

不連続な境界値をもつ弱希薄気体のすべり流理論

田口智清（京都大学情報学研究科）

Satoshi Taguchi (Graduate School of Informatics, Kyoto University)

1 まえおき

気体の運動を考える．流れの代表的な長さに対して分子の平均自由行程が無視できない気体（希薄気体）の振舞いは、通常の流体力学では正しく記述できないことが知られている．希薄化効果を正確に捉えるためには気体を多数の分子の集まりと考え、その集団的、統計的振舞いとして流れを調べる方法がとられ、そのための基礎となる方程式に Boltzmann 方程式がある．Boltzmann 方程式は分子の速度分布関数（位相空間上の質量密度）を未知関数とする方程式であり、一般に解析の手間は小さくない．しかし分子の平均自由行程が流れの代表長さに対して相対的に小さい場合（軽度に希薄な気体）には、流れの巨視的変数に対する流体力学的方程式を Boltzmann 方程式から導出することができ、効率的な解析が実現できる．このように構築された弱希薄気体の一般論に一般化すべり流理論 [1, 2] がある．

以下では定常系に話を限る．一般化すべり流理論は、Boltzmann 方程式の境界値問題の微小なクヌーセン数¹による漸近解析に基礎をおいている．これまでの理論では境界値が物体にそって緩やかに変化することが仮定されており、そのため境界値が平均自由行程程度の空間尺度で急激に変化するような場合に適用できない．しかし近年注目されるヤヌス粒子 [3] や、クルックスのラジオメーター [4, 5] の羽の例のように、物体面上の境界値の急峻な変化が物体まわりの流れや物体の自己駆動力に大きく影響する系も存在する．このような場合を扱えるようにすべり流理論を拡張することは、理論的にも応用上も重要な課題と考えられる．本稿では筆者らの最近の研究内容 [6, 7] にもとづき、不連続な温度分布をもつ平行平板間の気体の振舞いに対する拡張されたすべり流理論を紹介する（2節および3節）．その後、得られたストークス方程式を解くことで、壁面温度の不連続によって平板間に生じる流れの様子を示す（4節）．

2 問題設定

本稿で考察する問題を述べ、続いて境界値問題として定式化する．

¹ 気体の希薄度はクヌーセン数とよばれる無次元量で特徴づけられる．クヌーセン数は分子の平均自由行程と流れの代表長さの比で定義され、軽度に希薄な気体ではクヌーセン数は小さい．

2.1 問題

3次元空間 (x_1, x_2, x_3) において, $x_1 = -\frac{\pi}{2}L$ および $x_1 = \frac{\pi}{2}L$ に位置する2枚の平行平板に挟まれた領域を考える (L は基準長さを表す定数). 領域内は希薄気体で満たされており, 気体は境界 $x_1 = \pm\frac{\pi}{2}L$ で平板と接している. 両平板の温度は共通で, その分布 T_w は x_3 に依存せず, $T_w = T_w(x_2)$ は次式で与えられるとする:

$$T_w(x_2) = \begin{cases} T_0(1 + \tau_w) & (x_2 > 0), \\ T_0(1 - \tau_w) & (x_2 < 0). \end{cases} \quad (1)$$

ここで T_0 は系の基準温度を表し, τ_w は定数である. すなわち壁面温度は $x_2 = 0$ において不連続な跳びをもつ. このとき領域内に生じる気体の定常的な振舞いを Boltzmann 方程式にもとづいて調べる. ただし解析にあたり以下の仮定をおく:

1. 気体領域から平板に入射した気体分子は拡散反射条件 [2] に従って気体領域中に出ていく.
2. $|\tau_w|$ の値は1より十分小さく Boltzmann 方程式と拡散反射境界条件は温度 T_0 , 密度 ρ_0 の基準静止平衡状態のまわりで線型化できる.

なお, 本問題におけるクヌーセン数 Kn は, 基準静止平衡状態における気体分子の平均自由行程を ℓ_0 を用いて $Kn = \ell_0/L$ により定義される.

2.2 基礎方程式

前節で述べた問題を境界値問題として定式化する. 以下, 適当な基準量 (長さ: L , 温度: T_0 , 密度: ρ_0) で無次元化した量を扱う. $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ を空間座標, $\boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^3$ を分子速度とし, $f = f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\zeta})$ を気体分子の速度分布関数とする. 基準静止平衡状態を表す絶対 Maxwell 分布を $M = \frac{1}{\pi^{3/2}} \exp(-|\boldsymbol{\zeta}|^2)$ とし, 分布 f の M からのずれを表す $\phi = (f - M)/M$ を導入する. このとき関数 $\phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\zeta})$ は次の線型化 Boltzmann 方程式と境界条件を満足する:

$$\boldsymbol{\zeta} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \phi = \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{L}(\phi), \quad -\frac{\pi}{2} < x_1 < \frac{\pi}{2}, \quad (2)$$

$$\text{bc: } \phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\zeta}) = 2\sqrt{\pi} \int_{\zeta_1 < 0} |\zeta_1| \phi M d\boldsymbol{\zeta} \pm (|\boldsymbol{\zeta}|^2 - 2)\tau_w, \quad \zeta_1 > 0 \quad \left(x_1 = -\frac{\pi}{2}, x_2 \geq 0\right), \quad (3)$$

$$\text{bc: } \phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\zeta}) = 2\sqrt{\pi} \int_{\zeta_1 > 0} |\zeta_1| \phi M d\boldsymbol{\zeta} \pm (|\boldsymbol{\zeta}|^2 - 2)\tau_w, \quad \zeta_1 < 0 \quad \left(x_1 = \frac{\pi}{2}, x_2 \geq 0\right). \quad (4)$$

ただし $\mathcal{L}(\phi)$ は次に述べる線型化衝突積分, ε はクヌーセン数に対応するパラメータ ($\varepsilon = \frac{\sqrt{\pi}}{2} Kn$) である.

線型化衝突積分作用素 $\mathcal{L}$ は次の形に書くことができる [2] :

$$\mathcal{L}(F) = \int_{(\zeta_*, e) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} M_*(F'_* + F' - F_* - F) \mathcal{B} d\Omega(e) d\zeta_*, \quad (5a)$$

$$F = F(\zeta), \quad F_* = F(\zeta_*), \quad F' = F(\zeta'), \quad F'_* = F(\zeta'_*), \quad (5b)$$

$$\zeta' = \zeta + [(\zeta_* - \zeta) \cdot e]e, \quad \zeta'_* = \zeta_* - [(\zeta_* - \zeta) \cdot e]e, \quad (5c)$$

$$\mathcal{B} = \mathcal{B} \left(\frac{|e \cdot (\zeta_* - \zeta)|}{|\zeta_* - \zeta|}, |\zeta_* - \zeta| \right), \quad M_* = \frac{1}{\pi^{3/2}} e^{-|\zeta_*|^2}. \quad (5d)$$

ここで $d\Omega(e)$ は e 方向の立体角素, $\mathcal{B}$ は非負の値をとる関数でその関数形は分子間力に応じて定まる. 例えば剛体球分子に対しては $\mathcal{B} = \frac{1}{4\sqrt{2}\pi} |e \cdot (\zeta_* - \zeta)|$ である.

続いて気体の巨視量を導入する. ϕ は静止平衡状態からのずれを表すので, 対応する巨視量もずれの量を考える. $f = M$ に対応する密度, 流速, 温度, 圧力はそれぞれ 1, $\mathbf{0}$, 1, 1 であり, そこからのずれとして密度 $\omega = \omega(\mathbf{x})$, 流速 $u_i = u_i(\mathbf{x})$ ($i = 1, 2, 3$), 温度 $\tau = \tau(\mathbf{x})$, 圧力 $P = P(\mathbf{x})$ を導入すると, それらは ϕ のモーメントとして次のように表される:

$$\omega = \langle \phi \rangle, \quad u_i = \langle \zeta_i \phi \rangle, \quad \tau = \frac{2}{3} \left\langle \left(|\zeta|^2 - \frac{3}{2} \right) \phi \right\rangle, \quad P = \frac{2}{3} \langle |\zeta|^2 \phi \rangle. \quad (6)$$

ここで記号 $\langle \cdot \rangle$ は

$$\langle F \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} F(\zeta) M d\zeta, \quad (7)$$

を表す. なお, P , ω , τ の間には

$$P = \omega + \tau. \quad (8)$$

の関係があり, これは線型化された理想気体の状態方程式を表す. ω , u_i , τ , P はずれの量であり, 元の有次元の密度, 流速, 温度, 圧力は $\rho_0(1 + \omega)$, $(2RT_0)^{1/2}u_i$, $T_0(1 + \tau)$, $\rho_0RT_0(1 + P)$ で与えられることに注意する. ただし R は単位質量あたりの気体定数である.

以下の議論においては, ϕ は x_3 に依存せず, かつ ζ_3 に関して偶関数であると仮定する. さらに解 ϕ は $x_2 = 0$ に対して対称で, $x_1 = 0$ に関して反対称であることを仮定する. すなわち

$$\begin{cases} \phi(x_1, x_2, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \phi(-x_1, x_2, -\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3), \\ \phi(x_1, x_2, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = -\phi(x_1, -x_2, \zeta_1, -\zeta_2, \zeta_3). \end{cases} \quad (9)$$

これらの仮定は考えている方程式と境界条件に矛盾しない. また, ϕ は ζ_3 に関して偶であるため u_3 は恒等的にゼロである.

次節では境界値問題 (2)–(4) をパラメータ ε が小さいとして漸近解析することで, ϕ の漸近的挙動を調べ, 対応する巨視量が従う流体力学的方程式と境界条件を明らかにする.

3 漸近解析

境界値問題 (2)–(4) に対して ε を微小パラメータとする漸近解析を行う。

3.1 空間変化の穏やかな解とストークス方程式系

境界条件はさておき、線型化 Boltzmann 方程式 (2) の解で空間変化が穏やかなものを考える。すなわち、空間微分に対する条件

$$\frac{\partial \phi_H}{\partial x_i} = O(\phi_H), \quad (10)$$

を満たす解を探す。この解をヒルベルト解と呼び、他の解と区別するため添字 H を付けて表す。なお、本節では ϕ_H が x_3 に依存しないことを陽に使わない（次節以降の議論では、本節で得られた結果で $\partial \phi_H / \partial x_3 = 0$, $u_{3H0} = 0$ 等とすればよい）。 ϕ_H を ε のべき級数（ヒルベルト展開と呼ばれる）の形で求める：

$$\phi_H^\varepsilon = \phi_{H0} + \varepsilon \phi_{H1} + \varepsilon^2 \phi_{H2} + \cdots. \quad (11)$$

ϕ_H の展開に応じて各巨視量も ε で展開される：

$$h^\varepsilon = h_{H0} + \varepsilon h_{H1} + \varepsilon^2 h_{H2} + \cdots \quad (h = \omega, u_i, \tau, P). \quad (12)$$

ただし

$$\omega_{Hm} = \langle \phi_{Hm} \rangle, \quad u_{iHm} = \langle \zeta_i \phi_{Hm} \rangle, \quad \tau_{Hm} = \frac{2}{3} \left\langle \left(|\zeta|^2 - \frac{3}{2} \right) \phi_{Hm} \right\rangle, \quad P_{Hm} = \omega_{Hm} + \tau_{Hm}, \quad (13)$$

($m = 0, 1, \dots$)。展開 (11) を方程式 (2)（ただし $\phi = \phi_H$ ）に代入することで、問題は次の積分方程式の列に帰着される：

$$\mathcal{L}(\phi_{H0}) = 0, \quad (14)$$

$$\mathcal{L}(\phi_{Hm}) = \zeta_i \frac{\partial \phi_{Hm-1}}{\partial x_i}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (15)$$

方程式 (14) の解は衝突和不変量である 1 , ζ_i , $|\zeta|^2$ の線型結合で与えられるが、さらに ϕ_{H0} と巨視量 h_{H0} との関係を考慮することにより ϕ_{H0} は次の形に整理される：

$$\phi_{H0} = P_{H0} + 2u_{iH0}\zeta_i + \left(|\zeta|^2 - \frac{5}{2} \right) \tau_{H0}. \quad (16)$$

ここで P_{H0} , u_{iH0} , τ_{H0} は $\mathbf{x}$ の未定関数である。

次に方程式 (15) を考えると, ϕ_{Hm} ($m \geq 1$) に対する方程式が解をもつための可解条件は

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left\langle \zeta_j \begin{bmatrix} 1 \\ \zeta_i \\ |\zeta|^2 \end{bmatrix} \phi_{Hm-1} \right\rangle = 0, \quad (17)$$

である. 可解条件が満足されるとき, ϕ_{Hm} は次の形に表される:

$$\phi_{Hm} = P_{Hm} + 2u_{iHm}\zeta_i + \left(|\zeta|^2 - \frac{5}{2}\right) \tau_{Hm} + g_m. \quad (18)$$

ここで P_{Hm} , u_{iHm} , τ_{Hm} は $\mathbf{x}$ の未定関数, $g_m = g_m(\mathbf{x}, \zeta)$ は方程式 (15) の解のうち直交条件 $\int_{\mathbb{R}^3} (1, \zeta_i, |\zeta|^2) g_m M d\zeta = 0$ を満足するものである. ϕ_{H1} の具体形を本節の最後に示す.

可解条件 (17) は次の流体力学的方程式 (ストークス方程式系) [1, 2] を与える:

$$\frac{\partial P_{H0}}{\partial x_i} = 0, \quad (19)$$

$$\frac{\partial u_{Hmi}}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial P_{Hm+1}}{\partial x_i} - \gamma_1 \frac{\partial^2 u_{iHm}}{\partial x_j^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \tau_{Hm}}{\partial x_j^2} = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (20)$$

ただし γ_1 は積分方程式 $\mathcal{L} \left[(\zeta_i \zeta_j - \frac{|\zeta|^2}{3} \delta_{ij}) B(|\zeta|) \right] = -2 \left(\zeta_i \zeta_j - \frac{|\zeta|^2}{3} \delta_{ij} \right)$ の解である関数 $B = B(|\zeta|)$ を用いて積分

$$\gamma_1 = \frac{2}{15} \langle |\zeta|^4 B \rangle, \quad (21)$$

によって定まる定数である. 式 (20) の第 1 式は流速に対するソレノイダル条件, 第 2 式は γ_1 を粘性係数とみなすことで定常ストークス方程式に一致する. 第 3 式は温度場に対するラプラス方程式である. なお, 密度 ω_{Hm} は圧力 P_{Hm} と温度 τ_{Hm} から $\omega_{Hm} = P_{Hm} - \tau_{Hm}$ により与えられる.

最後に ϕ_{H1} の具体的な表式を示す. P_{H1} , u_{iH1} , τ_{H1} , u_{iH0} , τ_{H0} が流体力学的方程式を満足するとすると,

$$\phi_{H1} = P_{H1} + 2u_{jH1}\zeta_j + \left(|\zeta|^2 - \frac{5}{2}\right) \tau_{H1} - \frac{1}{2} \zeta_i \zeta_j B \left(\frac{\partial u_{iH0}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{jH0}}{\partial x_i} \right) - \zeta_j A \frac{\partial \tau_{H0}}{\partial x_j}. \quad (22)$$

ここで B は前段落で導入されたものであり, $A = A(|\zeta|)$ は次の積分方程式の解である:

$$\mathcal{L}(\zeta_i A(|\zeta|)) = -\zeta_i \left(|\zeta|^2 - \frac{5}{2} \right), \quad \text{付帯条件} \quad \int_0^\infty |\zeta|^4 A M d|\zeta| = 0. \quad (23)$$

3.2 クヌーセン領域

ここまで境界条件のことは触れずにきた. 本節では, 前節で求めたヒルベルト解が境界条件を満足するかを吟味する. 以下では左側の境界 $x_1 = -\frac{\pi}{2}$ を主として議論するが, 右側の境界 $x_1 = \frac{\pi}{2}$ も同じ扱いである.

改めて ϕ をべき級数 $\phi^\varepsilon = \phi_{(0)} + \varepsilon\phi_{(1)} + \dots$ に展開すると、初項 $\phi_{(0)}$ が満足する境界条件は、

$$\begin{aligned} \phi_{(0)}(x_1, x_2, \zeta) &= 2\sqrt{\pi} \int_{\zeta_1 < 0} |\zeta_1| \phi_{(0)}(x_1, x_2, \zeta) M d\zeta \\ &\quad \pm (|\zeta|^2 - 2)\tau_w, \quad \zeta_1 > 0 \quad \left(x_1 = -\frac{\pi}{2}, x_2 \geq 0\right), \end{aligned} \quad (24)$$

とかける。今、 ϕ_{H0} に含まれる $u_{iH0}(x_1, x_2)$ および $\tau_{H0}(x_1, x_2)$ の境界での値が

$$u_{iH0}\left(-\frac{\pi}{2}, x_2\right) = 0, \quad i = 1, 2, \quad \tau_{H0}\left(-\frac{\pi}{2}, x_2\right) = \pm\tau_w \quad (x_2 \geq 0), \quad (25)$$

であると仮定する。このとき $\phi_{(0)} = \phi_{H0}$ が $x_2 = 0$ を除く各点で (24) を満足することはすぐに確かめられる。逆に $\phi_{(0)} = \phi_{H0}$ が境界条件 (24) を満足するためには (25) が成り立たなければならない。

(25) の u_{iH0} に対する条件は、流速が壁面速度と一致するという、いわゆる粘着の条件を表す。もう一方の τ_{H0} に対する条件は気体温度が壁面温度と一致する跳びなしの条件である。

実際に (25) のもとで、方程式 (19) および (20) (ただし $m = 0$) の解を求めると、次の表式が得られる：

$$\begin{cases} P_{H0} = \text{const}, & u_{iH0} = 0, \\ \tau_{H0} = \frac{\tau_w}{\pi} \arg\left(\frac{1 + \sin z}{1 - \sin z}\right), & z = x_1 + ix_2. \end{cases} \quad (26)$$

ただし i は虚数単位である。これを (16) に代入すると、ヒルベルト解の主要部 ϕ_{H0} が

$$\begin{aligned} \phi_{H0}(x_1, x_2, \zeta) &= \tau_{H0}(x_1, x_2) \left(|\zeta|^2 - \frac{5}{2}\right) \\ &= \frac{\tau_w}{\pi} \arg\left(\frac{1 + \sin z}{1 - \sin z}\right) \left(|\zeta|^2 - \frac{5}{2}\right), \quad z = x_1 + ix_2, \end{aligned} \quad (27)$$

と求まる。ただし ϕ_H の x_2 に関する反対称性 (9) を考慮して $P_{H0} = 0$ とした。

不連続点 $(x_1, x_2) = (-\frac{\pi}{2}, 0)$ 近傍における ϕ_{H0} の振舞いを詳しく観るために、 τ_{H0} を不連続点のまわりでテイラー展開する。不連続点を中心とする極座標 (r, θ) を導入すると次の表式を得る：

$$\begin{cases} \tau_{H0} = \tau_w \left(\frac{2}{\pi}\theta + \frac{r^2}{6\pi} \sin(2\theta) + O(r^4)\right), \\ r = \sqrt{\left(x_1 + \frac{\pi}{2}\right)^2 + x_2^2}, \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{x_2}{x_1 + \frac{\pi}{2}}\right), \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (28)$$

この表式より τ_{H0} の不連続点への極限值は θ に依存することがわかる。その結果、 ϕ_{H0} の空間微分 $\partial\phi_{H0}/\partial x_i$ ($i = 1, 2$) の大きさは不連続点に近づくにつれ際限なく増大し、ヒル

ベルト解としての ϕ_{H0} は不連続点近傍で破綻する．そこで ϕ_{H0} を不連続点近傍で局所的に修正する．この不連続点近傍の解の空間変化が急激な領域をクヌーセン領域と呼ぶ．

具体的には不連続点の近傍で解が ε 程度の空間尺度で変化することを仮定し，そのような解を ϕ_Z と表す．空間変数

$$X = \frac{x_1 + \frac{\pi}{2}}{\varepsilon}, \quad Y = \frac{x_2}{\varepsilon}, \quad (29)$$

を導入し $\phi_Z = \phi_Z(X, Y, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ と表すと， ϕ_Z は方程式

$$\zeta_1 \frac{\partial \phi_Z}{\partial X} + \zeta_2 \frac{\partial \phi_Z}{\partial Y} = \mathcal{L}(\phi_Z), \quad (30)$$

を満たす．さらに ϕ_Z を ε のべき級数

$$\phi_Z^\varepsilon = \phi_{Z0} + \varepsilon \phi_{Z1} + \varepsilon^2 \phi_{Z2} + \cdots, \quad (31)$$

に展開し初項 $\phi_{Z0} = \phi_{Z0}(X, Y, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ を考える．すると ϕ_{Z0} は次の方程式と壁面上の境界条件を満足する：

$$\zeta_1 \frac{\partial \phi_{Z0}}{\partial X} + \zeta_2 \frac{\partial \phi_{Z0}}{\partial Y} = \mathcal{L}(\phi_{Z0}) \quad (0 < X < \infty, -\infty < Y < \infty), \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \phi_{Z0}(X, Y, \zeta) &= 2\sqrt{\pi} \int_{\zeta_1 < 0} |\zeta_1| \phi_{Z0}(X, Y, \zeta) M d\zeta \\ &\pm (|\zeta|^2 - 2)\tau_w, \quad \zeta_1 > 0 \quad (X = 0, Y \geq 0). \end{aligned} \quad (33)$$

これは線型化 Boltzmann 方程式の半空間問題であり，遠方において ϕ_{Z0} が満たす条件は， ϕ_{Z0} と ϕ_{H0} の接続を考えることで導かれる²．すなわち，

$$\phi_{Z0} \rightarrow \frac{2\tau_w}{\pi} \left(|\zeta|^2 - \frac{5}{2} \right) \theta \quad \text{as} \quad \eta = \sqrt{X^2 + Y^2} \rightarrow \infty. \quad (34)$$

ただし $\theta = \tan^{-1}(\frac{Y}{X})$ ($-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$) である．

境界値問題 (32)–(34) の解は数値的に求めるが，その前に遠方で解の空間変化の尺度が大きくなることを利用して遠方における ϕ_{Z0} の漸近形を調べておくことができ，その結果次の表式が得られる³：

$$\begin{aligned} \phi_{Z0}(X, Y, \zeta) &\rightarrow \frac{2\tau_w \Gamma}{\eta} \zeta_r \sin(2\theta) + \frac{2\tau_w}{\pi} \left(|\zeta|^2 - \frac{5}{2} \right) \left(\theta - \frac{c_1^{(0)}}{\eta} \sin \theta \right) \\ &- \frac{2\tau_w}{\pi} \left(\frac{\zeta_\theta}{\eta} A(|\zeta|) + \frac{1}{Y} \varphi_1^{(0)}(X, \zeta_1, |\bar{\zeta}|) \right) \quad \text{as} \quad \eta = \sqrt{X^2 + Y^2} \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (35)$$

$$\zeta_r = \zeta_1 \cos \theta + \zeta_2 \sin \theta, \quad \zeta_\theta = -\zeta_1 \sin \theta + \zeta_2 \cos \theta, \quad \theta = \tan^{-1} \left(\frac{Y}{X} \right), \quad (36)$$

$$\bar{\zeta} = \zeta - \zeta_1 \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)^T. \quad (37)$$

² $r \ll 1$ かつ $\varepsilon^{-1}r \gg 1$ なる点を考える．

³ここでは境界条件が滑らかな場合の漸近理論 [1, 2] を利用することができる．

ここで Γ および $c_1^{(0)}$ はある定数, 関数 $A(|\zeta|)$ は既出 [式 (23)], 関数 $\varphi_1^{(0)}(X, \zeta_1, |\bar{\zeta}|)$ は次の境界値問題の解である:

$$\begin{cases} \zeta_1 \frac{\partial \varphi_1^{(0)}}{\partial X} = \mathcal{L}(\varphi_1^{(0)}), & 0 < X < \infty, \\ \varphi_1^{(0)}(X, \zeta_1, |\bar{\zeta}|) = -(|\zeta|^2 - 2)c_1^{(0)} + \zeta_1 A(|\zeta|) \\ \quad + 4\pi^{3/2} \int_0^\infty \int_{-\infty}^0 |\zeta_1| |\bar{\zeta}| \varphi_1^{(0)}(X, \zeta_1, |\bar{\zeta}|) M d\zeta_1 d|\bar{\zeta}|, & \zeta_1 > 0, \quad X = 0, \\ \varphi_1^{(0)} \rightarrow 0 & \text{as } X \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (38)$$

この境界値問題に関して, 境界条件に含まれる定数 $c_1^{(0)}$ がある特定の値をとるときに限り解が存在することが知られており, $c_1^{(0)}$ は温度跳び (temperature jump) の係数とよばれている⁴. なお, この性質は Grad-Bardos の定理 [1, 8, 9] によって数学的に示されている. 定数 Γ は境界値問題 (32), (33), (35) (あるいは (34)) の解と同時に決まるもので, 衝突項に BGK モデル [10, 11, 2] を用いた予備計算では $\Gamma > 0$ であることが示唆されている [7].

3.3 クヌーセン層

続いてクヌーセン領域を除く領域において ε オーダーの項を考える. 知られているとおりヒルベルト解 ϕ_H は初項 ϕ_{H0} を除いて拡散反射境界条件を満足する自由度がない (ϕ_{H1} に対しては (22) の右辺の最後の項がゼロでないことによる). さしあたってクヌーセン領域の解 ϕ_Z との重なりが生じないと考え, 文献 [12, 1, 2] の方法により境界条件を満足する解をもとめる⁵. 具体的には解を次の形におく:

$$\phi = \phi_H + \phi_K. \quad (39)$$

ここで ϕ_K はヒルベルト解に対する境界近傍における補正 (クヌーセン層補正) で, 平板 ($x_1 = -\pi/2$) 近傍においてのみ有意な値をもつ. ϕ_K の空間変化の尺度は次のように仮定する:

$$\frac{\partial \phi_K}{\partial x_1} = O\left(\frac{\phi_K}{\varepsilon}\right) \quad \text{および} \quad \frac{\partial \phi_K}{\partial x_2} = O(\phi_K). \quad (40)$$

すなわち ϕ_K は壁面に垂直な方向に ε 程度の尺度で変化し, 壁面に沿う方向には緩やかに変化する. 事前に (29) で導入した座標 $X = \frac{x_1 + \frac{\pi}{2}}{\varepsilon}$ を使って $\phi_K = \phi_K(X, x_2, \zeta)$ と表し, さらに ε のべき級数

$$\phi_K^\varepsilon = \varepsilon \phi_{K1} + \varepsilon^2 \phi_{K2} + \cdots, \quad (41)$$

⁴ $c_1^{(0)}$ の数値は [1, 2] に掲載されている. ただし $c_1^{(0)}$ (本稿) = d_1 (文献 [1, 2]) である.

⁵ クヌーセン領域に近づくとき重なりが生じるが, 接合漸近展開の過程で解をつなぐことができる.

に展開し、初項 ϕ_{K1} に対する方程式と境界条件を導くと、空間 1 次元の線型化 Boltzmann 方程式の半無限境界値問題が得られる。この問題の解析より、 u_{iH1} および τ_{H1} に対する境界条件が導かれる。

クヌーセン層補正解析の結果の要点をまとめる。

1. 補正 ϕ_{K1} の表式：

$$\phi_{K1}(X, x_2, \zeta) = \left(\frac{\partial \tau_{H0}}{\partial x_1}(x_1, x_2) \right) \bigg|_{x_1 = -\frac{\pi}{2}} \varphi_1^{(0)}(X, \zeta_1, |\bar{\zeta}|), \quad 0 < X < \infty, \quad x_2 \neq 0, \quad (42)$$

ただし $\varphi_1^{(0)}$ は前出の境界値問題 (38) の解である。

2. u_{iH1} および τ_{H1} が境界 $x_1 = -\frac{\pi}{2}$ 上（ただし $x_2 \neq 0$ ）で満足する条件：

$$\begin{cases} u_{iH1}\left(-\frac{\pi}{2}, x_2\right) = 0, & i = 1, 2, \\ \tau_{H1}\left(-\frac{\pi}{2}, x_2\right) = c_1^{(0)} \left(\frac{\partial \tau_{H0}}{\partial x_1}(x_1, x_2) \right) \bigg|_{x_1 = -\frac{\pi}{2}}. \end{cases} \quad (43)$$

ただし $c_1^{(0)}$ は境界値問題 (38) に現れる定数である。

(43) の一段目の条件は u_{iH1} に対する粘着の条件である。一方、二段目の条件は境界上における気体温度が壁面温度からずれることを表しており、跳びの条件といわれる（脚注 4 参照）。なお、クヌーセン層補正を与える $\varphi_1^{(0)}$ は $X \rightarrow \infty$ のとき X の任意の逆べきより速く減衰する [1]。

3.4 湧き出し吸い込み条件

最後に、 $\phi = \phi_{H0} + \varepsilon(\phi_{H1} + \phi_{K1}) + O(\varepsilon^2)$ と $\phi = \phi_{Z0} + O(\varepsilon)$ の接続を考慮すると⁶、 $\phi_{H1} + \phi_{K1}$ に対する接続条件は

$$\begin{aligned} \phi_{H1} + \phi_{K1} \rightarrow & \frac{2\tau_w \Gamma}{r} \zeta_r \sin(2\theta) - \frac{2\tau_w}{\pi} \left(|\zeta|^2 - \frac{5}{2} \right) \frac{c_1^{(0)}}{r} \sin \theta \\ & - \frac{2\tau_w}{\pi} \frac{\zeta_\theta}{r} A(|\zeta|) - \frac{2\tau_w}{\pi} \frac{1}{x_2} \varphi_1^{(0)} \left(\frac{x_1 + \frac{\pi}{2}}{\varepsilon}, \zeta_1, |\bar{\zeta}| \right), \quad \text{as } r \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (44)$$

とかける。ここで $r = \sqrt{(x_1 + \frac{\pi}{2})^2 + x_2^2} = \varepsilon \eta$, $\theta = \tan^{-1}(\frac{x_2}{x_1 + \frac{\pi}{2}})$ は不連続点を中心とする極座標であり、 $\varphi_1^{(0)}$ の第 1 引数では (29) を考慮した。一方、(42), (28) からクヌーセン層補正に関する次の漸近形が得られる：

$$\phi_{K1} \rightarrow -\frac{2\tau_w}{\pi} \frac{1}{x_2} \varphi_1^{(0)} \left(\frac{x_1 + \frac{\pi}{2}}{\varepsilon}, \zeta_1, |\bar{\zeta}| \right), \quad \text{as } r \rightarrow 0. \quad (45)$$

⁶脚注 2 参照。

したがってヒルベルト解部分に対しては, (44), (45) より

$$\phi_{H1} \rightarrow \frac{2\tau_w\Gamma}{r}\zeta_r \sin(2\theta) - \frac{2\tau_w}{\pi} \left(|\zeta|^2 - \frac{5}{2} \right) \frac{c_1^{(0)}}{r} \sin\theta - \frac{2\tau_2}{\pi} \frac{\zeta_\theta}{r} A(|\zeta|), \quad \text{as } r \rightarrow 0. \quad (46)$$

(46) に $\zeta_r M$ または $\zeta_\theta M$ を乗じた後, それぞれについて ζ に関して積分すると流速に対する条件

$$u_{rH1} \rightarrow \frac{\tau_w\Gamma}{r} \sin(2\theta), \quad u_{\theta H1} \rightarrow 0, \quad \text{as } r \rightarrow 0, \quad (47)$$

が得られる. ただし, $(u_{rH1}, u_{\theta H1})$ は $\mathbf{u}_{H1} = (u_{1H1}, u_{2H1})$ の (r, θ) 方向成分

$$u_{rH1} = u_{1H1} \cos\theta + u_{2H1} \sin\theta, \quad u_{\theta H1} = -u_{1H1} \sin\theta + u_{2H1} \cos\theta, \quad (48)$$

である. (47) は不連続点から湧き出す流れ ($0 < \theta < \pi/2$) と不連続点に吸い込まれる流れ ($-\pi/2 < \theta < 0$) を表しており, 不連続点近傍の流速 u_{iH1} の振舞いに対する一つの条件を与えている.

以上をまとめると, 2 平板間の領域を満たす気体の ε オーダーの流速 u_{iH1} ($u_{3H1} = 0$) の振舞いは以下のストークス方程式と湧き出し吸い込み条件によって記述される:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_{1H1}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_{2H1}}{\partial x_2} = 0, & \frac{\partial P_{H2}}{\partial x_i} - \gamma_1 \Delta u_{iH1} = 0 \quad (i = 1, 2), \quad -\frac{\pi}{2} < x_1 < \frac{\pi}{2}, \\ u_{1H1} = u_{2H1} = 0 & \left(x_1 = \mp \frac{\pi}{2}, \quad x_2 \neq 0 \right), \\ (u_{1H1}, u_{2H1}) \rightarrow \frac{2\tau_w\Gamma x_2(x_1 + \frac{\pi}{2})}{r^4} \left(x_1 + \frac{\pi}{2}, x_2 \right), & \text{as } r = \sqrt{(x_1 + \frac{\pi}{2})^2 + x_2^2} \rightarrow 0, \\ (u_{1H1}, u_{2H1}) \rightarrow \frac{2\tau_w\Gamma x_2(\frac{\pi}{2} - x_1)}{r^4} \left(x_1 - \frac{\pi}{2}, x_2 \right), & \text{as } r = \sqrt{(x_1 - \frac{\pi}{2})^2 + x_2^2} \rightarrow 0. \end{cases} \quad (49)$$

ただし $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ である.

4 壁面温度の不連続によって生じる流れ: ストークス方程式の解

本節では, ストークス方程式の境界値問題 (49) の解を求めることで, 平板間の流れの様子を調べる.

4.1 準備

xy 平面上で定義された関数 $\phi(x, y)$ に対する重調和方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 \phi(x, y) = -\delta''(x)\delta(y) + \delta(x)\delta''(y), \quad (50)$$

を考える．ここで δ は Dirac のデルタ関数である．なお， (r, θ) を (x, y) の極座標とすると， ϕ は原点近傍で

$$\phi \rightarrow -\frac{1}{4\pi} \cos 2\theta \quad (r \rightarrow 0), \quad (51)$$

のように振舞う．

ϕ の変数 y に関する Fourier 変換を $G(x, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x, y) e^{i\omega y} dy$ と表すと，

$$G(x, \omega) = -\frac{1}{2} |x| e^{-|x||\omega|}, \quad (52)$$

と求められる．

4.2 ストークス方程式の境界値問題

以下では $a = \frac{\pi}{2}$ とする．次の問題を考える．

問題 1 2次元平面上の帯状領域 $D = \{(x, y) \mid -a < x < a, -\infty < y < \infty\}$ において関数 $\psi(x, y)$ に対する次の境界値問題を考える：

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 \psi(x, y) = 0, & (x, y) \in D, \\ \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 & (x = -a, \quad y \neq 0), \quad \psi \rightarrow -\frac{1}{4\pi} \frac{(x+a)^2 - y^2}{(x+a)^2 + y^2} \quad \text{as } (x+a)^2 + y^2 \rightarrow 0, \\ \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 & (x = +a, \quad y \neq 0), \quad \psi \rightarrow \frac{1}{4\pi} \frac{(x-a)^2 - y^2}{(x-a)^2 + y^2} \quad \text{as } (x-a)^2 + y^2 \rightarrow 0. \end{cases} \quad (53)$$

ストークス方程式を満たす 2次元流速場の流れ関数は重調和関数であり，境界値問題 (49) を満たす (u_{1H1}, u_{2H1}) は次の関係によって ψ から求められる：

$$u_{1H1} = 2\pi\tau_w\Gamma \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad u_{2H1} = -2\pi\tau_w\Gamma \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (54)$$

流れ関数を求めるために境界上での特異性を分離したい．そこで問題 1 の解 ψ を次の境界値問題（問題 2）の解 $\phi = \phi(x, y)$ の $b \nearrow a$ の極限として求める．すなわち，

問題 2 $b \in \mathbb{R}$ は $0 < b < a$ を満たすとする．2次元平面上の帯状領域 $D = \{(x, y) \mid -a < x < a, -\infty < y < \infty\}$ において $\phi(x, y)$ に対する次の境界値問題を考える：

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 \phi(x, y) = -\delta''(x+b)\delta(y) + \delta(x+b)\delta''(y) \\ \quad + \delta''(x-b)\delta(y) - \delta(x-b)\delta''(y), & (x, y) \in D, \\ \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 & (x = \pm a). \end{cases} \quad (55)$$

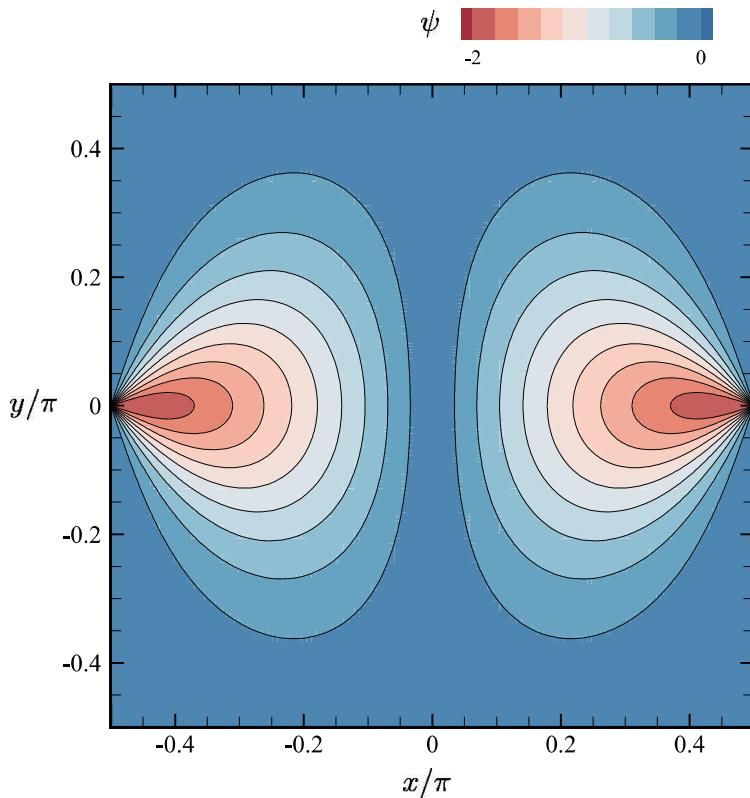


図 1: 流れ関数 ψ の等値線 (流線). $\tau_w > 0$, $\Gamma > 0$ の場合, 流れの向きは左半面 ($-\frac{\pi}{2} < x < 0$) では時計回り, 右半面 ($0 < x < \frac{\pi}{2}$) では反時計回りである.

ϕ の変数 y に関する Fourier 変換を $\hat{\phi}$ と表し, 方程式 (55) に Fourier 変換を施すと

$$\frac{\partial^4 \hat{\phi}}{\partial x^4} - 2\omega^2 \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial x^2} + \omega^4 \hat{\phi} = -\delta''(x+b) - \omega^2 \delta(x+b) + \delta''(x-b) + \omega^2 \delta(x-b). \quad (56)$$

この微分方程式の一般解は, 前節の結果を利用することで次式で与えられる:

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(x, \omega) = & C_1 \cosh(\omega x) + C_2 \sinh(\omega x) + C_3 x \cosh(\omega x) + C_4 x \sinh(\omega x) \\ & - \frac{1}{2}|x+b|e^{-|x+b||\omega|} + \frac{1}{2}|x-b|e^{-|x-b||\omega|}. \end{aligned} \quad (57)$$

ただし C_1, C_2, C_3, C_4 は積分定数で x によらない. 一方, ϕ の境界条件より,

$$\hat{\phi} = \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} = 0 \quad (x = \pm a). \quad (58)$$

条件 (58) を満たすように (C_1, C_2, C_3, C_4) を決めると, $\hat{\phi}$ は次式のように求まる:

$$\begin{aligned}\hat{\phi}(x, \omega) = & \frac{1}{2} |x - b| e^{-|x-b||\omega|} - \frac{1}{2} |b + x| e^{-|b+x||\omega|} \\ & - \frac{b(1 + 2a|\omega| + e^{-2a|\omega|}) \cosh(b\omega) - 2a^2|\omega| \sinh(b|\omega|)}{2a|\omega| - \sinh(2a|\omega|)} \sinh(x|\omega|) \\ & + \frac{(1 - 2a|\omega| - e^{-2a|\omega|}) \sinh(b|\omega|) + 2b|\omega| \cosh(b\omega)}{2a|\omega| - \sinh(2a|\omega|)} x \cosh(x\omega),\end{aligned}\quad (59)$$

最後に $b \rightarrow a$ とすると,

$$\begin{aligned}\hat{\psi}(x, \omega) = & \frac{1}{2} |x - a| e^{-|x-a||\omega|} - \frac{1}{2} |a + x| e^{-|a+x||\omega|} \\ & - \frac{a(1 + 2a|\omega| + e^{-2a|\omega|}) \cosh(a\omega) - 2a^2|\omega| \sinh(a|\omega|)}{2a|\omega| - \sinh(2a|\omega|)} \sinh(x|\omega|) \\ & + \frac{(1 - 2a|\omega| - e^{-2a|\omega|}) \sinh(a|\omega|) + 2a|\omega| \cosh(a\omega)}{2a|\omega| - \sinh(2a|\omega|)} x \cosh(x\omega),\end{aligned}\quad (60)$$

を得る. なお, $x = \pm a$ において $\hat{\psi} = 0$, $\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} = -1$ であることから,

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\delta(y) \quad (x = \pm a), \quad (61)$$

が確かめられる. 最後に ψ の表式は

$$\begin{aligned}\psi(x, y) = & \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-\frac{\pi}{2}\omega} \left[\frac{\pi}{2} \sinh(x\omega) - x \cosh(x\omega) \right] \cos(\omega y) d\omega \\ & + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[-\frac{\pi}{2} \frac{(1 + \pi\omega + e^{-\pi\omega}) \cosh(\frac{\pi}{2}\omega) - \pi\omega \sinh(\frac{\pi}{2}\omega)}{\pi\omega - \sinh(\pi\omega)} \sinh(x\omega) \right. \\ & \left. + \frac{(1 - \pi\omega - e^{-\pi\omega}) \sinh(\frac{\pi}{2}\omega) + \pi\omega \cosh(\frac{\pi}{2}\omega)}{\pi\omega - \sinh(\pi\omega)} x \cosh(x\omega) \right] \cos(\omega y) d\omega.\end{aligned}\quad (62)$$

ただし $a = \frac{\pi}{2}$ を代入した. $\psi(x, y)$ の等値線を図 1 に示す. これは $\mathbf{u}_{H1} = (u_{1H1}, u_{2H1})$ の流線を与える. $\tau_w > 0$, $\Gamma > 0$ の場合, 流れの向きは左半面 $(-\frac{\pi}{2} < x < 0)$ では時計回り, 右半面 $(0 < x < \frac{\pi}{2})$ では反時計回りである. 壁面温度の不連続によって駆動された流れが領域内で循環する様子がわかる.

謝辞

本研究は JSPS 科研費 JP22K03924 の助成を受けたものです.

参考文献

- [1] Y. Sone. *Kinetic Theory and Fluid Dynamics*. Birkhäuser, Boston, 2002. Supplementary Notes and Errata: Kyoto University Research Information Repository (<http://hdl.handle.net/2433/66099>).
- [2] Y. Sone. *Molecular Gas Dynamics: Theory, Techniques, and Applications*. Birkhäuser, Boston, 2007. Supplementary Notes and Errata: Kyoto University Research Information Repository (<http://hdl.handle.net/2433/66098>).
- [3] T. Baier, S. Tiwari, S. Shrestha, A. Klar, and S. Hardt. Thermophoresis of Janus particles at large Knudsen numbers. *Phys. Rev. Fluids*, 3:094202, 2018.
- [4] A. Ketsdever, N. Gimelshein, S. Gimelshein, and N. Selden. Radiometric phenomena: From the 19th to the 21st century. *Vacuum*, 86:1644–1662, 2012.
- [5] S. Taguchi and K. Aoki. Rarefied gas flow around a sharp edge induced by a temperature field. *J. Fluid Mech.*, 694:191–224, 2012.
- [6] S. Taguchi and T. Tsuji. On the motion of slightly rarefied gas induced by a discontinuous surface temperature. *J. Fluid Mech.*, 897:A16, 2020.
- [7] S. Taguchi and T. Tsuji. A generalized slip-flow theory for a slightly rarefied gas flow induced by discontinuous wall temperature. In F. Salvarani, editor, *Recent Advances in Kinetic Equations and Applications*, pages 327–344, Cham, 2021. Springer International Publishing.
- [8] C. Bardos, R. E. Caflisch, and B. Nicolaenko. The Milne and Kramers problems for the Boltzmann equation of a hard sphere gas. *Commun. Pure Appl. Math.*, 39(3):323–352, 1986.
- [9] F. Coron, F. Golse, and C. Sulem. A classification of well-posed kinetic layer problems. *Commun. Pure Appl. Math.*, 41(4):409–435, 1988.
- [10] P. L. Bhatnagar, E. P. Gross, and M. Krook. A model for collision processes in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems. *Phys. Rev.*, 94:511–525, 1954.
- [11] P. Welander. On the temperature jump in a rarefied gas. *Ark. Fys.*, 7:507–553, 1954.
- [12] Y. Sone. Asymptotic theory of flow of rarefied gas over a smooth boundary I. In L. Trilling and H. Y. Wachman, editors, *Rarefied Gas Dynamics*, volume 1, pages 243–253, New York, 1969. Academic Press.