

Generic Bifurcations of Varieties I.

奈良女子大 理 泉 屋 周一

Shuichi Izumiya

§0. 序

$f: (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ を C^∞ -写像芽とする時, 任意の $u \in (\mathbb{R}^r, 0)$ に対して, "variety" の芽 $f_u^{-1}(0)$ が定まる. ただし, $f_u(x) = f(x, u)$ と定義する. 本稿では, $f_u^{-1}(0)$ の分岐に関していくつかの結果を紹介する.

定義 1. $f, g: (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ を C^∞ -写像芽とする. f, g が P - $\mathcal{K}$ -equivalent (resp. S.P- $\mathcal{K}$ -equivalent) とは, $(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, 0)$ からそれ自身の上への diffeo 芽で $\Phi(x, u) = (\phi(x, u), \psi(u))$ (resp. $\Phi(x, u) = (\phi(x, u), u)$) の形をした物が存在して, $\Phi^*(\mathcal{I}(f)) = \mathcal{I}(g)$ をみたす事である. ここで, $\mathcal{I}(f)$ は, $f_1, \dots, f_p$ で生成される局所環 $C_0^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r) = \{h \mid h: (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, 0) \rightarrow \mathbb{R}: C^\infty\text{-函数芽}\}$ のイデアルをあらわす. ただし, $f = (f_1, \dots, f_p)$ とする.

定義 2. $f: (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ について,

$\pi_f: (f^{-1}(0), 0) \rightarrow (\mathbb{R}^r, 0) \quad ; \quad \pi_f(x, u) = u$ を f の

分岐写像芽とよぶ.

さらに, $f, g: (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ に対して π_f, π_g が $\mathcal{A}$ -equivalent とは, $(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, 0)$ からそれ自身への diffeo 芽 Φ で, $\Phi(f(0)) = g(0)$ をみたすものと, $(\mathbb{R}^r, 0)$ からそれ自身の上の diffeo 芽 ϕ が存在して, $\phi \circ \pi_f = \pi_g \circ \Phi$ をみたすこととする.

注意, 定義からあきらかに, f, g が $\mathcal{E}\text{-}\mathcal{K}$ -equivalent の時 π_f と π_g は $\mathcal{A}$ -equivalent である. さらに, $\mathcal{A}$ -equivalent class が π_f の等高線の位置と形を記述するので, それは, π_f の等高線即ち, $f^{-1}(0)$ の分岐を記述する.

さて, 純粋な幾何学的興味以外の Motivations について, いくつかの例を挙げる.

1) $f: (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$ という $\mathcal{C}^0$ -写像芽に対して, $\frac{dx}{dt} = f(x, u)$ という径数付き常微分方程式系を考える, この方程式の定常解とは $\frac{dx}{dt} = 0$ (即ち $f(x, u) = 0$) という集合 $\{(x, u)\}$ の事である.

2) m 種の商品があるとして, $P = (P_1, \dots, P_m)$ とそれぞれの価格とすると, 価格 P に対して, 超過需要関数 $f(P) = (f_1(P), \dots, f_m(P))$ が定まるか. Debreu [1] によると, f は smooth にしてよい. 今, $f(P_0) = 0$ となる点 $P_0 = (P_{01}, \dots, P_{0m})$ が均衡価格である. 従って, 他の外力が加った経済状態における均衡価格

が、ちょうど径数付けられた写像芽 $f: (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ の "varieties" $f^{-1}(0)$ の点である。

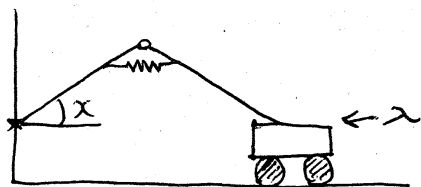
その他、偏微分方程式の解の分岐の研究や、Legendre 特異点の研究への応用の可能性もある。

§1. Simple example.

ここでは、Golubitsky - Scheffer [2] に従って、PK-equivalence theory の応用について、簡単な例をあげて解説する。残念ながら、経済学への応用は今のところ見出されていないので、弾性に関する例をあげる。

両端で圧縮力を受ける細棒の挙動をモデル化してみる。

今、以下の図の様なシステムを考える。



ここで、バネは2本の剛い棒を真直ぐに保とうとしている
バネの "弾性係数" を適当にとると、このシステムのポテンシャル・エネルギーは

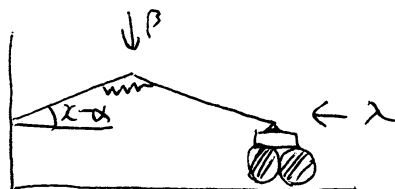
$$V = \frac{1}{2}x^2 + 2\lambda \cos x$$

であたえられる。このシステムが釣り合っているとすると、
equilibrium condition

$$\frac{\partial V}{\partial x} = x - 2\lambda \sin x = 0 \quad \text{--- (*)}$$

があたえられる。

さて、このシステムに、上から β の力を加えると。



上図の状況になる。このときのポテンシャル・エネルギーは

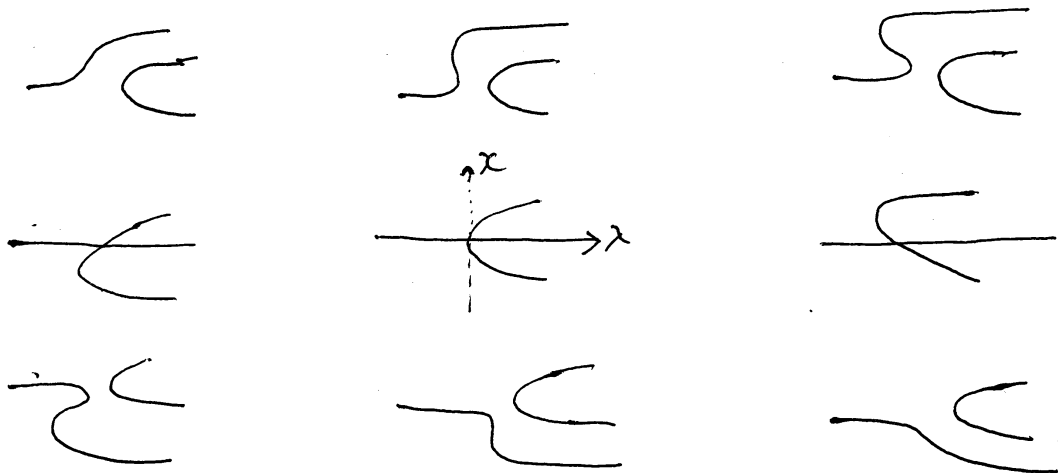
$$V = \frac{1}{2}(x-\alpha)^2 + 2\lambda \cos x + \beta \sin x$$

があたえられ、さらに、equilibrium condition は、4次以上の項を無視すると、

$$\frac{1}{3}\lambda x^3 - \frac{1}{2}\beta x^2 + (1-2\lambda)x + (\beta-\alpha) = 0 \quad \text{--- (**)}$$

で与えられる。

このシステムは、理想的には $x^3 - \lambda x$ とその universal unfolding $x^3 + \beta x^2 - \lambda x + \alpha$ で実現される。この、 α 、 β を動かして、解の分岐を図示すると。



となる.

さて, このシステムは, E.C. Zeeman [3]によって, Catastrophe理論の応用として説明されているが, ここでは, それについて試みよう.

上記のように, $x^3 - \lambda x = 0$ というシステムの perturbation には, α, β という2変数が必要であるが, Zeeman の議論では1変数で良いことになっている. それは以下の様に解釈される. このシステムをあるべきポテンシャルは

$$V_\lambda(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}\lambda x^2$$

であるが, この函数を $\frac{1}{4}x^4$ の1変数変型とみてやる. この時, 初等カタストロフ理論によると, $\frac{x^4}{4}$ は codimension 2 であり, その universal unfolding (右同値に対する) は

$$\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}\lambda x^2 + bx$$

である.

即ち, このポテンシャルの equilibrium condition

$$x^3 - \lambda x + b = 0$$

が, $x^3 - \lambda x = 0$ というシステムの universal な perturbation であると Zeeman は主張している.

事実,

$$x^3 - \lambda x + \beta x^2 = 0 \quad \text{--- (1)}$$

としよう. $x^3 - \lambda x = 0$ の perturbation を考えてみると,

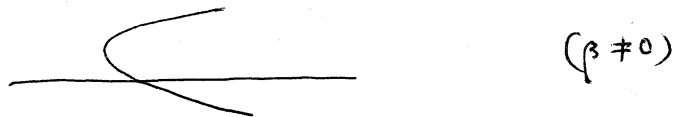
$$(\star) \begin{cases} X = \lambda + \frac{1}{3}\beta \\ \Lambda = \lambda + \frac{1}{3}\beta^2 \\ \alpha = \frac{1}{3}\lambda\beta + \frac{2}{27}\beta^3 \end{cases}$$

と変換してやると, (1) は

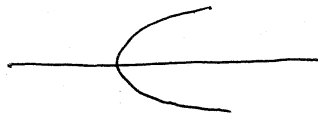
$$X^3 - \Lambda X + \alpha = 0 \quad \text{--- (2)}$$

になる.

ところが, ここで, (1) の分岐状態を図示すると



となり, また, (2) の分岐状態を図示すると



となる. これらの分岐状態はあきらかに異なっている. これは, $(\star)$ という変数変換の時に, β と λ を mix して変換したためにおこったのである. β と λ を mix して変換してよいというのは, 初等カタストロフ理論を採用した事により保障されている. この様に, 種々の分岐問題を研究するにあたり, 本質的にそのシステムに名まれているパラメータ (この場合は λ にあたる) と perturb するパラメータを区別した, モデルを構成する必要がある.

82. 分類結果

この節では、径数付けられた写像芽の P - K -同値による、部分的分類の結果を報告する。証明は、この研究集会の性格上、いっさいあげない。

$\mathbb{C}^n$ -写像芽 $f: (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ に対して、

$$df_x: T_0 \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r \rightarrow T_0 \mathbb{R}^p \quad df_x(v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_r) = \left(\sum_{i=1}^m v_i \frac{\partial f^l}{\partial x_i} \right),$$

$$df_u: T_0 \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r \rightarrow T_0 \mathbb{R}^p \quad df_u(v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_r) = \left(\sum_{j=1}^r w_j \frac{\partial f^l}{\partial u_j} \right)$$

($l=1, \dots, p$) で定義する。さらに $df_u^K: \ker df_x \rightarrow \operatorname{Coker} df_x$

$$\text{と } df_u^K = \pi \circ df_u|_{\ker df_x} \quad (\pi: T_0 \mathbb{R}^p \rightarrow \operatorname{Coker} df_x: \text{canonical projection})$$

で定義する。

定義3. f が原点において Σ_s^k -型であるとは、

$$\operatorname{rank}(df_x) = \min(m, p) - k, \quad \operatorname{rank}(df_u^K) = \min(r, p - \operatorname{rank}(df_x)) - s$$

である事とする。さらに f が原点で Σ_0^0 -型の時、 f は非特異であるという。

以下の定理は、 P - K -同値に対応する複函数定理である。

定理4. $f: (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ を非特異 $\mathbb{C}^n$ -写像芽とする。

1) $m \geq p$ のとき、 f は $(x_1, \dots, x_m, u_1, \dots, u_r) \mapsto (x_1, \dots, x_p)$ に

s - P - K -同値

2) $m < p$ かつ $r \leq p - m$ のとき、 f は $(x_1, \dots, x_m, u_1, \dots, u_r)$

$\mapsto (x_1, \dots, x_m, u_1, \dots, u_r, 0, \dots, 0)$ に P - K -同値。

3) $m < p$ か $r > p-m$ のとき, f は $(x_1, \dots, x_m, u_1, \dots, u_r) \mapsto (x_1, \dots, x_m, u_1, \dots, u_{p-m})$ に P - $\mathcal{K}$ -同値.

この定理により, 非特異な写像芽は分類が終った. しかもこれらの Varieties は原点で分岐しないこともわかる. 従って原点が特異点となる写像芽の分類が問題である.

Notations: $C_0^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r) = \{f \mid f: (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, 0) \rightarrow \mathbb{R} : C^\infty\}$: 局所環
 $m_{\mathbb{C}^p} = \{f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r) \mid f(0) = 0\}$: $C_0^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r)$ の maximal イデアル
 $C_0^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r; \mathbb{R}^p) \ni g_1, \dots, g_k$ に対して,

$\langle g_1, \dots, g_k \rangle_{C_0^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r)}$: $g_1, \dots, g_k$ で生成される $C_0^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r)$ -加群.

また, $C_0^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r; \mathbb{R}^p) = \{f : (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, 0) \rightarrow \mathbb{R}^p : C^\infty\text{-写像芽}\}.$

この時, C^∞ -写像芽 $f : (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ に対して,

$$T_e(P\text{-}\mathcal{K})(f) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m} \right\rangle_{C_0^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r)} + \left\langle \frac{\partial f}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial u_r} \right\rangle_{C_0^\infty(\mathbb{R}^r)} + I(f) C_0^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r; \mathbb{R}^p)$$

とみる.

定義5. $f : (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ を C^∞ -写像芽とする時,

$$P\text{-}\mathcal{K}\text{-codim}(f) = \dim_{\mathbb{R}} C_0^\infty(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r; \mathbb{R}^p) / T_e(P\text{-}\mathcal{K})(f)$$

を f の $P\text{-}\mathcal{K}\text{-codimension}$ と呼ぶ.

ここでは, $r=1$ の場合に, $P\text{-}\mathcal{K}\text{-codimension}$ が4以下のものの分類結果を報告する. $P\text{-}\mathcal{K}\text{-codimension}$ を4以下としたのは, R. Thom 氏が初等カタストロフの分類の折に right-codimension を4以下としたという歴史的動機以外にもない.

従って, もっと $P\text{-}\mathcal{K}\text{-codimension}$ が高いものまで, 分類する

必要はでる人入いにある。

定理6. $f: (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ ($n \geq p$) を P - $\mathcal{K}$ -codim(f) が4以下の $\mathbb{C}^p$ -写像芽とする。

1) f が原点において $\Sigma_0^!$ -型をとり、とき、 f は以下の写像芽のいずれかに P - $\mathcal{K}$ -同値である。

P - $\mathcal{K}$ -codimension	標準型
0	$(x_1, \dots, x_{p-1}, u + Q(x_p, \dots, x_n))$
1	$(x_1, \dots, x_{p-1}, u + x_p^3 + Q(x_{p+1}, \dots, x_n))$
2	$(x_1, \dots, x_{p-1}, u \pm x_p^4 + Q(x_{p+1}, \dots, x_n))$
3	$(x_1, \dots, x_{p-1}, u + x_p^5 + Q(x_{p+1}, \dots, x_n))$
4	$(x_1, \dots, x_{p-1}, u + x_p^3 + x_{p+1}^3 + Q(x_{p+2}, \dots, x_n))$
	$(x_1, \dots, x_{p-1}, u + x_p^3 - x_p x_{p+1}^2 + Q(x_{p+2}, \dots, x_n))$
4	$(x_1, \dots, x_{p-1}, u \pm x_p^6 + Q(x_{p+1}, \dots, x_n))$
	$(x_1, \dots, x_{p-1}, u \pm (x_p^2 x_{p+1} + x_{p+1}^4) + Q(x_{p+2}, \dots, x_n))$

2) f が原点において $\Sigma_1^!$ -型をとり、とき、 f は以下の写像芽のいずれかに P - $\mathcal{K}$ -同値である。

P - $\mathcal{K}$ -codimension	標準型
1	$(x_1, \dots, x_{p-1}, \pm u^2 + Q(x_p, \dots, x_n))$
2	$(x_1, \dots, x_{p-1}, u^3 + Q(x_p, \dots, x_n))$ $(x_1, \dots, x_{p-1}, \pm u^2 + x_p^3 + Q(x_{p+1}, \dots, x_n))$ $(x_1, \dots, x_{p-1}, x_p^3 \pm u x_p + Q(x_{p+1}, \dots, x_n))$
3	$(x_1, \dots, x_{p-1}, \pm u^4 + Q(x_p, \dots, x_n))$ $(x_1, \dots, x_{p-1}, u^3 + x_p^3 + Q(x_{p+1}, \dots, x_n))$ $(x_1, \dots, x_{p-1}, x_p^4 \pm u x_p + Q(x_{p+1}, \dots, x_n))$
4	$(x_1, \dots, x_{p-1}, u^5 + Q(x_p, \dots, x_n))$ $(x_1, \dots, x_{p-1}, x_p^5 \pm u x_p + Q(x_{p+1}, \dots, x_n)).$

ここで, $Q(x_1, \dots, x_n) = \pm x_1^2 \pm \dots \pm x_n^2$.

注意: P - $\mathcal{K}$ -codim $(f) \leq 4$ なるものには, 上記の他, $\Sigma_1^5, \Sigma_1^4, \Sigma_1^3, \Sigma_1^2, \Sigma_1^1, \Sigma_1^0$ の各型がある. 従って, 完全に分類するにはこれらの各型の分類を行なう必要がある.

また, これらの分類がどのような現象のモデルになるかは, その方面の研究者の判断が必要であろう.

以上.

文献

- [1] G. Debreu : Excess demand functions, J. Math. Econom. 1 (1974), 15-22.
- [2] M. Golubitsky and D. Schaeffer : A theory for imperfect bifurcation via singularity theory, Comm. Pure Appl. Math. 32 (1979), 21-98.
- [3] E. C. Zeeman : Euler buckling in Structural Stability, in the Theory of Catastrophes, and Applications in the Science, Lecture Notes in Math., No. 525, Springer (1976), 373-395.