

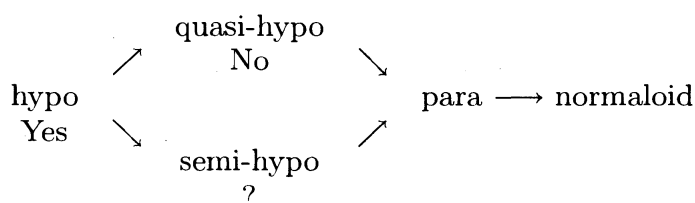
Semi-hyponormal 作用素は convexoid か？

神奈川大学工学部 長 宗雄 (Chō Muneo)
Department of Mathematics,
Kanagawa University

$T = U|T|$ をヒルベルト空間上の作用素 T の polar 分解とする. よく知られていますが, 定義を記載する.

1. T が hyponormal 作用素 $\iff T^*T \geq TT^*$
2. T が semi-hyponormal 作用素 $\iff |T| \geq |T^*|$
3. T が quasi-hyponormal 作用素 $\iff T^*(T^*T)T \geq T^*(TT^*)T$
4. T が paranormal 作用素 $\iff \|T^2x\| \geq \|Tx\|^2 \quad (\forall x; \|x\| = 1)$
5. T が normaloid 作用素 $\iff r(T) = \|T\|$
6. T が transaloid 作用素 $\iff r(T+z) = \|T+z\|$ for all $z \in \mathbb{C}$
7. T が convexoid 作用素 $\iff \text{conv } \sigma(T) = \overline{W(T)}$

ここで $\sigma(T)$ は T の spectrum と $W(T)$ は numerical range である. これらの作用素の関係と convexoid との状況は



hyponormal 作用素が convexoid であることと quasi-hyponormal 作用素が一般に convexoid でないことは, 安藤先生の例により有名である. この例は

$\mathcal{H} = \ell^2 \oplus \ell^2$ として U : unilateral shift, P : 第一成分への projection として

$$T = \begin{pmatrix} U + I & P \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

が convexoid でない quasi-hyponormal 作用素である.

ℓ^2 上の bilateral weighted shift T に対しては, 次の結果がある.

定理 1. Let T be a bilateral weighted shift with $r(T) = \|T\|$. Then T is transaloid and $\sigma(\operatorname{Re} T) = \operatorname{Re}(\sigma(T))$. Hence, T is convexoid.

従って ℓ^2 上の bilateral weighted shift T で, semi-hyponormal であれば, これは convexoid である.

ℓ^2 上の bilateral weighted shift で semi-hyponormal 作用素が convexoid でないものは作れない!

semi-hyponormal 作用素を作るには, 次の定理を利用する.

定理 2. If T is p -hyponormal, then T^n is $\frac{p}{n}$ -hyponormal.

ℓ^2 上の unilateral weighted shift U に対して, 2つの正の実数 a, b とし $T = aU + bU^*$ とおく. このとき,

$$T^*T - TT^* = (a^2 - b^2)P$$

であるので, T : hyponormal である必要十分条件は $a \geq b$ である. 従って, $a \geq b > 0$ に対して T^2 とすれば, これが semi-hyponormal 作用素となる.

そこで, 次の定理となる.

定理 3. T を先ほどの作用素とする. このとき, T^2 は convexoid である.

証明のスケッチ

$T^2 = a^2U^2 + abUU^* + abI + bU^{*2}$ であり $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ に対して

$$(T^2\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 2ab - ab|x_0|^2 + (a^2 + b^2)\Re(\mathbf{x}, U^2\mathbf{x}) + i(a^2 - b^2)\Im(\mathbf{x}, U^2\mathbf{x}).$$

$$X = \Re(\mathbf{x}, U^2\mathbf{x}), Y = \Im(\mathbf{x}, U^2\mathbf{x})$$

とおく. このとき

$$X^2 + Y^2 \leq 1 - (|x_0|^2 + |x_1|^2)$$

であり

$$\frac{(2ab - ab|x_0|^2 + (a^2 + b^2)X - 2ab)^2}{(a^2 + b^2)^2} + \frac{((a^2 - b^2)Y)^2}{(a^2 - b^2)^2} \leq 1 - |x_1|^2.$$

従って

$$\begin{aligned} & \frac{(2ab - ab|x_0|^2 + (a^2 + b^2)X - 2ab)^2}{(a^2 + b^2)^2} + Y^2 \\ & \leq 1 - |x_1|^2. \end{aligned}$$

よって

$$\overline{W(T^2)} \subset \{z = x + iy : \frac{(x - 2ab)^2}{(a^2 + b^2)^2} + \frac{y^2}{(a^2 - b^2)^2} \leq 1\}$$

次に, Douglas 先生の本 Banach algebra techniques in operator theory の系 7.28 に
よって

$$\sigma(T) = \{z = x + iy : \frac{x^2}{(a + b)^2} + \frac{y^2}{(a - b)^2} \leq 1\}$$

より

$$\begin{aligned} \sigma(T^2) &= \{z^2 : z \in \sigma(T)\} \\ &= \{z = x + iy : \frac{(x - 2ab)^2}{(a^2 + b^2)^2} + \frac{y^2}{(a^2 - b^2)^2} \leq 1\} \end{aligned}$$

よって

$$\sigma(T^2) = \overline{W(T^2)}.$$

証明終わり.

これは, 次のように a, b を複素数に一般化できる。

定理 4. $T = \alpha U + \beta U^*$ とする. このときも, T^2 は convexoid である.

ただし, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

証明 は $\alpha = ae^{2i\theta}, \beta = be^{2i\phi}$ かつ $\lambda = e^{i(\theta+\phi)}, \gamma = e^{i(\theta-\phi)}$ とおく.

また

$$V(x_0, x_1, x_2, \dots) = (x_0, \bar{\gamma}x_1, \bar{\gamma}^2x_2, \dots)$$

とおくと V は unitary であり

$$VT^2V^* = \lambda^2(aU + bU^*)^2$$

となるので,

$$T^2 = \lambda^2V^*(aU + bU^*)^2V$$

となるので, この T^2 も convexoid である。

最後に, $T = 2U + U^*$ は hyponormal であるので, T^2 は semi-hyponormal であるが, $T^2 - 4$ は paranormal でない。なぜなら

$$\|(T^2 - 4)(1, 0, 0, \dots)\|^2 = \|(-2, 0, 4, 0, \dots)\|^2 = 20$$

$$\|(T^2 - 4)^2(1, 0, 0, \dots)\| = \|(8, 0, -8, 0, 16, 0, 0, \dots)\| = \sqrt{384}$$

である。よって $\mathbf{x} = (1, 0, 0, \dots)$ とおくと

$$\|(T^2 - 4)\mathbf{x}\|^2 = 20 > \sqrt{384} = \|(T^2 - 4)^2\mathbf{x}\|$$

であるので paranormal でない。

- [1] A. Aluthge, On p -hyponormal operators for $0 < p < 1$, Integr. Equat. Oper. Th. **13**(1990), 307-315.
- [2] A. Aluthge and D. Wang, Powers of p -hyponormal operators, J. Inequal. Appl. **3**(1999), 279-284.
- [3] M. Chō, T. Huruya, Y.O. Kim and J.I. Lee, A note on real parts of some semi-hyponormal operators, Acta Sci. Math. (Szeged) **66**(2000), no. 3-4, 731-736.
- [4] M. Chō and J.I. Lee, p -Hyponormality is not translation-invariant, Proc. Amer. Math. Soc. **131**(2002), 3109-3111.
- [5] R.G. Douglas, Banach algebra techniques in operator theory, Academic Press, New York and London 1972.
- [6] T. Furuta, Invitation to linear operators, Taylor & Francis Inc, London and New York, 2001.
- [7] C. Pearcy, Topics in operator theory, Amer. Math. Soc., Providence, 1972.
- [8] D. Xia, Spectral theory of hyponormal operators, Birkhäuser Verlag, Basel, 1983.