\mu}) \subset K \cap S_{\infty}^{\prime\prime-1}$, $\text{supp } F$
 $\subset K + a(1, 0, \dots, 0)$ 故に それは 明らかで
 ある。 ($\because$ Ch I. §5. Th. 5. 1. 2. (p. 67.) 参照)
 (この事実 (or 方法) に思い至ったのは全く
 Garding 先生のお蔭である。)

従って μ の一つの拡張 $\tilde{\mu}$ が条件 (EH_1)
 を満たすことは必要条件である。これが十分
 条件であることは次のようにして容易に判る。

(簡単の爲 $n=1$ としておく。 $n \geq 2$ の時への
 拡張は p. 153. ~ p. 155. と全く同様である。)

まず $\tilde{\mu} \supset \mu_n + \nu_n$ $\text{supp } \mu_n \subset \{0 \leq x \leq n\}$
 と分解しておく。 今

$$E(x) = \int e^{-ixs} \frac{J(s)}{J(s)} ds \quad \text{と して 超函数}$$

$E(x)$ を定める。この意味付けは p. 150 ~ p. 151. と
 全く同じである。 ($\because J(s)$ に対し 条件 (EH_1)
 が仮定してあるから。) 条件 (EH_1) によら。

$\text{supp } E \subset \{a \leq x\} \quad (a < 0)$ である
 ことは p. 153. と同じ。 従って, $\mu * E$ は
 超函数として well-defined であることにまず

注意しよう。 同様に ν_n を $\mathbb{R}$ に制限した $\nu_n^{\mathbb{R}}$

に対しても $\nu_n^{\mathbb{R}} * E$ は well-defined である。

明らかに $\mu = \mu_n + \nu_n^{\mathbb{R}}$ である。 さて, $\text{supp } E$

$\subset \{a \leq x\}$ 故 $\Omega_c = \{x < c\}$ とし。

n を十分大きくとれば, $\nu_n * E = 0$ in Ω_c

即ち $\mu * E = \mu_n * E$ in Ω_c

一方 μ_n は compact support (in $\mathbb{R}$) 故

$\langle \mu_n, e^{iz\xi} \rangle \stackrel{\text{def}}{=} J_n(\xi)$ とする時。

$$\mu_n * E = \left[\int \frac{J_n(\xi) e^{-iz\xi}}{J(\xi)} d\xi \right] \text{ としてよい。}$$

(p.151. 参照) ここで。

$$\mu_n * E - 2\pi\delta = \left[\int \frac{J_n(\xi) - J(\xi)}{J(\xi)} e^{-iz\xi} d\xi \right]$$

となることに注意しよう。

一方, $\tilde{\mu} - \mu_n = \nu_n$ の support は $\{x \geq n\}$ に含まれているから, $\forall \varepsilon \exists C_\varepsilon \eta \geq \varepsilon|\xi| + C_\varepsilon$ 上で $|J_n(\xi) - J(\xi)| \leq e^{-(\eta + \alpha)\eta}$ となる。

従って $\text{supp } E \subset \{a \leq x\}$ の証明と同じにして,

$$\left[\int \frac{J_n(\xi) - J(\xi)}{J(\xi)} e^{-iz\xi} d\xi \right] \stackrel{\text{def}}{=} G(x)$$

(左辺の意味付けは、 $E(x)$ のそれと同じ)

の support は $\{n+a \leq x\}$ に含まれることは容易に判る。従って、 a は fixed constant 故 n を十分大きくとれば、 $\mu_n * E - 2\pi\delta = 0$ in Ω_c .

従って Ω_c において $\mu * E = \mu_n * E = 2\pi\delta$ ここで c は任意だから、結局 $\mathbb{R}$ 全体で $\mu * E = 2\pi\delta$.

従って E が求める μ の逆作用素である。定理の形にまとめておこう。

Th. 4.3.2. $\mu \in \mathcal{B}$, $\text{supp } \mu \subset \Gamma$ が "hyperbolic" である為の必要十分条件は、 μ のような拡張 $\tilde{\mu}$ に対し、

$\langle \tilde{\mu}, e^{-iz\xi} \rangle \overline{\partial}_\xi J(\xi)$ が p. 162 の条件 (EH_1) を満たすことである。この条件は、

μ の拡張の仕方 (ie. $\tilde{\mu}$ のとり方に) (結果として) 依存しない。

注意 Gårding [9] では問題を "原点に reduce して この問題が (distribution の場合に) 解かれている。

4.4. Hyperbolic polynomial についての注意

この subsection では, 4.1. Bv 4.2 で local operator に対して得られた結果, 即ち

p. 144. に与えた条件 (H_1) が S^* ($\text{supp } S = \{0\}$) の (Def. 4.1.1. の意味での) hyperbolicity の必要十分条件であるという結果が, S^* が通常の偏微分作用素の場合に何を意味するかに触れておこう。尚, この節の結果は, Schapira 氏も最近得られたとの手紙を受けとった。

Th. 4.4.1. $P(D)$ が $(1, 0, \dots, 0)$ 方向に (Def. 4.1.1. の意味で) hyperbolic.

$\iff P_m(D)$ が $(1, 0, \dots, 0)$ 方向に hyperbolic

但し $P_m(D)$ は $P(D)$ の principal part.

(4): p. 175. 注意参照)

の注意. この結果は distribution の場合との著しい違いを示す。(distribution の場合には, 任意の低階の項を付け加えても hyperbolicity が保たれるには, P_m が strictly hyperbolic である必要があった。たとえば, Hörmander

[18] p. 136. Cor. 5.5.2.) 但し、それは、

Gevrey class の distribution の場合の結果。
 (Larsson [29], 大矢, Schapira [44] 等).
 を用いて間接的に示すこともできる。即ち、
 P_m が $(1, 0, \dots, 0)$ 方向に hyperbolic なら、適当
 な Gevrey class の distribution の空間で、 $P_m + Q$
 に対する基本解が作れるからである。しかし、
 “すべての Gevrey class の distribution の
 和集合”に対して云々”という表現よりは、
 (論理的には永増した結果であるか)
 “超函数に対して”と表現した方を好む人
 もあろう。尚、以下の証明は、Hörmander
 [18] Ch. 5. Larsson [29] の修正なし
 簡易化である。

Th. 4.4.1. の証明は以下に示すいくつか
 の Propositions から自然に得られる。

Prop. 4.4.2. $P(D)$ が $(1, 0, \dots, 0)$ 方向
 に hyperbolic $\Rightarrow P_m(1, 0, \dots, 0) \neq 0$

証明] $P_m(\xi) \neq 0$ 故 $\exists \alpha_j \in \mathbb{R}$ s.t.
 $(P_m(1, 0, \dots, 0) = 0 \text{ と仮定しよう})$

$P_m(1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \neq 0$ としてよい。

$$Q(\lambda, \mu) \stackrel{\text{def}}{=} P(\lambda, \lambda \mu \alpha_2, \dots, \lambda \mu \alpha_n) \\ \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu=0}^m \lambda^\nu R_\nu(\mu) \quad \text{と置く.}$$

$R_m(\mu) = P_m(1, \mu \alpha_2, \dots, \mu \alpha_n) \neq 0$ 故

$Q(\lambda, \mu) = 0$ の解 $\lambda = \lambda_j^i(\mu)$ を Puiseux 展開して, (たとえば Hörmander [18] Appendix 参照) $Q(\lambda, \mu) = R_m(\mu) \prod_{j=1}^m (\lambda - \lambda_j^i(\mu))$

但し $0 < |\mu| < \delta$ において

$$\lambda_j^i(\mu) = \sum_{k \geq N_j^i} a_{k,j}^i (\mu^{1/k})^k$$

さて, 今 条件 (H_1) により $R_\nu(0) \neq 0$ となる $\nu = \nu_0$ があることに注意しよう。実際, $\forall \nu$ に

対し $R_\nu(0) = 0$ ならば $Q(\lambda, 0) \stackrel{\text{by def.}}{=} 0$

$$= P(\alpha, 0; \dots, 0, 0) \equiv 0$$

特に, $\lambda = \sqrt{-1} \eta$ ($\eta > 0$) として,

$P(i\eta, 0, \dots, 0) \equiv 0$ 条件 (H_1) により

$$\eta < \varepsilon |\xi| + C_\varepsilon = C_\varepsilon, \quad \text{これは矛盾.}$$

一方, 背理法の仮定 $P_m(1, 0, \dots, 0) = 0$ より

$R_m(0) = 0$ 従って $\exists \{\mu_\ell\} \quad \mu_\ell \rightarrow 0,$

$R_m(\mu_\ell) \neq 0$ に対して $|R_{\nu_0}(\mu_\ell) / R_m(\mu_\ell)| \rightarrow \infty$

かかるに. $R_{N_0}(\mu_\varepsilon)/R_m(\mu_\varepsilon)$ は $\{\lambda_j(\mu_\varepsilon)\}_{j=1}^m$

の基本対称式故. $|R_{N_0}(\mu_\varepsilon)/R_m(\mu_\varepsilon)| \rightarrow \infty$
 となるには $\exists j. |\lambda_j(\mu_\varepsilon)| \rightarrow \infty$ となければ
 はならぬ。

従って その j_0 に対しては. $\lambda_{j_0} \sim a_{N_0} (\mu^{1/p})^{-N_0}$

($N_0 > 0$) と Puiseux 展開となる. ($a_{N_0} \neq 0$)

今. まず $\text{Im} a_{N_0} > 0$ としよう. このとき. $\mu \in \mathbb{R}$,

$\mu > 0$ として. 条件 (H_1) により $\forall \varepsilon \exists C_\varepsilon$

$$(\text{Im} a_{N_0}) \mu^{-N_0/p} < \varepsilon \mu^{1 - \frac{N_0}{p}} + C_\varepsilon \quad (\mu \ll 1)$$

$$\text{即ち } (\text{Im} a_{N_0}) < \varepsilon \mu + C_\varepsilon \mu^{N_0/p} \quad \mu \rightarrow 0$$

として 右辺 $\rightarrow 0$ 左辺 $> c > 0$ 故 矛盾。

$\text{Im} a_{N_0} = 0$ のときは $e^{\frac{N_0}{2p} \pi \sqrt{-1}} \cdot \mathbb{R}^+$ に移って

今と同じ論法を適用すればよい. $\text{Im} a_{N_0}$

< 0 の時も同様. ($e^{\frac{N_0 \pi}{p} \sqrt{-1}} \cdot \mathbb{R}^+$ に移って行う。)

従って いずれにしても. $P_m(1, 0, \dots, 0) = 0$ と
 仮定すると矛盾が生じる. 従って $P_m(1, 0, \dots, 0) \neq 0$

Prop. 4.4.3. P が $(1, 0, \dots, 0)$ -方向に hyperbolic
 (Def. 4.4.1. の意味で) ならば. P_m は (Gårding

の意味で) hyperbolic である。

注意: 明らかに, Gårding の意味で hyperbolic (Gårding [8], Hörmander [18] 等参照) なら Def. 4.4.1. の意味で hyperbolic 故. P が 齊次 の 時, P が Def. 4.4.1. の意味で hyperbolic であることと, Gårding の意味で hyperbolic であることは, この定理の帰結である。

証明] 前命題により $P_m(1, 0, \dots, 0) \neq 0$ は出ているから, 齊次双曲型多項式の特徴付けにより, (Hörmander [18] Th. 5.5.3.)

$$\underbrace{\xi \in \mathbb{R}^n}_{\xi \in \mathbb{R}^n \text{ かつ } \xi \neq 0} P_m(\xi + i\tau(1, 0, \dots, 0)) = 0 \Rightarrow \operatorname{Re} \tau = 0 \text{ を}$$

いえる。 P_m の齊次性により, $\operatorname{Re} \tau \geq 0$ と仮定しておいてよい。 このとき,

$$0 = P_m(\xi + i\tau(1, 0, \dots, 0)) = \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \sigma^{-m} P(\sigma\xi +$$

$$+ i\sigma\tau(1, 0, \dots, 0)), \quad P_m(1, 0, \dots, 0) \neq 0 \text{ 故}$$

$\tau(\sigma^{-1})$ は $\sigma \gg 1$ で連続, 従って条件

(H_i)¹により. $\forall \varepsilon \quad \operatorname{Re} \tau \leq \varepsilon$ 即ち,

$$\operatorname{Re} \tau = 0$$

Prop. 4.4.4. P_m は $(1, 0, \dots, 0)$ 方向に
hyperbolic であるとする。この時, $(1, 0, \dots, 0)$
の子分近くの N に対しても $P_m(N) \neq 0$ であること
(Hörmander [18] Ch. 5, Gårding [8] 等)
はよく知られている。この時 任意の $m-1$ 次の
微分作用素 Q に対し, $P = P_m + Q$ とする。

この時 $P(\xi + i\tau N) = 0$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ として,

$$|\operatorname{Im} \tau| \leq C_N (|\xi| + 1)^{1-1/m} \quad \text{ここで } C_N \text{ は}$$

N に関して連続にとれる。特に,

P は $(1, 0, \dots, 0)$ 方向に, Def. 4.4.1. の意味で
hyperbolic である。

証明は、殆んど Hörmander [18] p. 148.
lem 5.7.3. のそれと同じだから省略する。
極く容易である。

従って Prop. 4.4.2. $\sim$ Prop. 4.4.4. により,

p. 171. Th. 4.4.1. の得られることは明らか。

尚, p. 172 で触れた "Gervey class の distribution" における結果は かなり面倒な計算 (Hörmander 流の多項式の比較定理) を必要とする物であることを注意しておく。

4.5. Non-admissible data

我々は 4.1 において hyperbolicity を 有限伝播速度の観点から "定義" した。これは Gårding [8] 以来の表現法であるが、それが実際極めてよい定義であることを示すために F. John の Non-admissible data の理論がある。(F. John [23] 参照) この理論が、以下に示す形で 超函数論でも正しいことを示そう。方法は John の論文そのままといってもいいが、結果は 前節 Th. 4.4.1. と合せ考えると、超函数か、双曲型作用素の理論の研究に、distribution より、よりすぐれている例証とみなせるかも知れない。尚、この

理論は ある „Ideal Theorem“ (p. 192 参照)
 がもし正しいならば、かなり面白い結果を産むことが
 判っている。この „Ideal Theorem“ の周辺を詳しく調
 べることは残された重要な課題であろう。

Th. 4.5.1. P を定数係数の通常の偏微分作
 用素とある。 $P = \prod P_j$ と既約成分に分解した
 時、どの P_j も N 方向に hyperbolic でなく、しかも
 $P_n(N) \neq 0$ とする。 ($P_n(N) \neq 0$ については p. 185 参照)

今 $\{x \mid a < \langle x, N \rangle < b\} \stackrel{\text{def}}{=} \Omega$ として、

$P(D)u = 0$ (in Ω), $u \in \mathcal{S}(\Omega)$, $\text{supp } u$ 有
 界, とする。この時 $u \equiv 0$ (in Ω) である。

証明] 定理の形から P は最初から既約と
 しておいてよい。又、 $P_n(N) \neq 0$ と仮定してある
 から、適当に座標軸をとることにより、

$$\Omega = \{x \mid -2 < x_n < 2\} \text{ 又 } P_n(\xi', 0) \neq 0$$

と仮定してよい。ここで $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$

今 $P(D)u = 0$ かつ $P_n(0, \dots, 0, 1) \neq 0$ 故、

Directional regularity theorem (p. 107.

Th. 2.1.5.) の Cor (p. 109) により、 u は

x_n を real analytic to parameter とする。従

って 各 x_n に 値を "specialize" できる。即ち

$$u(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^0) \in \mathcal{B}(\Omega \cap \{x_n = x_n^0\})$$

ここで 定理の仮定により

$u(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^0)$ は $(n-1)$ 変数の
超函数として compact support をもつ。

$$\text{従って } \int \cdots \int u(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) e^{-i \langle (x_1, \dots, x_{n-1}), \\ (s_1, \dots, s_{n-1}) \rangle} dx_1 \cdots dx_{n-1} \text{ なる積分を考へ}$$

得る。これを $\hat{u}(s', x_n)$ と記すことにしよう。

一般に compact support の超函数 $\theta(x)$ に
対し $\int \cdots \int \frac{\partial}{\partial x_j} \theta(x) dx_1 \cdots dx_n = 0$ が成立するこ

とから 明らかに $P(s', D_n) \hat{u}(s', x_n) = 0$
が成立する。 ($D_n = 1/\sqrt{-1} \partial/\partial x_n$) $P_m(0; \dots, 0, 1)$
 $\neq 0$ と仮定したからこの方程式は D_n を含む。

そこで John に 従って

$$R(s', \sigma, \tau) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{P(s', \sigma) - P(s', \tau)}{\sigma - \tau}$$

といて

$$W(s', \sigma, x_n) \stackrel{\text{df}}{=} R(s', \sigma, D_n) \hat{u}(s', x_n)$$

と定めよう。この時 明らかに

$$\begin{aligned}
& (D_n - \sigma) W(\zeta', \sigma, x_n) \\
&= (P(\zeta', D_n) - P(\zeta', \sigma)) \hat{u}(\zeta', x_n) \\
&= -P(\zeta', \sigma) \hat{u}(\zeta', x_n) \quad (\because P(\zeta', D_n) \hat{u} \\
&= 0 \text{ 故) が成立する。 } \text{よって } P(\zeta', \sigma) = 0 \\
&\Rightarrow (D_n - \sigma) W(\zeta', \sigma, x_n) = 0 \quad \text{従って} \\
&P(\zeta', \sigma) = 0 \text{ ならば } W(\zeta', \sigma, 0) \\
&= e^{-i\sigma x_n} W(\zeta', \sigma, x_n)
\end{aligned}$$

一方、 x_n を fix するごとに、

$$\begin{aligned}
|W(\zeta', \sigma, x_n)| &\leq C_\varepsilon (1 + |\sigma|)^{m-1} \times \\
&\times e^{\exists M |Im \zeta'| + \varepsilon |Re \zeta'|}
\end{aligned}$$

(C_ε は x_n に depend する。) が成立することは

は $u(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$ が x_n を fix して、

$(n-1)$ -変数の超函数として compact support

故明らか; (M は、たかたか $\text{diam } \Omega$ で

押えうる。) 特に $x_n = +1$ or -1 と して

$P(\zeta', \sigma) = 0$ ならば、

$$\begin{aligned}
|W(\zeta', \sigma, 0)| &= |e^{-i\sigma x_n}| |W(\zeta', \sigma, x_n)| \\
&\leq C_\varepsilon (1 + |\sigma|)^{m-1} e^{M |Im \zeta'| + \varepsilon |Re \zeta'| - |Im \sigma|}
\end{aligned}$$

($Im \sigma \geq 0$ のときは $x_n = -1$. $Im \sigma < 0$ の

ときは $x_n = 1$ と選ぶ。)

この事実と P が non-hyperbolic という仮定から、我々は、 $W(\xi', \sigma, 0) \equiv 0$ を示そう。

P が non-hyperbolic 故、Th. 4.1. によって、 P_m は non-hyperbolic. 従って着次の曲型多項式の characterization により、 $P_m(\xi', \sigma) = 0$ は 適当な $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$ に対して non-real な根 σ を持つことに注意して、代数学の (多項式に関する) 初等的な議論により、 $P(\xi', \sigma) = 0$ かつ $\xi' = \tau \xi' + \eta'$ として $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\eta' \in \mathbb{C}^{n-1}$ かつ条件 i) ~ iii) を満たすようにとれる。(η' は general position としてよい。) 証明は Hörmander [18] p. 143. 及び Appendix 参照。

- i) $P(\eta', \sigma) = 0$ は σ についての次数と
同いたけの単根をもつ。
- ii) $P_m(\xi', 0) \neq 0$ かつ $P_m(\exists c_0 \xi', 1) = 0$
但し、 $\text{Im } c_0 \neq 0$ (ここで、 $P_m(\xi', 0) \neq 0$
と座標軸をとっておいたことを用いた。)
- iii) $P(\tau \xi' + \eta', \sigma)$ は (τ, σ) の多項式とし

して既約.

従って "ここから" $\tau = w\sigma$ とすれば: 仮定より

$$P(w\sigma\xi' + \eta', \sigma) = 0 \quad \text{従って}$$

$$P_m(w\xi' + \eta'/\sigma, 1) + \frac{1}{\sigma} P_{m-1}(w\xi' + \eta'/\sigma, 1) \\ + \dots + \left(\frac{1}{\sigma}\right)^n P_0(w\xi' + \eta'/\sigma, 1) = 0$$

(P_j は P の j 次斉次な部分.) ここで:

条件 ii) により $P_m(w\xi', 1) \neq 0$, $P_m(0, 1) = 0$

故 $w = \sum_{j \geq 0} c_j (\sigma^{-1/p})^j$ と Puiseux 展開

される。(Hörmander [18] Appendix) 従って

$$\tau = \tau(\sigma) = \sigma \sum_{j \geq 0} c_j (\sigma^{-1/p})^j \quad \text{なる解を} \\ \left(|\sigma|^{1/p} \geq R \right)$$

$$P(\tau\xi' + \eta', \sigma) = 0 \quad \text{は持つ。}$$

2. 条件 iii) から (τ, σ) はある 連結な

Riemann 面を作っていることに注意しておく。

さて、 $\tau = \tau(\sigma)$ を上のような展開をもつもの
とすれば、 $|\tau|/|\sigma| \leq C$ 故.

$F(\sigma) \equiv W(\tau(\sigma)\xi' + \eta', \sigma, 0)$ と定める時.

$F(\sigma)$ は $|\sigma| > R^p$ で exponential type

である。更に $\operatorname{Im} c_0 \neq 0$ 故

$M|\xi'| |\operatorname{Im}(c_0 e^{i\theta})| < |\sin \theta|/3$ となる θ を見つけることができる。もちろんそのような θ はある open set 全体を動きうる。又 $|\operatorname{Re}(c_0 e^{i\theta})| \leq |c_0|$ 従って ε を十分小さくとれば

$|F(re^{i\theta})| \leq C e^{-r|\sin \theta|/3}$ から p. 180 の $|W(\xi', \sigma, 0)|$ に対する評価から成立する。しかるに上のような θ に対して、 $\theta + \pi$ も同じ条件を満たすことは明らかであり、しかも θ がある open set を動きうることから Phragmen-Lindelöf の定理により、 $|F|$ は $|\sigma^{-1/2}| > R$ で有界。従って $F(\sigma) = \sum_{j \geq 0} a_j (\sigma^{-1/2})^j$ しかるに

上の評価より F はある方向には exponential で decay するから、 $a_j \equiv 0$ ($\forall j$) でなければならぬ。従って $F(\sigma) \equiv 0$

しかるに $\{(\tau, \sigma) \mid \mathcal{P}(\tau\xi' + \eta', \sigma) = 0\}$ は連結な Riemann 面であることを注意しておいたから。結局、

$$\mathcal{P}(\tau\xi' + \eta', \sigma) = 0 \implies W(\tau\xi' + \eta', \sigma, 0) = 0$$

よって特に $\tau=0$ とし.

$$P(\eta', \sigma) = 0 \Rightarrow W(\eta', \sigma, x_n)$$

$$\left(\underset{\text{by def.}}{=} e^{i\sigma x_n} W(\eta', \sigma, 0) \right) = 0$$

一方, η' についての条件 1) (p. 181.) によ.

$P(\eta', \sigma)$ は η' を fix して σ について単根

$\sigma_1, \dots, \sigma_k$ をもつから,

$$R(\eta', \sigma_j, \sigma) = P(\eta', \sigma) - P(\eta', \sigma_j) / \sigma - \sigma_j$$

は次数がより小さい σ の多項式全体の

base になる. よって

$$W(\eta', \sigma, x_n) = R(\eta', \sigma_j, D_n) \hat{u}(\eta', x_n)$$

$$= 0 \text{ より } D_n^j \hat{u}(\eta', x_n) = 0 \quad (j < k)$$

特に $\hat{u}(\eta', x_n) = 0$ 此が general

position の η' ($\in \mathbb{C}^{n-1}$) について成立するから

$$\hat{u}(\eta', x_n) \equiv 0 \quad (\because x_n \text{ fix して } \hat{u}(\eta', x_n)$$

は η' について entire) 故に x_n を fix して

$$u(x', x_n) = 0 \quad \text{よって } u(x', x_n) \equiv 0.$$

x_n を fix して compact support (今更には強く

普通にある $\prod_{j=1}^{n-1} K_j$ の形の compact set 内に

support をもつとしてよい.) 従って $u(x', x_n)$

の定義函数 $\varphi(z', x_n)$ は $x_n \in {}^\exists I(\text{open}) (\subset \mathbb{R})$ に対して、たとえば z' 平面内で、正則となる。

($\because u(x', x_n) = 0$) 従って Cauchy の積分公式と一致の定理により、

$\varphi(z', x_n)$ は $-2 < x_n < 2$ において z' 平面内で正則、特に $u(x', x_n) = 0$ は n 変数の超函数として $\equiv 0$ 。

$$\therefore u(x', x_n) \equiv 0 \quad \text{in } \Omega$$

注意 $P_m(N) = 0$ だっただとしよう。このとき、もし $\exists N_j$ s.t. $N_j \rightarrow N$, $P_m(N_j) \neq 0$ かつ P は各 N_j について non-hyperbolic, となるなら、上の証明により定理は正しい。もしそうでなかったとすると、 $\Gamma(P, N_j) \equiv \overline{\{\mathcal{D} \mid P_m(\mathcal{D}) \neq 0\}}$ の N_j を含む成分) と定めると、これは open かつ convex, (双曲型多項式の一般論)。しかも $N \in [\Gamma(P, {}^\exists N_j)]^a$ であり、このような形の集合が N の近傍から $P_m(\xi) = 0$ なる部分をとってきた部分を含めつくすことになってしまう。これは、 $\Gamma(P, N_j)$ の凸性により、 $P_m(\xi)$ が ξ の一次函

数(実係数)の積に分解される場合にしか起り得ない。即ち定理で $P_m(N) \neq 0$ を落してもここ迄はしぼれる。上に除いた場合にも定理が成立するであろうことはもっともらしいが、未だ証明できない。

§5 Problem of unique continuation

(佐藤の基本定理の系について。)

この節の内容は、佐藤 [43] により得られた、基本定理から一連の一意的定理がたちどころに従うことを注意するのみで、特に original な部分はない。ただ、前節 4.5. の結果が、ある大域的な一意性定理を意味することに鑑み、又結果その物が成立つということ自身は重要であると考えらるるので、ここにまとめておく。

5.1. Holmgren の定理とその周辺

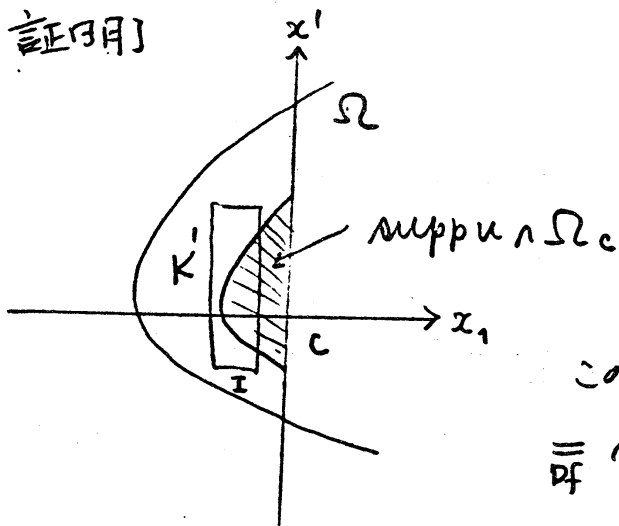
我々の理論の出発点となるのは、次の「佐藤の基本定理」である。

Th. 5.1.1. (佐藤) $P(x, D)$ を通常の偏微分作用素 (実解析的係数) かつ、考える領域 Ω 内で $P_m(x, (1, 0, \dots, 0)) \neq 0$ と仮定する。 (P_m : P の principal part) この時 $P(x, D)u = 0$ ($u \in \mathcal{B}(\Omega)$) を満たす u は、 x_1 を real analytic parameter とする。

証明は、佐藤 [43] を参照。

系 (Holmgren) Ω において $P_m(x, (1, 0, \dots, 0)) \neq 0$ と仮定する。この時、 $u \in B(\Omega)$ に對し、
 $P(\alpha, D)u = 0$ in $\Omega \cap \{x_1 < c\}$ ($\overline{\Omega}_c$)
 とし、更に、 $\text{supp } u \cap (\Omega \cap \{x_1 < c\})$
 が Ω 内で relatively compact とすれば、
 $u \equiv 0$ in $\Omega \cap \{x_1 < c\}$

証明]



今 $\varphi(x')$ を
 $x_2, \dots, x_m$ について
 の任意の正則
 函数とする、

この時、 $u(x_1, x') \varphi(x')$
 $\equiv v(x_1, x')$ を考えれば、

定理により、これは x_1 を real analytic な
 parameter とする。今 I を $\mathbb{R}^1$ の 開区間 と
 し、 $K' \supset \bigcup_{x_1 \in I} \text{supp}_{x'} u(x_1, x')$ 、但し、
 ここで $\text{supp}_{x'} u(x_1, x')$ とは、 $u(x_1, x')$
 を $x_1 = x_1$ に specialize して得た $(n-1)$ 変
 数の超函数の support の意であり、更に、
 $I \times K' \subset \Omega$ とする。この時、上に述べた
 事実から

$\theta(x_1) \equiv \int \cdots \int_{\substack{\text{---} \\ n-1}} v(x_1, x') dx'$ は real

analytic である。従って $\inf \{x_1 \mid$

$x_1 \in \text{pr}_1 \text{ supp } u\} \equiv c$ 。とて、 c の十分
小さな $(\mathbb{R}^1 \text{ での })$ 近傍 I において、 $\forall x_1 \in I$
に対し $\theta(x_1) \equiv 0$ ($\because x_1 < c$ ならば $\varphi(x_1)$
 $\equiv 0$ 故、一致の定理) 一方、仮定から $\forall c' < c$
に対し $\text{supp } u \cap \{x_1 \leq c'\}$ は有限個の
 $I \times K'$ 型の集合で覆われることにより、

$$\theta(x_1) \equiv 0 \quad (x_1 < c)$$

従って これが 任意の $\varphi(x')$ に対して成立つ
ことから (x_1 を fix して) $u(x_1, x') = 0$
($(n-1)$ 変数の超函数として。) ($\because K$ を $\mathbb{R}^n$
内の任意の compact set とする時、容易に
判るように、 $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ は $\mathcal{O}(K)$ で dense である。
たとえば、小松 [28] p. 203. 参照)

従って p. 185. と同様に $u(x) \equiv 0$ in Ω_c
(n 変数の超函数として。)

○ 最近、Schapira 氏も Holmgren の定理

を得た旨の手紙を受けとった。多分この形で証明されたのだと思う。但し、証明はもと Hörmander [18] (h.5. に近い物で"あろう。

これを通常の Holmgren 変換を用いて言い換えれば、

系' φ を real-valued の $C^\omega(\Omega)$ の函数とし、更に $P_m(x^0, \text{grad } \varphi(x^0)) \neq 0$ が $x^0 \in \Omega$ で満たされるなら、 x^0 の近傍 Ω' であって、 P の Ω での 超函数解 u で $\varphi(x) > \varphi(x^0)$ では 0 になっている物は 1/2 Ω' 全体で 0 になる、というような性質をもつ物が存在する。

証明はよく知られているから省略する。

更に この系から 次の二つの定理が成立すること、Hörmander [18] と全く同じである。証明については、Hörmander [18] p.126. ~ p.129. を参照。

Th. 5.1.2. $\varphi \in \text{real-valued}$ の $C^\omega(\Omega)$ の
 函数とし P は principal part が real
 coefficient であるとする。今 $x^0 \in \Omega$ に
 おいて $\text{grad } \varphi(x^0) \neq 0$, $P_m(x^0, N^0) = 0$
 であり更に

$$\sum_{j,k} \partial^2 \varphi(x^0) / \partial x_j \partial x_k P_m^{(j)}(x^0, N^0) \cdot$$

$$\times P_m^{(k)}(x^0, N^0) + \sum_k P_m^{(k)}(x^0, N^0) P_{m,k}(x^0, N^0)$$

> 0 が成立するとする。 $(P_m^{(j)})_{\overline{\partial f}} = \partial P_m / \partial \xi_j$,
 $P_{m,j} = \partial P_m / \partial x_j$) この時 x^0 は前系'
 に言う Ω' を持つ。

Th. 5.1.3 P を定数係数とする。この時

Ω_1, Ω_2 を 2つの 凸開集合, $(\Omega_1 \subset \Omega_2)$

とし $H_\xi \equiv \{ \langle x, \xi \rangle = 0 \}$ と定める時

$P_m(\xi) = 0$ なる任意の ξ に対して

$H_\xi \cap \Omega_2 \neq \emptyset \Rightarrow H_\xi \cap \Omega_1 \neq \emptyset$ が成立
 するならば、 $P(D)u = 0$, $u \in \mathcal{B}(\Omega_2)$
 かつ $u = 0$ in Ω_1 なる u は Ω_2 で恒等
 的に零となる。

尚、この方面では、次の Ideal Theorem が成立つかどうかは極めて興味深い問題であると考えられる。

Ideal Theorem: $P(x, D)u=0$, $P_m(x, (1, 0, \dots, 0)) \neq 0$ (原点の近傍で) この時、佐藤の基本定理 5.1.1. により u の $x_1=0$ への specialization $u(0, x')$, $\frac{\partial}{\partial x_1} u \Big|_{x_1=0}$, $\dots$, $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^n u \Big|_{x_1=0}$ が考えれる。もし、これらが、これらがすべて 0 であるなら、 u は原点のある近傍で 0 であるうか？

尚、これに関して、一般に、 $u(x_1, x')$ が x_1 を complex holomorphic parameter として u を、

$$\begin{aligned} \text{しかも、} \quad u(0, x') &= \frac{\partial}{\partial x_1} u \Big|_{x_1=0} = \dots = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^l u \Big|_{x_1=0} = \dots = 0 \quad (\forall l) \quad \text{と仮定} \end{aligned}$$

おり、しかも、 $u \neq 0$ なる例の存在することか佐藤先生により知られていることに注意しておく。(未発表) 従って上の Ideal Theorem

が成立するかどうかは、微分方程式論の立場から極めて重要である。

最後に、本論からはすれるが、Th. 5.1.1. は、いままで述べて来た所からもよく判るように、所謂 „time-like な curve 上での積分” の正則性とも密接に関係していることを注意しておく。それらに関する物は、残念ながらまだ、定理のための定理’ というべき物しか結果として得ていないので、ここには省略する。

④追加: (1970, 4) Ideal theorem は

Th. 5.1.1. から明らかに正しいことを柏原君に御注意頂きました。従って次の形に Th. 4.5.1 の結論を精密化できる。

Th. 4.5.1': Th. 4.5.1 の仮定のもとで、

$u|_{\langle x, N \rangle = 0}$ が compact support をもつなら

$u|_{\langle x, N \rangle = 0} \equiv 0$ が成立する。

文 献

- 1] G. Bengel , Régularité des solutions
hyperfonctions d'une équation
elliptique , C. R. Acad. Sc. Paris,
262 ('66) 569-570
- 2] J. Boman , On the propagation of
analyticity of solutions of differential
equations with constant coefficients ,
Ark. för Math. 5 ('64) 271-279
- 3] T. Carleman. L'intégrale de Fourier
et question qui s'y rattache
Uppsala ('44)
- 4] L. Ehrenpreis Mean periodic
functions I. Amer. J. of Math.
77 ('55) 293-328
- 5] ——— , General theory of

elliptic equations , Proc. Nat. Acad.
of Sci. 42 ('56) 39-41

6] ——— , Solutions of some
problems of division IV Amer. J. Math.
82 ('66) 522-588

7] ——— , ——— V
Ibid 84 ('62) 324-348

8] L. Gårding , linear hyperbolic
partial differential equations with
constant coefficients , Acta. Math.
85 ('50) 1-62

9] ——— , Hyperbolic convolution
operators (to appear)

10] ——— , 双曲型方程式の lacuna

について (to appear ; 東北セミナリ-1-1)

11] — et B. Malgrange, Opérateurs différentiels partiellement hypoellip. et partiellement elliptiques, Math. Scand. 9 ('61) 5-21.

12] R. Godement, Topologie algébrique et théorie des faisceaux, Hermann, Paris ('58)

13] H. Grauert, On Levi's problem and the imbedding of real analytic manifolds, Ann. Math., 68 ('58)
460-472

14] A. Grothendieck,

15] R. Harvey, Hyperfunctions and partial differential equations, Thesis, Stanford Univ.

16] L. Hörmander, On the division of distribution by polynomials, Ark. för Math. 3 (58) 555-568

17] ———, On the range of convolution operators, Ann. of Math. 76 (62) 148-170

18] ———, Linear Partial Differential Operators, Springer, Berlin, (63)

19] ———, L^2 -estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$ operator, Acta. Math. 113 (65) 89-152.

- 203 ———, An Introduction to
Complex Analysis in Several
Variables. Van Nostrand, Princeton,
('66)
- 213 一松 - 森口 - 宇田川, 数学公式Ⅱ
岩波, 東京, ('65 : 第5刷)
- 223 F. John, The fundamental sol.
of linear elliptic differential
equations with analytic coefficients,
Comm. P. A. M. 3 ('50) 273-304.
- 233 ———, Non-admissible data
for differential equations with
constant coefficients. ———, 10 ('57)
391-398
- 243 ———, Continuous dependence
on data for solutions of partial

equations with a prescribed bound
Comm. P. A. Math. 13 ('66) 551-585

25] M. Kashiwabara ; 数理解シンポジウム
報告集 ('69)

26] H. Komatsu , Projective and
injective limits of weakly
compact sequences of locally
convex spaces , J. of Math. Soc.
of Japan. 19 ('67) 366-383

27] ——— , Resolutions by
hyperfunctions of sheaves of
solutions of differential equations
with constant coefficients , Math.
Annalen , 176 ('68) 77-86.

28. ——— , 佐藤の超函数と定数
係数線形偏微分方程式 (東大セミナー・

1-1. 22) ('68)

29] E. Larsson, Generalized
Hyperbolicity, Ark. för. Math. 7.
('67)

30] J. Leray. Hyperbolic Differential
Equations, Princeton - Lecture Note
('52)

31] Levin. Distributions of zeros
of entire functions A.M.S. translation
Providence ('64)

32] E. Lindelöf, Sur les fonctions
entières d'ordre entier,
Ann. Sci. École Norm. Sup. 22 ('05)
369-395

33] B. Malgrange , Existence et
approximation des solutions des
équations aux dérivées partielles
et des équations de convolution,
Ann. Inst. Fourier, 6 ('55) 271-355

34] ——— , Faisceaux sur des
variétés analytiques réelles
Bull. Soc. Math. Fr. 83 ('57)
231-237

35] ——— , Sur la propagation
de la régularité des solutions des
équations à coefficients const.
Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys.
R. P. Roumanie 3. ('59) 433-440

36] A. Martineau , Les hyperfonctions
de M. Sata, Sémin. Bourbaki,
13 ('60) No. 214.

377] ———, Sur les fonctionelles
analytiques et la transformation
de Fourier-Borel, J. d'anal. Math.
9 ('63) 1-164

381] ———, Distribution et valeur
au bord des fonctions holomorphes
Proc. International Summer Course
at Lisbon. ('64)

393 F. Pham, Bros, et Itzykson,
Representations intégrales de
fonctions analytiques et formule
de Jost-Lehmann-Dyson, Ann. Inst.
Henri Poincaré, V ('66) 1-35.

401 G. Pólya, Untersuchungen
über Lücken und Singularitäten
von Potenzreihen, Math. Z. 29.
('29) 549-640

- 41] M. Sato, 超函数の理論について
数学 10-1 ('58) 1-27
- 42] ———, Theory of hyperfunctions
II. J. Fac. Sci. Univ. of Tokyo,
8 ('59) 387-436
- 43] ———, 層 $\mathcal{E}$ について.
堅田シンポジウム報告集 (to appear)
- 44] P. Schapira. Sur les ultradistributions
Ann. Éc. Norm. Sup 4^e série t. 1.
(1968) 395-415
- 45] ———, Équations aux
dérivées partielles dans l'espace
des hyperfonctions. Sem. P. Lelong
Springer Lecture Note 71 ('68)

463 ———, Elliptic boundary
value problems (to appear).

47] G. Valiron. Sur les solutions
des équations différentielles
linéaires d'ordre infini et à
coefficients constants, Ann. École
Norm. Sup. 46 ('29) 25-53.

48] H. Komatsu: Elliptic boundary
value problems ('69 函数解析

国際会議報告集)