

$Sp(2; \mathbb{R}) = Sp_4(\mathbb{R})$ の class 1 Whittaker 関数について

東京大学・理学部 織田孝幸

§0. 導入. よく知られているように, k を局所体とし, $GL_2(k)$ の admissible 表現 (既約) (π, H) の Whittaker model を考え, その vector を v とおくと, v は $GL_2(k)$ の split torus 上 2- 結合で Mellin 変換を考えると, π に associate する正しい local L-factor を与えることが知られている. (cf. Jacquet - Langlands [1]).

これを一般化することは GL_n のときは成功することが知られている. (cf. Jacquet, Piatetskiï-Shapiro, Shalika [2]).

一般の reductive algebraic groups のときは 2 つの困難故に現状では一般にはよくわかっていない. 理論の発展はとどころである. 2 つの難点とは:

(i) Whittaker model の存在と一意性の問題が一般にはよくわかっていない. $k = \mathbb{R}$ のときは存在は知られているが (Vogan) ^{の条件} この場合は非常に sophisticated な議論が必要. (cf. 例えは 松本久義氏の仕事).

(ii) 正しい "Mellin 変換" がよくわかるない。

ここでは"誤り道"を特別な例についてきちっとたいて、
みて、今後の参考にすることを目標とする。この目標もまだ
完遂できていないが、できる計算をまとめて中間報告と
する。

講演では k が p 進体のとき、 $Sp(2, k) = Sp_4(k)$ rank 2 の
symplectic 群の class 1 Whittaker function の 2 重 Mellin 変換
(ie. Whittaker function の 2 重 Hecke series という k が実質的に
与えられる) を問題にして k が、 k によって k は 日仏解析
数論シンポジウムの Proceeding に submit したので (cf. Oda
[2]), 以下では $k = \mathbb{R}$ 実数体とし、このとき class 1 の
Whittaker functions とする Mellin 変換 (2 重の) について、いく
つか計算をして k が k を与える。

計算の check のために REDUCE を使った。設計・制作者に
感謝する。

Whittaker 関数の Mellin 変換は微分方程式より差分方程
式とみなすことは、青本先生に示唆された。深く感謝
します。

例1. $Sp(2; \mathbb{R})$ に関連した記号と Jacquet vector の定義

$$Sp(2; \mathbb{R}) := \{ g \in M_4(\mathbb{R}) \mid {}^t g J g = J ; J = \begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ -1_2 & 0 \end{pmatrix} \}$$

とある. $Sp(2; \mathbb{R})$ の minimal parabolic subgroup $\pi(2)$, u と $\bar{u}$ は

$$P_0 = \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} * & * & * & * \\ 0 & * & * & 0 \\ \hline 0 & * & * & * \end{array} \right) \in Sp(2; \mathbb{R}) \right\}$$

とある. P_0 の unipotent radical は

$$N_0 = \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & 0 \\ \hline 0 & * & 1 & 0 \\ & & * & * \end{array} \right) \in P_0 \right\}$$

で与えられる. N_0 の任意の元は

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & n_0 & 0 & * \\ 0 & 1 & * & 0 \\ \hline 0 & * & 1 & 0 \\ & & -n_0 & 1 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{cc|cc} & & n_1 & n_2 \\ & & n_2 & n_3 \\ \hline & & & 1_2 \end{array} \right)$$

の形の積として表わされる.

$$K = Sp(2; \mathbb{R}) \cap O(4) = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline -B & A \end{array} \right) \mid A + \sqrt{-1}B \in U(2) \right\}$$

とあり,

$$A = \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ \hline & & a_1^{-1} & \\ & & & a_2^{-1} \end{array} \right) \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}^\times \right\}$$

とあると, Iwasawa 分解

$$Sp(2; \mathbb{R}) = N_0 A K$$

がある.

N_0 の $\mathbb{Z}$ -ワリ-指標 ψ_0 を

$$\psi_0 \left(\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & n_0 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -n_0 & 1 & \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{cc|cc} 1_2 & n_1 & n_2 & \\ n_2 & n_3 & 1_2 & \end{array} \right) \right) = \exp[2\pi i(n_0 + n_3)]$$

で定義する。明らかなに ψ_0 は N_0 の交換子群 $[N_0, N_0]$ 上では trivial。

$$A_+ = \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ \hline & & a_1^{-1} & \\ & & & a_2^{-1} \end{array} \right) \mid a_1 > 0, a_2 > 0 \right\}$$

の $\mathbb{Z}$ -ワリ-指標を

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ \hline & & a_1^{-1} & \\ & & & a_2^{-1} \end{array} \right) \longmapsto \begin{matrix} i\gamma_1 & i\gamma_2 \\ a_1 & a_2 \end{matrix} \quad (\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R})$$

で定め、これは $\left(\begin{array}{c|c} \varepsilon & \eta \\ \hline \varepsilon^{-1} & \eta^{-1} \end{array} \right) \quad (\varepsilon = \pm 1, \eta = \pm 1)$ 上 trivial

として、 A に延長し、 ± 1 に N_0 上 trivial として、 $N_0 A$ の

$\mathbb{Z}$ -ワリ-指標とし、 $G = Sp(2; \mathbb{R})$ に $\mathbb{Z}$ -ワリ-に induce

して得られる G の $\mathbb{Z}$ -ワリ-表現 $\pi_{(\gamma_1, \gamma_2)}$ を考える。これは

principal $\mathbb{Z}$ -series といわれる表現である。 $\pi_{(\gamma_1, \gamma_2)}$ は class 1

の表現で (既約である)、scalar (零を除いて) unique な K -不変

ベクトルがある。 N_0 の指標 ψ_0 に対する $\pi_{(\gamma_1, \gamma_2)}$ の Whittaker

model の中での K -invariant vector は次のように計算される。

(cf. Jacquet [4])

$\varphi: G \rightarrow \mathbb{C}$ を $\mathbb{Z}$ -値関数とする。

$g = n a k \quad (n \in N_0, a \in A_+, k \in K)$ に対して

$$\varphi(g) = \varphi(nak) = \varphi(na) = \varphi(a) = a_1^{i\nu_1} a_2^{i\nu_2}$$

例 1 $a = \left(\begin{array}{c|c} a_1 & a_2 \\ \hline a_1^{-1} & a_2^{-1} \end{array} \right) \in A_+.$

$$w_0 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 1_z \\ \hline -1_z & 0 \end{array} \right) \in Sp(2; \mathbb{R}) \text{ の Weyl 群 の longest element として,}$$

$$\varphi_{w_0}(g) = \varphi(w_0 g)$$

と表す。

$$(\star) \quad W_{\psi_0}^{(\nu_1, \nu_2)}(g) = \int_{N_0} \varphi_{w_0}(ng) \overline{\psi_0(n)} \, dn.$$

$z = z^{-1} \, dn$ は N_0 上の Haar measure.

$W_{\psi_0}^{(\nu_1, \nu_2)}(g)$ は $W_{\psi_0}^{(\nu_1, \nu_2)}(ng_0) = \psi_0(n) W_{\psi_0}^{(\nu_1, \nu_2)}(g)$ と変換するが、また右から K -invariant であるから、 A_+ 上の値を決定しうる。これは次の積分表示である。

$$g = n_g \cdot a \cdot k_g \quad (n_g \in N_0, a \in A_+, k_g \in K)$$

と部分分解 (2.6.4) と表す。

$$\begin{aligned} \varphi_{w_0}(ng) &= \varphi(w_0 ng) = \varphi(w_0 n n_g a) \\ &= \varphi(w_0 a a^{-1} n n_g a) = \varphi(w_0 a w_0^{-1} w_0 \cdot a^{-1} n n_g a) \\ &= (w_0 a w_0^{-1})^{i\nu} \varphi_{w_0}(a^{-1} n n_g a) \end{aligned}$$

例 1 $w_0 a w_0^{-1} = a' = \left(\begin{array}{c|c} a'_1 & a'_2 \\ \hline a_1'^{-1} & a_2'^{-1} \end{array} \right)$ と表すことができる。

$$(w_0 a w_0^{-1})^{i\nu} = (a'_1)^{i\nu_1} (a'_2)^{i\nu_2} \quad \text{と定まる。}$$

$$g = a \quad \text{i.e.} \quad n_g = 1 \quad \text{と} \quad (7),$$

$$\begin{aligned}
 (\star) \quad W_{\psi_0}^{(v_1, v_2)}(a) &:= \int_{N_0} \varphi_{w_0}(n n_g) \overline{\psi(n)} \, dn \\
 &= (w_0 a w_0^{-1})^{i\nu} \int_{N_0} \varphi_{w_0}(a^{-1} n a) \, dn.
 \end{aligned}$$

と (5) (2) $w_0(a^{-1}na)$ は Iwasawa 分解 (7),

$$w_0(a^{-1}na) = \tilde{n} \cdot \tilde{a} \cdot \tilde{k} \quad (\tilde{n} \in N_0, \tilde{a} \in A_+, \tilde{k} \in K)$$

より, $\tilde{a} \in a$ と n との関数として $\tilde{a} = \tilde{a}(a, n)$ と書くと,

$$\varphi_{w_0}(a^{-1}na) = \tilde{a}(a, n)^{i\nu}$$

より,

$$(\star)'' \quad W_{\psi_0}^{(v_1, v_2)}(a) = (w_0 a w_0^{-1})^{i\nu} \int_{N_0} \tilde{a}(a, n)^{i\nu} \, dn$$

という積分表示をうる。

($\star$) の積分表示で得られる G 上の関数 $W_{\psi_0}^{(v_1, v_2)}(g)$ を主系列表現 $\pi_{(v_1, v_2)}$ に対する Jacquet vector という。

$$a = \left(\begin{array}{c|c} t_1 & t_2 \\ \hline t_1^{-1} & t_2^{-1} \end{array} \right) \quad (t_1, t_2 \in \mathbb{R}, t_1 > 0, t_2 > 0) \quad a \in \pm W_{\psi_0}^{(v_1, v_2)}(a) \in$$

$W_{\psi_0}^{(v_1, v_2)}(t_1, t_2)$ と書く, 参考文献 (12) ($\star$)' の "explicit な" 形を求め

てみる。結果は次の形である。

$$\begin{aligned}
W_{\psi_0}^{(v_1, v_2)}(t_1, t_2) &= t_1^{v_1} t_2^{v_2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \\
&\quad \left\{ t_1^4 t_2^2 + t_2^2 n_1^2 + t_1^2 n_2^2 + 2 n_0 n_2 (t_2^2 n_1 + t_1^2 n_3) \right. \\
&\quad \left. + n_0^2 (t_1^2 t_2^4 + t_2^2 n_2^2 + t_1^2 n_3^2) \right\}^{- (v_1 - v_2)/2} \\
&\quad \times \left\{ t_1^4 t_2^4 + t_2^4 n_1^2 + 2 t_1^2 t_2^2 n_2^2 + t_1^4 n_3^2 + (n_2^2 - n_1 n_3)^2 \right\}^{- v_2/2} \\
&\quad \times \exp \left[(-2\pi i)(n_0 + n_3) \right] \cdot dn_0 dn_1 dn_2 dn_3
\end{aligned}$$

(但し $(n_0, n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{R}^4$ を動かす.)

さて $Sp(2; \mathbb{R})$ の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の universal enveloping algebra $U(\mathfrak{g})$ の center は 2 次の元 (Casimir operator) と 4 次の元 ψ で生成される $\mathbb{R}$ 上の 2 変数多項式環となる。 $W_{\psi_0}^{(v_1, v_2)}(t_1, t_2)$ はこれらの元の同時固有関数となる。これを (t_1, t_2) という parameter で explicit に書き表わしてやろう。これは次節と同様である。

§ 2. $U(\mathfrak{g})$ の center の generators と, Jacquet vector の満たす微分方程式。

$Sp(2; \mathbb{R})$ の Lie 環の basis を次のように定める。

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}; \quad H_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$X_4 = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right) ; \quad X_{-4} = {}^t X_4 ;$$

$$X_3 = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \end{array} \right) ; \quad X_{-3} = {}^t X_3 ;$$

$$X_2 = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) ; \quad X_{-2} = {}^t X_2 ;$$

$$X_1 = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right) ; \quad X_{-1} = {}^t X_1 ;$$

すると $\mathfrak{g}$ の Casimir operator は $U(\mathfrak{g})$ の λ の π の scalar 値である。

$$\lambda(L_1) = H_1^2 + H_2^2 + 6H_1 + 2H_2 + 8X_{-4}X_4 + 4X_{-3}X_3 + 8X_{-2}X_2 + 4X_{-1}X_1.$$

$$= H_1^2 + H_2^2 + 4(X_4X_{-4} + X_{-4}X_4) + 2(X_3X_{-3} + X_{-3}X_3) + 4(X_2X_{-2} + X_{-2}X_2) + 2(X_1X_{-1} + X_{-1}X_1).$$

Jacquet vector は 右 K -不変で、左 $[N_0, N_0]$ 不変であるが、 $U(\mathfrak{g})$ の π に π の作用させても $U(\mathfrak{g})(\mathbb{K} \oplus [\pi, \pi])$ は Jacquet vector を annihilate する。但し $\mathbb{K}$ は K の Lie 環 π は N_0 の Lie 環。よって $\lambda(L_1)$ の Jacquet vector λ の作用をみると、 $\lambda(L_1) \in \text{mod } U(\mathfrak{g})(\mathbb{K} \oplus [\pi, \pi])$ であることが分かる。

Lemma 1. $\lambda(L_1) \equiv H_1^2 + H_2^2 - 6H_1 - 2H_2 + 8X_2^2 + 4X_1^2 \pmod{U(\mathfrak{g})(\mathbb{K} \oplus [\pi, \pi])}$

次のことは容易にわかる。

Formula 1 $F(t_1, t_2) = W_{\psi_0}^{(\nu_1, \nu_2)}(t_1, t_2)$ とおくと,

$$\left\{ \begin{array}{l} H_1 F = t_1 \frac{\partial F}{\partial t_1} + t_2 \frac{\partial F}{\partial t_2}; \\ H_2 F = t_1 \frac{\partial F}{\partial t_1} - t_2 \frac{\partial F}{\partial t_2}; \\ X_4 F = X_3 F = 0; \\ X_2 F = (2\pi i) t_2^2 F; \\ X_1 F = (2\pi i) t_1 t_2^{-1} F. \end{array} \right.$$

よって

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \lambda(L_1) F &= t_1^2 \frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2} + t_2^2 \frac{\partial^2 F}{\partial t_2^2} - 3t_1 \frac{\partial F}{\partial t_1} - t_2 \frac{\partial F}{\partial t_2} \\ &\quad - (8\pi^2 \cdot t_1^2 t_2^{-2} + 16\pi^2 \cdot t_2^4) F. \end{aligned}$$

他方 F の全系列表現に属するとして、 $\frac{1}{2} \lambda(L_1) F = [(\nu_1 - 2)^2 + (\nu_2 - 1)^2 - 5] F$ とおきかえり得る。

Proposition 1. $F(t_1, t_2) = W_{\psi_0}^{(\nu_1, \nu_2)}(t_1, t_2)$ は次の2階の

微分方程式を満たす:

$$\begin{aligned} &t_1^2 \frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2} + t_2^2 \frac{\partial^2 F}{\partial t_2^2} - 3t_1 \frac{\partial F}{\partial t_1} - t_2 \frac{\partial F}{\partial t_2} - 8\pi^2 \left(\frac{t_1^2}{t_2^2} + 2t_2^4 \right) F \\ &= [(\nu_1 - 2)^2 + (\nu_2 - 1)^2 - 5] F. \quad \text{--- (式 1)} \end{aligned}$$

さて $U(g)$ の center $Z(g)$ のもう一つの4つの生成元 z_1, z_2 は中島匠一氏に於ける explicit formula である (cf. [5])

Lemma 2. $\lambda(L_2)$ は $Z(g)$ の4つの元 z_1, z_2, z_3, z_4 である。

$$\begin{aligned}
 \lambda(L_2) = & 16 X_4^2 X_{-4}^2 + 16 X_4 X_3 X_{-3} X_{-4} \\
 & - 32 X_4 X_2 X_{-2} X_{-4} + 16 X_3^2 X_{-2} X_{-4} \\
 & + 16 X_4 X_1 X_{-1} X_{-4} + 8 X_4 H_2 H_1 X_{-4} \\
 & + 8 X_3 X_1 (H_1 - H_2) X_{-4} - 16 X_2 X_1^2 X_{-4} \\
 & + 16 X_4 X_2 X_{-3}^2 + 16 X_3 X_2 X_{-2} X_{-3} \\
 & + 8 X_4 (H_1 - H_2) X_{-1} X_{-3} + 4 X_3 H_2^2 X_{-3} \\
 & + 8 X_2 X_1 (H_1 + H_2) X_{-3} + 16 X_2^2 X_{-2}^2 \\
 & - 16 X_4 X_{-1}^2 X_{-2} + 8 X_3 (H_1 + H_2) X_{-1} X_{-2} \\
 & + 16 X_2 X_1 X_{-1} X_{-2} - 8 X_2 H_2 H_1 X_{-2} \\
 & + 4 X_1 H_1^2 X_{-1} + H_1^2 H_2^2 \\
 & + 16 X_4 H_1 X_{-4} - 32 X_4 H_2 X_{-4} - 32 X_3 X_1 X_{-4} \\
 & - 32 X_4 X_{-1} X_{-3} + 8 X_3 H_1 X_{-3} - 16 X_2 X_1 X_{-3} \\
 & - 16 X_3 X_{-1} X_{-2} + 16 X_2 (H_1 + H_2) X_{-2} \\
 & - 24 X_1 H_1 X_{-1} - 2 H_1^2 H_2 - 6 H_1 H_2^2 \\
 & - 48 X_4 X_{-4} - 24 X_3 X_{-3} - 48 X_2 X_{-2} \\
 & + 24 X_1 X_{-1} - 2 H_1^2 + 12 H_1 H_2 + 6 H_2^2 \\
 & + 12 H_1 - 12 H_2
 \end{aligned}$$

長い計算の中に (計算が面倒なはず!)、証明を得る

Lemma 3 modulo $V(y) (\mathbb{K} \oplus [\pi, \pi])$ 7.

$$\begin{aligned} \lambda(L_2) \equiv & H_1^2 H_2^2 - 2 H_1^2 H_2 - 6 H_1 H_2^2 - 2 H_1^2 + 12 H_1 H_2 \\ & + 6 H_2^2 + 12 H_1 - 12 H_2 \\ & + 4 H_1^2 X_1^2 - 8 H_1 H_2 X_2^2 + 16 X_2^4 + 16 X_1^2 X_2^2 \\ & - 24 H_1 X_1^2 - 8 H_1 X_2^2 + 40 H_2 X_2^2 \\ & + 48 X_2^2 + 24 X_1^2. \end{aligned}$$

他方 $F(t_1, t_2) = W_{40}^{(v_1, v_2)}(t_1, t_2)$ に $\lambda(L_2)$ の作用を $F(t_1, t_2)$ に対して表現に用いることを使て計算する

$$\begin{aligned} \lambda(L_2) F &= (v_1 + v_2)^2 (v_1 - v_2)^2 - 2 (v_1 + v_2)^2 (v_1 - v_2) \\ &- 6 (v_1 + v_2) (v_1 - v_2)^2 - 2 (v_1 + v_2)^2 + 12 (v_1 + v_2) (v_1 - v_2) \\ &+ 6 (v_1 - v_2)^2 + 24 v_2 \\ &= (v_1 + v_2 - 3)^2 (v_1 - v_2 - 1)^2 - 3 (v_1 + v_2 - 3)^2 - 3 (v_1 - v_2 - 1)^2 \\ &+ 24. \end{aligned}$$

これより, F の満たす4階の微分方程式はそのハミルトン形式となる。

Proposition 2. $F(t_1, t_2) = W_{\psi_0}^{(v_1, v_2)}(t_1, t_2)$ とおくと, F は

$$\begin{aligned}
 & t_1^4 \frac{\partial^4 F}{\partial t_1^4} - 2 t_1^2 t_2^2 \frac{\partial^4 F}{\partial t_1^2 \partial t_2^2} + t_2^4 \frac{\partial^4 F}{\partial t_2^4} \\
 & - 2 t_1^3 \frac{\partial^3 F}{\partial t_1^3} + 2 t_1^2 t_2 \frac{\partial^3 F}{\partial t_1^2 \partial t_2} + 6 t_1 t_2^2 \frac{\partial^3 F}{\partial t_1 \partial t_2^2} + 2 t_2^3 \frac{\partial^3 F}{\partial t_2^3} \\
 & - t_1^2 \frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2} - 6 t_1 t_2 \frac{\partial^2 F}{\partial t_1 \partial t_2} - 13 t_2^2 \frac{\partial^2 F}{\partial t_2^2} \\
 & + 9 t_1 \frac{\partial F}{\partial t_1} + 13 t_2 \frac{\partial F}{\partial t_2} \\
 & + 16 \frac{\pi^2}{t_2^2} \left\{ -t_1^4 \frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2} + 2 t_1^2 t_2^6 \frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2} - 2 t_1^3 t_2 \frac{\partial^2 F}{\partial t_1 \partial t_2} \right. \\
 & \quad \left. - t_1^2 t_2^2 \frac{\partial^2 F}{\partial t_2^2} - 2 t_2^8 \frac{\partial^2 F}{\partial t_2^2} \right. \\
 & + 5 t_1^3 \frac{\partial F}{\partial t_1} - 6 t_1 t_2^6 \frac{\partial F}{\partial t_1} + 5 t_1^2 t_2 \frac{\partial F}{\partial t_2} - 6 t_2^7 \frac{\partial F}{\partial t_2} \\
 & + 16 \pi^2 \cdot t_1^2 \cdot t_2^4 \cdot F + 16 \pi^2 \cdot t_2^{10} \cdot F - 6 t_1^2 \cdot F + 4 t_2^6 F \\
 & = \left\{ (v_1 + v_2 - 3)(v_1 - v_2 - 1) \right\}^2 - 3(v_1 + v_2 - 3)^2 - 3(v_1 - v_2 - 1)^2 + 21.
 \end{aligned}$$

□

3.5. 左の如く $\lambda(L_2)F$ を与えている。

$\frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{4} \lambda(L_1)^2 - \lambda(L_2) \right\} F$ を計算すると少しちがう次の4階の

微分方程式の方が簡単な形になる。

Proposition 2'. F は Proposition 2 と同様に成り立つ。ただし

$$\begin{aligned}
 & t_1^2 t_2^2 \frac{\partial^4 F}{\partial t_1^2 \partial t_2^2} - t_1^2 t_2 \frac{\partial^3 F}{\partial t_1^2 \partial t_2} - 3 t_1 t_2^2 \frac{\partial^3 F}{\partial t_1 \partial t_2^2} \\
 & + 3 t_1 t_2 \frac{\partial^2 F}{\partial t_1 \partial t_2} + 3 t_2^2 \frac{\partial^2 F}{\partial t_2^2} - 3 t_2 \frac{\partial F}{\partial t_2} \\
 & + 8 \pi^2 \left\{ t_1^3 t_2^{-1} \frac{\partial^2 F}{\partial t_1 \partial t_2} - 2 t_1^2 t_2^4 \frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2} \right. \\
 & \quad - 2 t_1^3 t_2^{-2} \frac{\partial F}{\partial t_1} + 6 t_1 t_2^4 \frac{\partial F}{\partial t_1} - t_1^2 t_2^{-1} \frac{\partial F}{\partial t_2} \\
 & \quad \left. + 2 \pi^2 t_1^4 t_2^{-4} F + 2 t_1^2 t_2^{-2} F - 6 t_2^4 F \right\} \\
 & = (\nu_1 - 1)(\nu_1 - 3)(\nu_2)(\nu_2 - 2) \cdot F.
 \end{aligned}$$

そこで $t_1 = u_1 u_2$, $t_2 = u_2$ として変数変換を施す。

$$F(t_1, t_2) = F(u_1 u_2, u_2) = W_{\psi_0}^{(\nu_1, \nu_2)} \left(\left(\begin{array}{c|c} u_1 u_2 & u_2 \\ \hline & u_1^{-1} u_2^{-1} \end{array} \right) \right).$$

そこで $s_1, s_2 \in \mathbb{C}$ として $\operatorname{Re} s_1 \gg 0$, $\operatorname{Re} s_2 \gg 0$ に対して

double Mellin transformation

$$\varphi(s_1, s_2) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty \int_0^\infty F(u_1 u_2, u_2) \cdot u_1^{s_1} \cdot u_2^{s_2} \frac{du_1}{u_1} \frac{du_2}{u_2}$$

を考える。Whittaker functions の Jacquet vector は $u_1 \rightarrow \infty$

$u_2 \rightarrow 0$ である (減少する) $\operatorname{Re} s_1 > 0$, $\operatorname{Re} s_2 > 0$ である。この積分は

収束する。 $\varphi(s, s_2)$ は $\operatorname{Re} s_1 > 0, \operatorname{Re} s_2 > 0$ で正則。

§ 3. Jacquet vector の Mellin 変換 をみ る 差 分 方 程 式。

前節の Proposition 1, 2 と, 部分積分 を使 っ て $\varphi(s, s_2)$ は 次の 2 つ の 差 分 方 程 式 を みた す。

Theorem 1.

$$(i) \quad [(2s_1^2 + 4s_2 - 2s_1s_2 + s_2^2 + 2s_2) - \{(v_1 - 2)^2 + (v_2 - 1)^2 - 5\}] \\ \times \varphi(s_1, s_2) = 8\pi^2 \{ \varphi(s_1 + 2, s_2) + 2\varphi(s_1, s_2 + 4) \}$$

$$(ii) \quad (s_1 + 1)(s_1 + 3)(s_1 - s_2)(s_1 - s_2 - 2)\varphi(s_1, s_2) \\ + 8\pi^2 \{ (-s_1^2 + s_1s_2 + 2s_1 + s_2 + 2)\varphi(s_1 + 2, s_2) \\ + (-2)(s_1 + 1)(s_1 + 3)\varphi(s_1, s_2 + 4) + 2\pi^2\varphi(s_1 + 4, s_2) \} \\ = (v_1 - 1)(v_1 - 3)(v_2 - 2)v_2 \cdot \varphi(s_1, s_2)$$

□

上 の 式 (i) と (ii) に $s_1 \leftarrow \lambda + 1$,

$$(-1)\{s_1 + 2 + (v_1 - 2)\}\{s_1 + 2 - (v_1 - 2)\}\{s_1 + 2 - (v_2 - 1)\}\{s_1 + 2 + (v_2 - 1)\} \\ \times \varphi(s_1, s_2) + 8\pi^2 [\{(s_1 + 1)(s_2 + 6) - 1\}] \varphi(s_1 + 2, s_2) \\ + 16\pi^4 \varphi(s_1 + 4, s_2) = 0.$$

これより, $\varphi(s_1, s_2)$ は $\operatorname{Re} s_2 > 0$ の領域では有理型に延長できる. s_1 に関する poles の場所は

$$\pi^{-s_1} \Gamma\left(\frac{s_1+2+(v_1-2)}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s_1+2-(v_1-2)}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s_1+2+(v_2-1)}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s_1+2-(v_2-1)}{2}\right)$$

と同一である. 但し $\Gamma(+)$ は Γ -関数.

以下ここではやりとをせながら, 右方面の問題をみる.

$\mathbb{R}$ 上の話と, p -進体上の話には並行性がある. たとえば $\mathbb{Z}$ の対称である.

$\mathbb{R}$	$\mathbb{Q}_p$
$\pi^{-s} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$	$1 - p^{-s}$

これに導かれて, Hecke series for Whittaker function の explicit formula から $\varphi(s_1, s_2)$ の形を推測できる. (cf. [3])

Problem 1. $\varphi(s_1, s_2)$ は

$$\begin{aligned} \varphi(s_1, s_2) = & \Gamma\left(\frac{s_1}{2} + 1 + \frac{1}{2}(v_1-2)\right) \Gamma\left(\frac{s_1}{2} + 1 - \frac{1}{2}(v_1-2)\right) \Gamma\left(\frac{s_1}{2} + 1 + \frac{1}{2}(v_2-1)\right) \Gamma\left(\frac{s_1}{2} + 1 - \frac{1}{2}(v_2-1)\right) \\ & \times \Gamma\left(\frac{s_2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\{(v_1-2) + (v_2-1)\}\right) \times \Gamma\left(\frac{s_2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\{-(v_1-2) + (v_2-1)\}\right) \\ & \times \Gamma\left(\frac{s_2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\{(v_1-2) - (v_2-1)\}\right) \times \Gamma\left(\frac{s_2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\{-(v_1-2) - (v_2-1)\}\right) \\ & \times \Delta(s_1, s_2) \quad \text{で, } \Delta(s_1, s_2) \text{ は } (s_1, s_2) \text{ の entire function} \\ & \text{この形で書けるはず.} \end{aligned}$$

Problem 1 は多分それはいつかしくなってしまう。

Problem 2, $\Delta(s, s_2)$ の零点を決定せよ。

Problem 2 は N_0 が abel でないことを反映して,
 Goodman - Wallach operator が非常に複雑になるから
 簡単にはできないと思われる。 $\Delta(s, s_2)$ がよくわかれば,
 逆 Mellin 変換によつて $W_{\chi_0}^{(y_1, y_2)}(z, z_2)$ に対して,
 z の Whittaker function に対する Barnes の積分表示の
 類似物が得られることになるから --

$\varphi(s, s_2)$ が $\mathbb{R}$ での "一般化 Euler factor" (つまり "一般化"
 P -factor) であるのは $\varphi(s, s_2)$ が P -関数の積で表される
 ことができることに理由がある。

References

- [1] Jacquet, H. & Langlands, R.: Automorphic forms on $GL(2)$. Springer LNM.
- [2] Jacquet, H. Piatetski-Shapiro, I. I., & Shalika, J.: Automorphic forms on $GL(3)$. Annals of Math. 109 (1979)
- [3] Oda, T.: Multiple Hecke series for class-1 Whittaker functions on $GL(n)$ over p -adic fields. Preprint.
- [4] Jacquet, H.: Fonctions de Whittaker associees aux groupes de Chevalley. Bull. Soc. Math. France 95 (1967), 243-309.
- [5]. 中島匠一: 東京大学大学院修士論文。