

定数係数の線型偏微分方程式に類比的な
多段階差分方程式の行列理論

九 大 理 柴 垣 和 三 雄
福岡教育大 丸 木 五 一

§1 線型偏微分方程式の初期値問題に類比的な差分問題

最も簡単な典型的問題として、つぎの初期値問題を取り上げる。

$$(0) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t) \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & (0 \leq t) \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) & (0 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

この問題は $L^2[0, 1]$ 関数空間において適切で Lax 理論では L^2 ノルムに基いて近似理論が展開されているのであるが、ここでは問題が滑かな関数の空間においても適切であるので、実用的見地からはより望ましい $\sup$ ノルムに基く近似理論を展開しようと思う。

正間 $[0, 1]$ を $M+1$ 等分して

$$h = \Delta x = \frac{1}{M+1}, \quad k = \Delta t$$

とおき、格子点関数

$$u(jh, nk) = u_j^n \quad (j=1, \dots, M; \quad n=0, 1, 2, \dots)$$

を考える。つねに $u_0^n = u_{M+1}^n = 0$ であるので、 $(u_j^n, j=1, \dots, M)$ なる M 次元ベクトル u_n を対象にできる。滑かな関数に対しては、

$$u_{tt}(x, t) = \frac{u(x, t+k) - 2u(x, t) + u(x, t-k)}{k^2} + O(k^2),$$

$$\begin{aligned}
 u_{xx}(x, t) &= \frac{u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)}{h^2} + O(h^2) \\
 &= \frac{u(x+h, t+k) - 2u(x, t+k) + u(x-h, t+k)}{h^2} + O(h^2 + k + \frac{k^3}{h^2})
 \end{aligned}$$

が成り立つ。それで $u_{tt} = u_{xx}$ の滑かな解 $u(x, t)$ に対しては、陽表公式

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{k^2} = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} + O(h^2 + k^2)$$

あるいは陰伏公式

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{k^2} = \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} + O(h^2 + k + \frac{k^3}{h^2} + k^2)$$

が成り立つ。以下で $r = \frac{k}{h} = \text{constant}$ として $k \rightarrow 0$ にやることを考えるので、そのときは陽表型は

$$u_j^{n+1} = r^2 u_{j+1}^n + 2(1-r^2)u_j^n + r^2 u_{j-1}^n - u_j^{n-1} + O(k^4)$$

あるいは

$$(1) \quad u_{n+1} = A^{(0)} u_n + A^{(1)} u_{n-1} + \delta_n$$

とかける。ここに

$$A^{(0)} = \begin{bmatrix} & & \dots & & \\ & \dots & r^2, & 2(1-r^2), & r^2, & \dots \\ & & & & & \\ & & & \dots & & \end{bmatrix} \quad (\text{tridiagonal})$$

$A^{(1)} = -I$: $M \times M$ 型単位行列

δ_n は $O(k^4)$ の列行列

陰伏型は

$$r^2 u_{j+1}^{n+1} - (1 + 2r^2) u_j^{n+1} + r^2 u_{j-1}^{n+1} = -2u_j^n + u_j^{n-1} + O(k^3)$$

あるいは

$$Fu_{n+1} = -2Iu_n + Iu_{n-1} + O(k^3),$$

でここに

$$F = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & r^2 & -(1+2r^2) & r^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

F^{-1} を乗ずれば, また (1) の形になる. ただし δ_n は今度は $O(k^3)$ のものである.

もし類比公式として

$$\begin{aligned} & (1+p) \left(\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{k^2} \right) - p \left(\frac{u_j^n - 2u_j^{n-1} + u_j^{n-2}}{h^2} \right) \\ &= \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} + O\left(h^2 + k + \frac{k^3}{h^2} + k^2 + h + \frac{h^3}{k^2}\right) \end{aligned}$$

を用いれば, これは

$$u_{n+2} = A^{(0)} u_{n+1} + A^{(1)} u_n + A^{(2)} u_{n-1} + \delta_{n+1}$$

の形で, ここに $\delta_{n+1} = O(k^3)$

一般に order $(m+1)$ あるいは $(m+2)$ levels の差分方程式

$$(2) \quad u_{n+m} = A^{(0)} u_{n+m-1} + A^{(1)} u_{n+m-2} + \dots + A^{(m)} u_{n-1}$$

は, $r = k/h = \text{constant}$ で $k \downarrow 0$ にやるとき, 偏微分方程式 (0) の滑かな解 u に対する差

$$\delta_{n+m-1} = u_{n+m} - A^{(0)}u_{n+m-1} - \dots - A^{(m)}u_{n-1}$$

が $O(k^2)$ になるとき, 偏微分方程式 (0) に類比的な差分方程式であるといい, $O(k^2)$ の 0 への収束がはやいものほど近似の精度のよい公式であるという.

§2. 差分方程式 $u_{n+m} = A^{(0)}u_{n+m-1} + A^{(1)}u_{n+m-2} + \dots + A^{(m)}u_{n-1} + \delta_{n+m-1}$ の一般理論.

ここに $A^{(0)}, A^{(1)}, \dots, A^{(m)}$ は任意の $M \times M$ 型定行列である.

$m=1$ の場合で考える.

$$(3) \quad u_{n+1} = A^{(0)}u_n + A^{(1)}u_{n-1} + \delta_n$$

初期値問題としては u_0, u_1 given として, $u_1, u_2, \dots$ を定める問題であるが, 一般的には n は任意の整数としてよい. つぎつぎに代入すると

$$(4) \quad u_{n+1} = P_n^{(0)}u_1 + P_n^{(1)}u_0 + q_{n+1}$$

の表示が得られる. ここに $P_n^{(0)}, P_n^{(1)}$ は $A^{(0)}, A^{(1)}$ により依存する $M \times M$ 型行列, q_{n+1} は $\delta_1, \dots, \delta_n$ の 1 次形式で係数は同様な行列のものである. これらの性質をしらべると,

まず

$$(5) \quad P_{n+1}^{(0)} = A^{(0)}P_n^{(0)} + A^{(1)}P_{n-1}^{(0)},$$

$$(6) \quad p_{n+1}^{(1)} = A^{(0)} p_n^{(1)} + A^{(1)} p_{n-1}^{(1)},$$

$$(7) \quad q_{n+1} = A^{(0)} q_n + A^{(1)} q_{n-1} + \delta_n.$$

$p_n^{(0)}, p_n^{(1)}$ はともに斉次方程式

$$(8) \quad u_{n+1} = A^{(0)} u_n + A^{(1)} u_{n-1}$$

の解で、つぎの初期条件をみたす:

$$(9) \quad p_0^{(0)} = I, \quad p_1^{(0)} = A^{(0)},$$

$$(10) \quad p_0^{(1)} = 0, \quad p_1^{(1)} = A^{(1)}.$$

q_n は非斉次方程式 (3) の解で、つぎの初期条件をみたす:

$$(11) \quad q_0 = q_1 = 0.$$

また初期条件 $C_0 = A^{(0)}$ に対する order 1 の差分方程式

$$(12) \quad C_n = A^{(0)} + A^{(1)} C_{n-1}^{-1}$$

の解が $C_n = p_{n+1}^{(0)} (p_n^{(0)})^{-1}$ なることがわかる。また

$$(13) \quad p_n^{(1)} = p_{n-1}^{(0)} A^{(1)},$$

$$(14) \quad C_{n-1} C_{n-2} \cdots C_1 C_0 = p_n^{(0)}$$

なる関係がいえる。また非斉次方程式 (3) の初期値 u_0, u_1 に対する解が (4) で与えられ、それにおいて

$$(15) \quad q_{n+1} = \sum_{i=1}^n P_{n-i}^{(0)} \delta_i$$

となることがいえる。

m が一般なときにも同様なことがいえる。

$$(16) \quad u_{n+m} = A^{(0)} u_{n+m-1} + \cdots + A^{(m)} u_{n-1} + \delta_{n+m-1}$$

に属する漸次方程式

$$(17) \quad u_{n+m} = A^{(0)} u_{n+m-1} + \cdots + A^{(m)} u_{n-1} .$$

逐次代入により得られるべき式

$$(18) \quad u_{n+m} = P_n^{(0)} u_m + P_n^{(1)} u_{m-1} + \cdots + P_n^{(m)} u_0 + q_{n+m}$$

における $P_n^{(0)}, P_n^{(i)}$ ($i = 1, \cdots, m$) はいずれも (17) をみたし,

$$(19) \quad \begin{cases} P_0^{(0)} = I , \\ P_1^{(0)} = A^{(0)} P_0^{(0)} , \\ P_2^{(0)} = A^{(0)} P_1^{(0)} + A^{(1)} P_0^{(0)} , \\ \dots\dots\dots \\ P_m^{(0)} = A^{(0)} P_{m-1}^{(0)} + A^{(1)} P_{m-2}^{(0)} + \cdots + A^{(m-1)} P_0^{(0)} \end{cases}$$

および類似の式をみたすが、著しい関係として

$$(20) \quad P_n^{(i)} = P_{n-1}^{(0)} A^{(i)} + P_{n-2}^{(0)} A^{(i+1)} + \cdots \quad (i=1, \cdots, m)$$

がいえ。ただし右辺で $A^{(m+1)}, A^{(m+2)}, \dots$ 等の項は 0 とおくものとする。

また非線型方程式

$$(21) \quad C_n = A^{(0)} + A^{(1)} C_{n-1}^{-1} + A^{(2)} (C_{n-1} C_{n-2})^{-1} + \dots + A^{(m)} (C_{n-1} C_{n-2} \dots C_{n-m})^{-1}$$

の初期条件 $C_n = P_{n+1}^{(0)} (P_n^{(0)})^{-1} \quad (n = 0, 1, \dots, m-1)$ に対する解が

$$(22) \quad C_n = P_{n+1}^{(0)} (P_n^{(0)})^{-1} \quad (n = m, m+1, \dots)$$

なること、したがって表示

$$(23) \quad C_{n-1} C_{n-2} \dots C_1 C_0 = P_n^{(0)}$$

がいえ。

非斎次方程式 (16) の初期値 $u_0, u_1, \dots, u_m$ に対する解は (18) で

$$(24) \quad q_{n+m} = \sum_{i=m}^{n+m-1} P_{n+m-i-1}^{(0)} \delta_i$$

としたもので与えられる。

§3. 類比差分方程式 (16) の係数が §1 に述べたような特別な 3-対角行列の場合の解

$$(25) \quad A^{(i)} = a_i I + \alpha_j J \quad (i=0, 1, \dots, m)$$

ここに a_i, α_j は実数,

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & \\ 1 & 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{のときは}$$

1 次変換

$$(26) \quad v_n = T u_n$$

$$(27) \quad T = \left(\sin \frac{ij\pi}{M+1}, \begin{matrix} i+1, \dots, M \\ j=1, \dots, M \end{matrix} \right), \quad T^{-1} = \frac{2}{M+1} T$$

によつて, (16) は

$$(28) \quad v_{n+m} = B^{(0)} v_{n+m-1} + B^{(1)} v_{n+m-2} + \dots + B^{(m)} v_{n-1} + \epsilon_{n+m-1}$$

に直される. ここに

$$(29) \quad B^{(i)} = T A^{(i)} T^{-1} = a_i I + 2\alpha_i G,$$

$$(30) \quad G = \text{Diag} \left(\cos \frac{\pi}{M+1}, \cos \frac{2\pi}{M+1}, \dots, \cos \frac{M\pi}{M+1} \right).$$

すなわち

$$(31) \quad x_j^{(i)} = a_i + 2\alpha_i \cos \frac{ij\pi}{M+1} \quad (i=0, 1, \dots, M; j=1, \dots, M)$$

とおけば

$$(32) \quad B^{(i)} = \text{Diag} (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_M^{(i)})$$

まず漸次方程式

$$(33) \quad v_{n+m} = B^{(0)} v_{n+m-1} + \dots + B^{(m)} v_{n-1}$$

の特解を $v_n = \rho^n C$, $C = [\gamma_1, \dots, \gamma_M]'$ の形で求めると,

$$\begin{bmatrix} \rho^{m+1} - x_1^{(0)} \rho^m - x_1^{(1)} \rho^{m-1} - \dots - x_1^{(m)}, \\ \rho^{m+1} - x_2^{(0)} \rho^m - x_2^{(1)} \rho^{m-1} - \dots - x_2^{(m)}, \dots, 0 \\ \vdots \\ 0, \rho^{m+1} - x_M^{(0)} \rho^m - x_M^{(1)} \rho^{m-1} - \dots - x_M^{(m)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_M \end{bmatrix} = 0$$

$$(34) \quad \rho_{j,s} \quad (s=1, \dots, m+1)$$

を j 番目の方程式

$$(35) \quad \rho^{m+1} - x_j^{(0)} \rho^m - x_j^{(1)} \rho^{m-1} - \dots - x_j^{(m)} = 0$$

の $(m+1)$ 個の根とし、これら $(m+1)$ 個の根は相異なるとすれば、これに対する固有ベクトルを一定な

$$(36) \quad C_j = (\delta_{kj}, k+1, \dots, M)$$

にとつて、一般解は次式で与えられる：

$$(37) \quad v_n = \sum_{j=1}^M \left\{ \sum_{s=1}^{m+1} C_{j,s} \rho_{j,s}^n C_j \right\}$$

ここに $C_{j,s}$ は $(m+1)M$ 個の任意定数である。

$$(38) \quad TP_n^{(0)} T^{-1} = \tilde{p}_n^{(0)},$$

$$(39) \quad v_{n+m} = \tilde{p}_n^{(0)} v_m + \tilde{p}_n^{(1)} v_{m-1} + \dots + \tilde{p}_n^{(m)} v_0$$

で定義される対角行列 $\tilde{p}_n^{(0)}$ は、漸次方程式 (28) を初期条件

$$(40) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{p}_0^{(0)} = I, \\ \tilde{p}_1^{(0)} = B^{(0)} \tilde{p}_0^{(0)} \\ \tilde{p}_2^{(0)} = B^{(0)} \tilde{p}_1^{(0)} + B^{(1)} \tilde{p}_0^{(0)}, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \tilde{p}^{(0)} = B^{(0)} \tilde{p}_{m-1}^{(0)} + B^{(1)} \tilde{p}_{m-2}^{(0)} + \dots + B^{(m-1)} \tilde{p}_0^{(0)} \end{array} \right.$$

で満たすことから，上の一般解を利用して容易に決定される．

たとえば $\tilde{p}_n^{(0)}$ の第 1 列の決定は

$$\begin{array}{l} \sum C_{1,s}=1, \sum C_{1,s} \rho_{1,s} = x_1^{(0)}, \sum C_{1,s} \rho_{1,s}^2 = (x_1^{(0)})^2 + x_1^{(1)}, \dots, \sum C_{1,s} \rho_{1,s}^m =, \\ \sum C_{2,s}=0, \sum C_{2,s} \rho_{2,s}=0, \sum C_{2,s} \rho_{2,s}^2 = 0, \dots, \sum C_{2,s} \rho_{2,s}^m = 0, \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \sum C_{M,s}=0, \sum C_{M,s} \rho_{M,s}=0, \sum C_{M,s} \rho_{M,s}^2 = 0, \dots, \sum C_{M,s} \rho_{M,s}^m = 0, \end{array}$$

(ここに $\sum$ は $\sum_{s=1}^{m+1}$, $\otimes = x_1^{(0)}, x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(m-1)}$ についての多項式) より $C_{1,s} = \gamma_{1,s}$, $C_{2,s} = \dots = C_{M,s} = 0$ と定められることから,

$$(41) \quad \left[\sum_{s=1}^{m+1} \gamma_{1,s} \rho_{1,s}^n, 0, \dots, 0 \right]'$$

となる．かくて

$$(42) \quad \tilde{p}_n^{(0)} = \begin{bmatrix} \sum_{s=1}^{m+1} \gamma_{1,s} \rho_{1,s}^n & 0 & \\ 0 & \sum_{s=1}^{m+1} \gamma_{2,s} \rho_{2,s}^n & 0 \\ 0 & & \sum_{s=1}^{m+1} \gamma_{M,s} \rho_{M,s}^n \end{bmatrix}$$

つぎに他の行列 $p_n^{(i)}$ ($i=1, \dots, m$) の表現については, (20) に相当する式

$$(43) \quad \tilde{p}_n^{(i)} = \tilde{p}_{n-1}^{(0)B(i)} + \tilde{p}_{n-2}^{(0)B(i+1)} + \dots$$

に (42) の結果を用いれば得られる.

$$(44) \quad \tilde{p}_n^{(i)} = \begin{bmatrix} n-1 \text{ 次の } \{\rho_{1,s}\} \text{ の多項式,} & 0, \\ 0, & n-1 \text{ 次の } \{\rho_{2,s}\} \text{ の多項式,} \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ 0, & n-1 \text{ 次の } \{\rho_{M,s}\} \text{ の多項式} \end{bmatrix}$$

§ 4. 安定条件とその誤差および離差評価における意味

$u=u(x, t)$ を § 1 の冒頭に述べた問題 (0) の滑かな初期値に対する滑かな解

$U=U(x, t)$ を同じ初期値に対応する類比差分問題の格子点領域 $x=jh$

$t = nk$ ($j = 1, \dots, M; n = 0, 1, \dots, N, Nk \leq \tau$) における正確解.

このとき

$$(45) \quad e = U - u$$

を近似 U の u に対する誤差 (error) という, この誤差を $\sup$ ノルムで

評価し $r = k/h = \text{const.}$ のもとに $k \rightarrow 0$ ならしめるとき $\|e\| \rightarrow 0$ となる可能性をしらべる. 類比差分方程式の定義から

$$(46) \quad e_{n+m} = A^{(0)} e_{n+m-1} + \cdots + A^{(m)} e_{m-1} + (-\delta_{n+m})$$

$$(47) \quad \delta_{n+m} = O(k^{2+\alpha}), \quad \alpha > 0$$

が成り立つ. 定理 3 より

$$(48) \quad e_{n+m} = p_n^{(0)} e_m + p_n^{(1)} e_{m-1} + \cdots + p_n^{(m)} e_0 + (-q_{n+m})$$

とかけるが, ここに $e_m = e_{m-1} = \cdots = e_0 = 0$ であるから

$$(49) \quad e_{n+m} = -q_{n+m} = -\sum_{i=m+1}^{n+m} p_{n+m-i}^{(0)} \delta_i.$$

$$(50) \quad \therefore \|e_{n+m}\| \leq \sum_{i=m+1}^{n+m} \|p_{n+m-i}^{(0)}\| \cdot \|\delta_i\|.$$

(47) を考慮すれば, もし r のある閉区間 I_r と $n=0, 1, \dots, N$ に
関し一様に

$$(51) \quad \|p_n^{(0)}\| = O\left(\frac{1}{k^{1+\beta}}\right), \quad 0 \leq \beta < \alpha$$

が成り立てば

$$(52) \quad \|e_{n+m}\| = O(k^{\alpha-\beta}) = O(1)$$

を得る. 条件 (51) を類比差分問題の安定条件という. これが満足されれば, $\sup$ ノルムにおいて収束性 $U \rightarrow u$ が成り立つ. つぎに

$u^* = u^*(x, t)$ を上の差分問題の近似解とする, したがって

$$(53) \quad u_{n+m}^* = A^{(0)} u_{n+m-1}^* + \dots + A^{(m)} u_{n-1}^* + \delta_{n+m}^*,$$

$$(54) \quad u_0^* = u_0 + \delta_0^*, \dots, \quad u_m^* = u_m + \delta_m^*$$

で、ここに $\delta_0^*, \dots, \delta_m^*$ は $u_0, \dots, u_m$ を計算する際の計算誤差、

δ_{n+m}^* は与えられた $u_{n+m-1}, \dots, u_{n-1}$ に対して

$A^{(0)} u_{n+m-1} + \dots + A^{(m)} u_{n-1}$ を計算するとき生ずる総計算誤差を表わす。

$$(55) \quad d = u^* - U$$

を近似 u^* の U に対する離差 (departure) という。

$$(56) \quad d_{n+m} = A^{(0)} d_{n+m-1} + \dots + A^{(m)} d_{n-1} + \delta_{n+m}^*,$$

$$(57) \quad d_0 = \delta_0^*, \dots, \quad d_m = \delta_m^*$$

により

$$(58) \quad d_{n+m} = P_n^{(0)} d_m + P_n^{(1)} d_{m-1} + \dots + P_n^{(m)} d_0 + q_{n+m}^*,$$

$$(59) \quad q_{n+m}^* = \sum_{i=m+1}^{n+m} P_{n+m-i}^{(0)} \delta_i^*$$

いま

$$(60) \quad \max \{ \|\delta_i^*\|, \quad i = 0, 1, \dots, m; m+1, \dots, N \} = \bar{\delta}$$

とおけば、安定条件のもとに

$$(61) \quad \|q_{n+m}^*\| = \bar{\delta} \cdot O\left(\frac{1}{k^{2+\beta}}\right)$$

したがって

$$(62) \quad \|d_{n+m}\| = \bar{\delta} \cdot O\left(\frac{1}{k^{2+s}}\right)$$

を得る。 $\bar{\delta}$ を固定して $k \rightarrow 0$ ならしめれば、離差は無限大になるが、このような手続きは数値計算では意味がない。数値計算では k を固定したとき $\bar{\delta}$ を十分小さくとれば離差がいくらでも小さくできることが重要で、このことは安定条件のもとで達せられることがわかる。

§3 に述べた特別な場合には、

$$(63) \quad P_n^{(0)} = T^{-1} \tilde{P}_n^{(0)} T = \frac{2}{M+1} T \tilde{P}_n^{(0)} T$$

で、ここに $\|T\| \leq M$ と見積られるから

$$(64) \quad \|P_n^{(0)}\| \leq \frac{2M^2}{M+1} \|\tilde{P}_n^{(0)}\|$$

この特別な場合には

$$(65) \quad |\rho_{j,s}| \leq 1 \quad (j=1, \dots, M; s=1, \dots, m+1)$$

と、 $\rho_{j,s}$ ($s=1, \dots, m+1$) が相異なることが安定のために十分であることが示され、 $\tilde{P}_n^{(0)}$ に対する一様有界性

$$(66) \quad \|\tilde{P}_n^{(0)}\| \leq A$$

と $P_n^{(0)}$ の行動

$$(67) \quad \|P_n^{(0)}\| = O\left(\frac{1}{k}\right)$$

が得られる。