

Moodleを利用した行基本変形に関する 計算支援システムの開発とその実践

金沢学院大学・経済情報学部 小形 優人

Yuto Ogata, Faculty of Economic Informatics, Kanazawa Gakuin University

1 はじめに

2020年頃から感染が拡大した新型コロナウイルス感染症（Covid-19）の影響により、教育機関では急きょ遠隔授業への転換を迫られた。当時、これまで対面で行っていた教育サービスをインターネットを介して自宅にしながら受けることができるよう、オンライン教材やライブ配信ソフトウェアなどの教育支援ツールが次々と開発されている。2023年になると感染は落ち着き、新型コロナウイルス感染症の位置づけは「2類相当」から「5類感染症」へと改められた。教育現場においても感染拡大以前の様子を取り戻しつつあるが、Society5.0やGIGAスクール構想をはじめとして、コンピュータを利用したライブ配信やオンデマンド教材は今後ますます重要になると考えられる。

大学教養科目としての数学においては、ICTを活用するのにいくつかの困難が生じる。例えば、学生がコンピュータの操作に慣れていないこと、コンピュータ上で数式やグラフなどを記述する方法が容易ではないこと、従来のような手書きによる計算方法を踏襲しにくいこと、大学で用いている教育ツール上でのみ動作させる場合があること、受講学生の特性に応じた出題形式が必要であること、手採点のような柔軟な自動採点が難しいことなどである。

本稿では、大学の線形代数科目で扱う「行列の基本変形」に焦点を当てた計算支援システムと、2023年度に利用した学生からの評価について紹介する。本システムは[1]で開発したものを金沢学院大学の文系1年生向け講義「一般数学」の中で課題の一部として導入し、学生の受験結果や授業アンケート結果を基に修正、改良したものである。

2 行列の基本変形に関する支援システム

行列の基本変形とは、「ある行を0でない実数倍する」「ある行とある行を交換する」「ある行の実数倍を他の行に加える」という3つの操作のことを指している。計算が苦手な学生は計算ミスを起こしやすく、行列の基本変形の意味を理解しきれていない学生は不適切な操作をしてしまうことがあり、いずれも正しい解答を得ることが困難である。本研究の目的は、これらの問題を少しでも緩和できるeラーニング教材を提案することであるが、システムを開発するにあたって注意すべき点がいくつか存在する。

まず、解答欄をどのように設定するかという問題がある。基本変形は途中の行列を順番に書き下していくことで操作を完了するため、最終結果を入力するだけの問題では上の目的を達成すること、あるいは達成されたかどうか教員側が認識することは難しい。

また、目的の行列を得るための変形は1通りでないが、学生に求める入力が多くなればなるほどミスが増え、本来の目的から遠ざかってしまうことにも注意が必要である。次の問題は、何を基準に評定を行うかである。最終結果の正誤のみならず、途中計算のミス、不必要な変形の回数など評定に影響し得る要素は少なくない。さらに、アルゴリズム的な変形手順と、手計算による分数を避けるような変形手順はしばしば異なり、“不必要な変形”の判断基準もまた難しい。

田中ら [2] や樋口 [3, 4] は学生が紙面上で行う基本変形をコンピュータ上で再現できるような計算支援システムを開発している。特に、[4] のシステムは計算手順を記録するのみならず、利用者が行ったやり直し操作の回数および5段階にラベリングされた変形操作の優劣を通じて利用者の思考過程をモニタリングできるものとなっている。

3 本システムの仕様

3.1 システム要件

本稿では、以下の要件に基づいた行基本変形の計算システムを提案する。

- Moodle ([5]) の小テストモジュールを利用できること
- 解答の中断やページ遷移に関わらず、途中計算を視覚的／内部的に保存すること
- 定数項に文字を含む変形ができること
- 提出後に学生の途中計算を教員が確認できること

本システムはJavaScriptを用いており、Moodleの「小テスト」モジュールにある「記述問題」の問題テキスト欄に著者が開発したスクリプトを読み込むことで実装が可能である。本章では、2023年度前期に開講した文系学生向け講義（以下、「当該講義」とする）で扱った教材について紹介する。

3.2 学生側の操作

まず初めに、図1のような使用上の注意書きを学生に確認させている。2020年度に初めて本システムのプロトタイプを用いた教材を実践した際、パソコン自体やパソコン上で動作するアプリケーションの操作方法に慣れていない学生が想像以上に多かった。そこで、2021年度からはこのような説明画面を見せながら全角と半角の違い、記号を入力するキー（例えば「-」「/」を「ハイフン（マイナス、引く）」「スラッシュ」と打ち込んで変換し、結果的に特殊記号を入力してしまう例が少なくなかった）などの確認を行うようにしている。

本教材の解答画面は図2である。デフォルトの記述問題にある解答欄を廃し、学生が操作する部分は行数を指定するセレクトボックスと、数値を入力するテキストボックス、そして実行ボタンである。数値はマイナスとスラッシュを含む半角数字による整数およ

び分数に限っている。分数を入力する場合、正負の符号は分子、分母のいずれに付けても問題なく、また既約でないものや分母が1のものでもよい。本教材はあくまでも各回の小課題で使用することを想定しており、変形する行列は教員側であらかじめ指定しているが、必要に応じて任意の行列を入力させることもできる。ただし、その場合はコンピュータを用いた別の試験等で“電卓”として流用されないよう注意が必要である。

各操作の実行ボタンを押すことで行列の変形が実行される。数値を正しく入力することで計算過程が1つずつ縦に表示される（図3）が、適切でない入力を検出した場合は実行ボタンが押されても変形は進行しない。[\[元に戻す\]](#) ボタンはいわゆる変形の undo 機能であり、直前の変形を消去することができる。制限時間が指定されていない Moodle の小テストは、途中で小テスト画面を離れたり、ログアウトしたりすることでテストの一時中断ができる。本システムも一度行った変形操作を保存し、再開時には中断したときの状況を再現できるため、Moodle を使い慣れた学生であれば他の問題と同様にストレスなく取り組めるようになっている。

変形の完了は解答者が判断して操作を停止する（図4）。小テストが複数ページに渡る場合は、他のページの問題に解答をし終えた時点で、最後のページにある [\[テストを終了する...\]](#) ボタンをクリックして送信する。

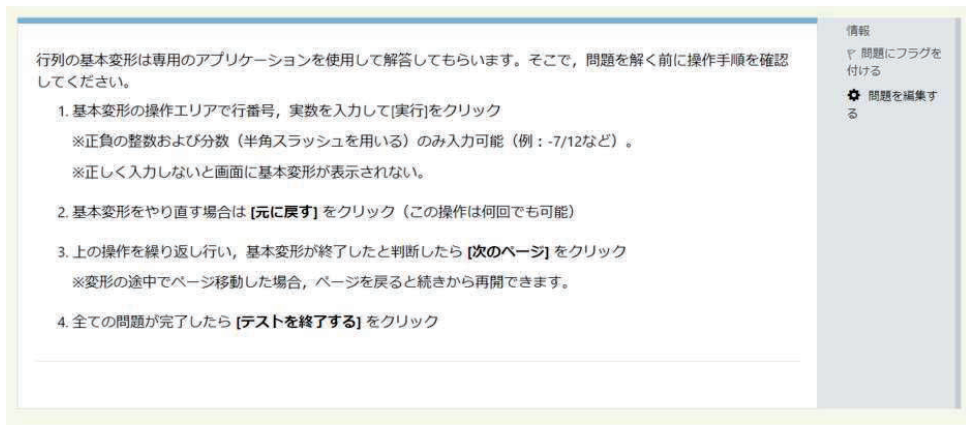


図 1: 説明画面

次の行列をガウス行列に基本変形しなさい。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1 ▾ 行目を 倍する 実行

1 ▾ 行目と 1 ▾ 行目を入れ替える 実行

1 ▾ 行目を 倍したものを 1 ▾ 行目に加える 実行

元に戻す

問題 1

未解答

最大評点 2.00

や 問題にフラグを付ける

問題を編集する

図 2: 問題画面

次の行列をガウス行列に基本変形しなさい。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

第1行目を1倍したものを第2行目に加えると
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

第1行目を3倍したものを第3行目に加えると
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

1 ▾ 行目を 倍する 実行

1 ▾ 行目と 1 ▾ 行目を入れ替える 実行

1 ▾ 行目を 倍したものを 1 ▾ 行目に加える 実行

元に戻す

問題 1

未解答

最大評点 2.00

や 問題にフラグを付ける

問題を編集する

図 3: 基本変形の実行

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
 第3行目を1倍したものを第1行目に加えると

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
 第3行目を-2倍したものを第2行目に加えると

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

▼ 行目を 倍する
 ▼ 行目と ▼ 行目を入れ替える
 ▼ 行目を 倍したものを ▼ 行目に加える

図 4: 基本変形の終了

3.3 教員側の確認画面

学生が送信した解答はレビュー画面から確認することができる（図5）。評価は変形後の行列のみを評価する完答形式としているため、変形過程の不備や解答の間違いの原因を自身で考えるよう学生に伝えている。基本変形は単位行列（あるいは一般にガウス行列）まで変形する操作となることがほとんどで、それらを理解していない学生を除いて多くが正しい結果を得ることができている。また、過去の利用者アンケートの中で、目的の行列にたどり着くまで何回もトライ&エラーを繰り返しているうちに変形の手順や法則性が理解できたという旨の回答がいくつかあった。これらのことから、当該講義と履修学生の特性上、途中計算に優劣をつける到達度テストというよりは、変形そのものに慣れてもらう道具として利用している。

次の行列をガウス行列に基本変形しなさい。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

第1行目を1倍したものを第2行目に加えると

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

第3行目を-2倍したものを第2行目に加えると

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

正しく基本変形されました。

問題 1

正解

2.00 / 2.00

問題をフラグを付ける

問題を編集する

図 5: 学生の受験結果

4 実際の活用例

前項で述べた例を基本として、当該講義では主に 3×3 , 3×4 , 3×6 , 4×4 などのサイズの行列を扱っており、いくつかのバリエーションを課題として選定している。

例えば、基本変形を連立方程式に利用する練習として、右左辺を分離する縦線をつけた行列を基本変形する問題と、各成分を係数にもつ方程式の解を求める問題を並べて出題している（図 6）。初めはこれらの問題の関連性に気付くことなく別個に解いていた学生がいたようだが、次第に行列を利用して解けるようになったという声がいくつか挙がっている。

また、文字を含んだ行列を変形させることで、方程式が解を持つ条件を求める問題にもつなげることができる。図 7 はガウス行列を理解しているか、そして媒介変数を含む解を求められるかを問うものである。同様の問題をノートで解かせた際、 $a - \frac{1}{3}$ と書くべきところを $\frac{1}{3}a$ などとする学生が一定数いたため本仕様を実装した。文字は最大 3 個まで対応しており（図 8）、変形によっては定数項の表現が異なるがいずれも正解となる。

さらに、行列の成分が多くなるだけミスをする可能性が高くなることから、逆行列を求める操作も本システムを用いて演習を行うことがある（図 9）。

次の行列をガウス行列に基本変形しなさい。

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 3 & -2 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 3 & 10 \end{array} \right)$$

第1行目を1/2倍すると

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 4 \\ 3 & -2 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 3 & 10 \end{array} \right)$$

第1行目を-3倍したものを第2行に加えると

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 4 \\ 0 & -7/2 & -5/2 & -11 \\ 4 & -7 & 3 & 10 \end{array} \right)$$

第3行目を-1/7倍したものを第1行に加えると

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5/7 & 22/7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

第3行目を-5/7倍したものを第2行に加えると

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

問題 1

未解答

最大評点 1.00

問題をフラグを付ける

問題を編集する

連立方程式

$$\begin{cases} 2x + y + z = 8 \\ 3x - 2y - z = 1 \\ 4x - 7y + 3z = 10 \end{cases}$$

の解は $x = \text{ } , y = \text{ } , z = \text{ }$ である。

※上の問題を参考に解いてよい。

1 行目を 倍する 実行

図 6: 3 元 1 次方程式の解

次の行列をガウス行列に基本変形しなさい。

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & a \end{array} \right)$$

第1行目を1/3倍すると

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & a \end{array} \right)$$

第1行目を-1倍したものを第3行に加えると

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1/3 & 2/3 & a - 1/3 \end{array} \right)$$

第2行目を-1/3倍したものを第1行に加えると

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -1/3 & 2/3 & a - 1/3 \end{array} \right)$$

第2行目を1/3倍したものを第3行に加えると

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & a - 1 \end{array} \right)$$

問題 3

未解答

最大評点 1.00

問題をフラグを付ける

問題を編集する

連立方程式

$$\begin{cases} 3x + y + z = 1 \\ -y + 2z = 2 \\ x + z = a \end{cases}$$

の解が存在するためには $a = \text{ }$ でなければならない,

また, このときの解は $x = t$ とおくと, それぞれ

$y = \text{ } , z = \text{ } - t$ である。

※上の問題を参考に解いてよい。

実行

図 7: 3 元 1 次方程式が解を持つ条件

次の行列をガウス行列に基本変形しなさい。

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & 2 & b \\ 1 & 0 & 1 & c \end{array}\right)$$

第1行目と第3行目を入れ替えると

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & c \\ 0 & -1 & 2 & b \\ 3 & 1 & 1 & a \end{array}\right)$$

第2行目を1倍したものを第3行目に加えると

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & c \\ 0 & 1 & -2 & a-3c \\ 0 & 0 & 0 & a+b-3c \end{array}\right)$$

次の行列をガウス行列に基本変形しなさい。

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & 2 & b \\ 1 & 0 & 1 & c \end{array}\right)$$

第1行目を1/3倍すると

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3a \\ 0 & -1 & 2 & b \\ 1 & 0 & 1 & c \end{array}\right)$$

第2行目を-1/3倍したものを第1行目に加えると

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1/3a + 1/3b \\ 0 & 1 & -2 & -b \\ 0 & 0 & 0 & -1/3a - 1/3b + c \end{array}\right)$$

図 8: 文字を含む変形

次の行列の左側3列をガウス行列に基本変形しなさい。

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

第2行目と第1行目を入れ替えると

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

第1行目を1倍したものを第2行目に加えると

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

第3行目を1倍したものを第1行目に加えると

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

第3行目を2倍したものを第2行目に加えると

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

問題 3

解答保存済み

最大評価 2.00

問題にフラグを付ける

問題を編集する

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{pmatrix}$$

※上の問題を参考に解いてよい。

図 9: 逆行列を求める

5 利用者からの評価

当該講義の第 14 回目で、本システムを利用した課題についてアンケート（1 とてもそう思う、2 まあそう思う、3 どちらともいえない、4 あまりそうは思わない、5 全くそうは思わない）を実施したところ、履修者 78 名中 65 名（回答率 0.83）から回答を得られた（表 1）。最初の 3 項目については 6 割以上の学生が 1 または 2 と評価をしているが、同様の回答が 8 割程度だった 2021 年度（[1]）に比べると低く留まっている。2021 年度はコロナ禍のため実習系科目を除く大学の全ての講義が、学籍番号の偶奇で履修生を半

分に分け、対面授業と遠隔授業を隔週に入れ替える形式を取っていた。本教材は、体調不良、機材・通信のトラブル等で満足に授業が受けられない学生向けに開発したものであるが、そういった問題が存在しない現在では導入部分のみに使用する方が適当であっただろうか。また、当該講義の履修者が今年度78名（例年は130名前後）であり、習熟度にそこまで顕著な差が出なかった可能性もある。しかし、依然として4割近く（2021年度は41%）の学生が本システムを併用して学修したいと回答していることから、一定の効果を上げられたと考えられる。

自由記述欄への回答は64件あった。主なものとして、使いやすかった（38件）、計算ミスがなく便利だった（17件）、間違えたときに元に戻せるのがよかった（5件）、少し使いにくいと感じた（3件）、操作に手間取った（2件）、読み込みが長かった（2件）、操作に慣れるまで時間がかかった（1件）、全角と半角を間違えてしまい戸惑った（1件）、自分の頭で考えることも重要だと思った（1件）、などであった。

表 1: 2023 年度授業アンケート結果 ($N = 78$)

	1	2	3	4	5
楽しく学修ができる	26(40%)	19(29%)	10(15%)	7(11%)	3(5%)
基本変形を理解しやすい	25(38%)	13(20%)	17(26%)	6(9%)	4(6%)
操作が容易である	31(48%)	12(18%)	10(15%)	8(12%)	4(6%)
手計算のみで学修を行いたい	17(26%)	8(12%)	16(25%)	18(28%)	6(9%)

6 おわりに

本稿では、行列の基本変形を支援する e ラーニングツールの実践とその評価について紹介した。本教材は 2020 年度のコロナ禍で著者が遠隔授業用に開発したシステムであったが、対面授業に戻った現在でも一定の評価を得ることができた。また、Moodle の小テストモジュールを使用するため、教員側に必要以上の負担をかけることなく評定や集計が可能である。

しかしながら、基本変形をある程度理解できてしまうと連立方程式であろうが逆行列だろうが同じ操作の繰り返しになってしまい、変形そのものを補助する意義が薄れてしまう。また、手間を無視できる自動計算ではアルゴリズム的な変形手順を踏むケースが多く、手計算特有の分数を回避してミスを少なくする工夫などが定着しづらい可能性も否定はできない。したがって、本教材は基本変形の初回や初回の復習に導入し、以降の課題は学修者自身で計算をしてもらう方が効果的と考えられる。

今後はより使いやすいインターフェース、より柔軟な評定が実装できるよう改良を重ねていく予定である。

参考文献

- [1] 小形優人: 行基本変形に関する e ラーニング支援システムの開発と実践, 金沢学院大学紀要 20, pp.269–274, 2022.
- [2] 田中円, 樋口三郎: 線形代数における計算アルゴリズム学習支援システムの開発と評価, 教育システム情報学会研究会報告 32, pp.47–52, 2017.
- [3] 樋口三郎: 基本変形による行列簡約化の学修支援システムとその授業内での試用, 数理解析研究所講究録 2142, pp.169–173, 2019.
- [4] 樋口三郎: 線形代数における行列簡約化アルゴリズム学習支援システムの開発と学習履歴の分析, 教育システム情報学会 2022 年度第 6 回研究報告 37-6, p.44–49, 2023.
- [5] Moodle.org: オープンソースの e ラーニングプラットフォーム, <https://moodle.org/>.