

体上の群と群上の体

岡山大学理学部数学教室・田中 克己 (Katsumi Tanaka)
Department of Mathematics, Okayama University

平成 19 年 8 月 3 日

1 体上の群

体の言語 $\{., +, 0, 1\}$ で体 $K = \langle K, ., +, 0, 1 \rangle$ に対し、 K 上解釈可能な群についてはよく知られている。体 K 上の代数群、つまり、一般線形群 $GL(n, K)$ の閉部分群が代表例である。それは体 K 上群が解釈され。すなわち、ユニバースとして集合が K^{n^2} 上体の言語で定義可能で群の演算と単位元が体の言語で定義される。

2 群上の体

体を解釈する群についてはいくつか先行研究がある。Mal'cev [1] による Mal'cev 対応は、上三角行列のなす群 $UT(3, K)$ 上、体 K が解釈される。Morley ランク有限なベキ零でない連結可解群は代数閉体を解釈することが Zil'ber により示された、例えば [2] の Corollary 9.10。Nesin [2] による Morley ランク 2 のベキ零群上の体の解釈がある。

例 1 標数 p の代数的閉体 K をとる。 $K^2 \ni (a, b), (c, d)$ に対し

$$f(x, y) + f(x + y, z) = f(x, y + z) + f(y, z) \quad (1)$$

$$f(x, 0) = f(0, x) = 0 \quad (2)$$

をみたす 2-cocycle $f(x, y)$ に対し、

$$(a, b) \cdot (c, d) = (a + c, b + d + f(a, c))$$

と定義すると $(K^2, \cdot)$ はベキ零群となる。

上の群の上に体を解釈する。

$x, y, a, b \in K$ に対し、群の等式

$$[(a, 0), (x, 0)] = [(1, 0), (y, 0)] \quad (3)$$

$$[(1, 0), (x, 0)] = [(b, 0), (y, 0)] \quad (4)$$

を考えると、体の等式

$$f(a, x) - f(x, a) = f(1, y) - f(y, 1) \quad (5)$$

$$f(1, x) - f(x, 1) = f(b, y) - f(y, b) \quad (6)$$

を得る。

2.1 Nesin の解釈

ここでは、Nesin による Morley ランク 2 の連結ベキ零非アーベル群の中での体の解釈を紹介する。

K を標数 p の代数的閉体とする。

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & x^p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| x, y \in K \right\} \quad (7)$$

とおくと、群 G は上の性質を持つ。このとき、

$$G \cong \{(x, y) | x, y \in K\}$$

となる。ここで、2-cocycle を $f(x, y) = x^p y$ とする。

ここで、群 G の中心を $Z(G)$ で表すと、

$$Z(G) = \{(0, y) | y \in K\}$$

これより、 $G/Z(G)$ 上に体 K を解釈する。

まず、体の $+$ は群の演算で定義される。後は体の演算 $\times$ が定義可能であることを示す。

(5), (6) は、

$$ax^p - a^p x = y^p - y \quad (8)$$

$$x^p - x = y^p b - y b^p \quad (9)$$

となる。両式から y^p を消去して、

$$y = (b - b^p)^{-1} (x^p - x + b(xa^p - x^p a)) \quad (10)$$

となる。このことから、(8), (9) を同時にみたすのは、任意の x に対し、 y は高々一つである。

(10) を (8) に代入すると、

$$(1 - a^p b^p) x^{p^2} + g(a, b) x^p + (b - b^p)^{p-1} (1 - a^p b^p) x = 0 \quad (11)$$

の形になる。ここで $g(a, b)$ は代数関数。いま、左辺を x で微分すると、

$$(b - b^p)^{p-1} (1 - a^p b^p) \quad (12)$$

という多項式を得る。ここで、

$$(12) \neq 0 \iff a^p b^p \neq 1 \iff ab \neq 1$$

すなわち、

$$(8) \wedge (9) \text{ は解をちょうど } p^2 \text{ 個もつ} \iff ab \neq 1$$

したがって、体の $b = a^{-1}$ は群の言語で定義可能となる。

このとき、

$$x^2 = (x^{-1} - (1+x)^{-1})^{-1} - x$$

により、体の 2 乗演算は定義可能となる。

$p \neq 2$ のとき、

$$2xy = (x+y)^2 - x^2 - y^2$$

により、体上の写像 $(x, y) \mapsto 2xy$ は定義可能。

以上より、体の標数 p が 2 でないとき、体の $\times$ は定義可能となる。

$p = 2$ のとき、

$x \neq 0, y^{-1}$ に対して、

$$x^2y = (x^{-1} + (y^{-1} + x)^{-1})^{-1} + x$$

よって、写像 $h(x, y) \mapsto x^2y$ は定義可能。ここで、 $h(x, y^2) = x^2y^2$ となり、この平方根を取れば xy が定義可能となる。

2.2 新たな例

ここでは、Morley ランク 2 の連結ベキ零で非アーベル群で exponent が p で体を解釈する新たな例を与える。

例 2 K を標数 p の代数的閉体とする。

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a^p & 0 & \frac{1}{2}a & 0 & b \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}a \\ & & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 0 & a^p \\ & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \mid a, b \in K \right\} \quad (13)$$

とおくと、群 G は上の性質を持つ。このとき、

$$G \cong \{(x, y) \mid x, y \in K\}$$

となる。ここで、2-cocycle を $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^py - xy^p)$ とする。

いま、群 G の中心は

$$Z(G) = \{(0, y) \mid y \in K\}.$$

ここで、前の例と同様に連立方程式 (3), (4) を考えると、式 (8), (9) を得る。あとは Nesin の例と同様に $G/Z(G)$ 上に体 K が解釈される。

例 3 K を標数 3 の代数的閉体とする。

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 + a^3 & b \\ & 1 & 2a & a^2 \\ & & 1 & a \\ & & & 1 \end{pmatrix} \mid a, b \in K \right\} \quad (14)$$

とおくと、群 G は上の性質を持つ。このとき、

$$G \cong \{(x, y) \mid x, y \in K\}$$

となる。ここで、2-cocycle を $f(x, y) = x^3y + x^2y + xy^2$ とする。

いま、群 G の中心は

$$Z(G) = \{(0, y) | y \in K\}.$$

ここで、前の例と同様に連立方程式 (3), (4) を考えると、

$$a^3x - ax^3 = y - y^3 \quad (15)$$

$$x - x^3 = b^3y - by^3 \quad (16)$$

を得る。あとは Nesin の例と同様に $G/Z(G)$ 上に体 K が解釈される。ここで、群 G の exponent は 3^2 である。

参考文献

- [1] A.I. Mal'cev. A correspondence between groups and rings. *The Mathematics of Algebraic Systems, Collected Papers: 1936-1967*. North-Holland, 1971.
- [2] A. Borovik and A.Nesin. *Groups of Finite Morley Rank* Oxford, 1994.
- [3] K.Tanaka. Non-Abelian groups of Morley rank 2, *Mathematica Japonica*, Vol.33, No.4, 1988.