

可換代数におけるグレブナー基底の果たす役割

大杉英史 (Hidefumi Ohsugi, 阪大理)

日比孝之 (Takayuki Hibi, 阪大理)

最初に断わって置くけど、本稿の題目は「可換代数におけるグレブナー基底の果たす役割」であって「可換代数における／グレブナー基底の果たす役割」とは違う。可換代数や代数幾何の研究者の間でグレブナー基底が騒がれ始めたのは1980年代後半、Dave Bayer と Mike Stillman による Macintosh 上で動く物凄いソフト 'Macaulay' が現れた頃であつたらうか。ちょうど1987年6月に Berkeley の数学研究所 (MSRI) で可換代数の研究集会が開催された際、Bayer と Stillman が 'Macaulay' の実演をし、多くの参加者の興味を誘った。本稿では研究集会の講演に沿って [Oh-Hi] の結果とその背景について簡単に解説する。吉川敦教授の目論んだ研究集会の主旨に合致するか否かは甚だ疑わしいけれども、環論屋が扱うグレブナー基底の理論的な魅惑の一端を披露できれば幸いである。

本稿で配置と言うときには、空間 $\mathbf{R}^d$ における有限個の整数点の集合を意味する。配置 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset \mathbf{Z}^d$ があつたとき、各々の a_j を d 項縦ベクトル $a_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{dj})^t$ と思ひ (t は転置行列) $a_1, a_2, \dots, a_n$ を列ベクトルとする d 行 n 列の整数行列 $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq d; 1 \leq j \leq n}$ を考え、 $Ab = 0$ となる n 項縦ベクトル $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)^t$ の全体を $\text{Ker}(A)$ と表す。このとき、 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d) \in \mathbf{C}^d$ をパラメーターとする未知函数 f の偏微分方程式系

$$(*) \quad \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \frac{\partial}{\partial x_j} - \alpha_i \right) f = 0, \quad i = 1, 2, \dots, d$$

$$\left(\prod_{b_j > 0} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)^{b_j} - \prod_{b_j < 0} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)^{-b_j} \right) f = 0, \quad b \in \text{Ker}(A) \cap \mathbf{Z}^n$$

を GKZ-超幾何方程式系と呼ぶ。その背景などについては [G-K-Z] を参照されたい。たとえば、

$$B_2^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

とすると、その GKZ-超幾何方程式系は

$$\left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + x_4 \frac{\partial}{\partial x_4} - \alpha_1 \right) f = 0$$

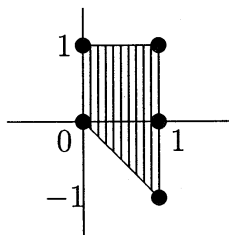
$$\begin{aligned}
\left(x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_4 \frac{\partial}{\partial x_4} - \alpha_2\right) f &= 0 \\
\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right) \left(\frac{\partial}{\partial x_4}\right)\right) f &= 0 \\
\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right) - \left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\right) f &= 0 \\
\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) - \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right) \left(\frac{\partial}{\partial x_4}\right)\right) f &= 0
\end{aligned}$$

である.

定理([G-K-Z], [G-G-P]). パラメーター $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d) \in \mathbf{C}^d$ が generic ならば (*) の解空間の次元は $\mathbf{R}^d$ の $n+1$ 個の点の集合 $\{0, a_1, a_2, \dots, a_n\}$ の凸閉包の正規化体積に一致する. 但し, 0 は $\mathbf{R}^d$ の原点である. ■

筆者らはGKZ-超幾何方程式系 (のみならず偏微分方程式) については全くの素人であるが, 超幾何函数の専門家に尋ねた所, この定理が成立するには行列 A についての若干の代数的条件を仮定する必要があるとのことである. それは忖置き, 筆者らにとってこの定理は「配置 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset \mathbf{Z}^d$ があつたとき, それに原点を添加した配置 $\{0, a_1, a_2, \dots, a_n\}$ の $\mathbf{R}^d$ における凸閉包の正規化体積を計算せよ」という離散的な問題を考える上手い切っ掛け (つまり「なんで原点をつけるんだ?」と尋問されたときの都合の良い返答) になる. なお, 正規化体積とは通常の体積に次元の階乗を掛けた非負整数値であると (厳密には違うけれど) 思っても差し障りはない. たとえば, 前掲の $\mathbf{B}_2^+$ ならば, 定理で言う凸閉包は

(#)



となり, その正規化体積は3である.

次に, $d+1$ 行 $n+1$ 列の行列 $\tilde{A}$ を

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & A & \\ \hline 1 & 1 & \dots & 1 \end{array} \right]$$

と置く. 多項式環 $\mathbf{C}[t_0, t_1, \dots, t_n]$ を考え, $b = (b_0, b_1, b_2, \dots, b_n)^t \in \mathbf{Z}^{n+1}$ が $\tilde{A}b = 0$ の全体を動くとき, 二項式

$$g_b = \prod_{b_j > 0} t_j^{b_j} - \prod_{b_j < 0} t_j^{-b_j}$$

が生成する $\mathbf{C}[t_0, t_1, \dots, t_n]$ のイデアルを I_A で表し, A のトーリックイデアルと呼ぶ. 再度, $\mathbf{B}_2^+$ を考えると, $I_{\mathbf{B}_2^+}$ は 3 個の二項式 $t_1^2 - t_3 t_4, t_1 t_2 - t_0 t_3, t_0 t_1 - t_2 t_4$ で生成される.

さて, $\mathbf{C}[t_0, t_1, \dots, t_n]$ の単項式順序 $<$ による I_A のイニシャルイデアル (とグレブナー基底) を扱う. 必要な事柄のみを簡潔に述べると, 単項式順序とは $\mathbf{C}[t_0, t_1, \dots, t_n]$ の単項式の全体 $\{\prod_{j=0}^n t_j^{b_j}; 0 \leq b_j \in \mathbf{Z}\}$ における線型順序 $<$ であって, 条件

(あ) 任意の単項式 $u \neq 1$ について, $1 < u$ であり,

(い) 単項式 u, v, w について, $u < v$ ならば $uw < vw$ である

を満たすものである. そのような単項式順序 $<$ を一つ固定し, 二項式 $g_b = \prod_{b_j > 0} t_j^{b_j} - \prod_{b_j < 0} t_j^{-b_j} \in I_A$ に現れる二つの単項式 $\prod_{b_j > 0} t_j^{b_j}$ と $\prod_{b_j < 0} t_j^{-b_j}$ について $<$ に関して大きい方を $g_b^{(+)}$ で, 小さい方を $g_b^{(-)}$ で表す. このとき, 単項式 $g_b^{(+)}$, $\tilde{A}b = 0$, の全体が生成する $\mathbf{C}[t_0, t_1, \dots, t_n]$ の単項式イデアルを $in_{<}(I_A)$ で表し, I_A の $<$ に関するイニシャルイデアルと呼ぶ. もちろん, $in_{<}(I_A)$ は有限生成であるから, 有限個の単項式 $g_{b_1}^{(+)}, g_{b_2}^{(+)}, \dots, g_{b_s}^{(+)}$ を選んで

$$in_{<}(I_A) = (g_{b_1}^{(+)}, g_{b_2}^{(+)}, \dots, g_{b_s}^{(+)})$$

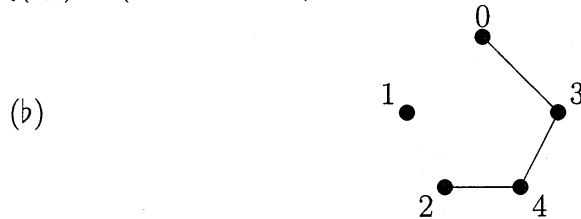
とできる. このとき,

$$g_{b_1}, g_{b_2}, \dots, g_{b_s}$$

を I_A の $<$ に関するグレブナー基底と呼ぶのである. グレブナー基底の顕著な性質を論ずることは扱置き, 我々にとっては $in_{<}(I_A)$ の生成系 $g_{b_1}^{(+)}, g_{b_2}^{(+)}, \dots, g_{b_s}^{(+)}$ が重要である. 可換代数の研究者にとって, とりわけ興味深い状況は $in_{<}(I_A)$ が squarefree

な二次単項式 (つまり $t_i t_j$, $i \neq j$) で生成されるときである. その可換環論的な背景については[H]などを参照して貰うとして, 組合せ論的な興味の背景に触れよう.

いま, $in_{<}(I_A)$ が squarefree な二次単項式で生成されると仮定し, 有限集合 $V = \{0, 1, \dots, n\}$ 上の有限グラフ $G(in_{<}(I_A))$ でその辺集合が $E = \{\{i, j\}; i \neq j, t_i t_j \in in_{<}(I_A)\}$ であるものを考える. 前掲の B_2^+ で単項式順序として $t_1 < t_2 < t_0 < t_3 < t_4$ から導かれる逆辞書式順序を考えると, $in_{<}(I_A) = (t_3 t_4, t_0 t_3, t_2 t_4)$ となり, それに対応する有限グラフは



である. 一般に, 有限グラフ G があつたとき, その頂点集合の部分集合 W が独立集合であるとは, W に属する任意の異なる頂点 i と j が G の辺で結ばれていないときに言う. 独立集合のなかで包含関係で極大なものを極大独立集合と呼ぶ. 有限グラフ (b) では極大独立集合は 3 個あり, この個数は凸閉包 ($\sharp$) の正規化体積に一致する. このことは偶然ではなく, $in_{<}(I_A)$ が squarefree な二次単項式で生成されるならば, 有限グラフ $G(in_{<}(I_A))$ の極大独立集合の個数は $\mathbf{R}^d$ の $n+1$ 個の点の集合 $\{0, a_1, a_2, \dots, a_n\}$ の凸閉包の正規化体積に一致する. すると, $in_{<}(I_A)$ が squarefree な二次単項式で生成される状況では, GKZ-超幾何方程式系 (*) の解空間の次元は有限グラフ $G(in_{<}(I_A))$ の極大独立集合の数え上げに帰着する.

ところで, [G-G-P]ではA型根系 A_{n-1} のすべての正根から成る配置

$$A_{n-1}^+ = \{e_i - e_j; 1 \leq i < j \leq n\}$$

を考察し, それに原点を添加した集合の凸閉包の正規化体積がカタラン数 $\binom{2n-2}{n-1}/n$ に一致することを示した. 但し, e_i は $\mathbf{R}^n$ の i 番目の単位座標ベクトルである. (根系については[Hum]を参照されたい.) 彼らの仕事の本質は逆辞書式順序を適当に選ぶと $in_{<}(I_{A_{n-1}^+})$ が squarefree な二次単項式で生成されることを示したことである. (便宜上, 配置とそれに属する整数点を列ベクトルとする行列は同じ記号で表すことにする.) その仕事に刺激され, 他の根系 (B型, C型, D型, BC型) を考えるのは自然なことである. それらを列挙すると,

$$\begin{aligned} D_n^+ &= A_{n-1}^+ \cup \{e_i + e_j; 1 \leq i < j \leq n\}; \\ B_n^+ &= D_n^+ \cup \{e_i; 1 \leq i \leq n\}; \\ C_n^+ &= D_n^+ \cup \{2e_i; 1 \leq i \leq n\}; \\ BC_n^+ &= B_n^+ \cup C_n^+ \end{aligned}$$

である.

定理([Oh-Hi]). 配置 Ψ は B_n^+ , C_n^+ , D_n^+ または BC_n^+ であるとする. このとき, 逆辞書式順序を適当に選ぶと Ψ のトーリックイデアルのイニシャルイデアルは squarefree な二次単項式で生成される. ■

参考文献

- [G-G-P] I. M. Gel'fand, M. I. Graev and A. Postnikov, Combinatorics of hypergeometric functions associated with positive roots, in "Arnold-Gelfand Mathematics Seminars, Geometry and Singularity Theory" (V. I. Arnold, I. M. Gelfand, M. Smirnov and V. S. Retakh, Eds.), Birkhäuser, Boston, 1997, pp. 205 – 221.
- [G-K-Z] I. M. Gel'fand, M. M. Kapranov and A. V. Zelevinsky, Hypergeometric functions and toric varieties, *Funct. Anal. and Its Appl.* **23** (1989), 12 – 26.
- [H] 日比孝之, グレブナー基底と可換環, 数学のたのしみ, No. 11, 1999年, pp. 49 – 60.
- [Hum] J. E. Humphreys, "Introduction to Lie Algebras and Representation Theory," Second Printing, Revised, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972.
- [Oh-Hi] H. Ohsugi and T. Hibi, Quadratic initial ideals of root systems, submitted.