

非線型 Sturm-Liouville 問題の解の漸近挙動

沼津工高専 柴田徹太郎 (Tetsutaro Shibata)

次の 2-parameter の、非線型 Sturm-Liouville 問題を考える:

$$(1) \quad \begin{cases} -u''(x) = \mu u(x) - \lambda (u(x) + |u(x)|^{p-1}u(x)), & 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

ここで, $p > 1$: 定数, $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$: parameters.

この方程式のひな形になる線形方程式は次のものである:

$$(2) \quad \begin{cases} -u''(x) = \mu f(x)u(x) - \lambda r(x)u(x), & 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

ここで $r(x) > 0$ for $0 \leq x \leq 1$ を仮定する.

(2) の方程式について, Binding & Browne (J. Diff. Eq. 88, 1990)

は次のような結果を導いた:

定理 A (B & B) $\mu \in \mathbb{R}$: given に対し, $\exists!$ $\lambda^n(\mu)$ (n 個の内点の零点をもつ固有関数に対応する固有値) に対し,

$$(3) \quad \lambda_n^2(\mu) \longrightarrow c := \operatorname{ess-sup}_{x \in [0,1]} f(x)/h(x) \text{ as } \mu \rightarrow \infty.$$

この定理の証明に使われた手法は, Prüfer 変換:

$$\tan \theta(x) := u(x)/u'(x)$$

により, (2) を $\theta(x)$ に関する方程式に直し, 陰関数定理を用いたものである。

さて, 我々の方程式 (1) に関して, 変分法を用いてこのような漸近挙動を調べたいが, (1) は非線型方程式なので, (2) のように, $\mu \in \mathbb{R}$ を fix しても $\lambda_n^2(\mu)$ が一意に定まらなく, パラメータを必要とする。ここでは, Zeidler (Math. Nachr. 1986) によって導入された, general level set における, Ljusternik-Schnirelman 理論により求まる (1) の固有値, 固有関数について定理 A のようなことを示したい。ここでいう general level set とは, $\alpha < 0$ を parameter として,

$$N_{\alpha, \mu} := \left\{ u \in \tilde{W}^{1,2}(0,1) ; \int_0^1 u'(x)^2 dx - \mu \int_0^1 u(x)^2 dx = 2\alpha, \alpha < 0 \right\}$$

のことで, general とは, 一般に, $N_{\alpha, \mu}$ は球と同相でないことをいっている。

Remark. この定義より, $\alpha < 0$ から, $\mu > \pi^2$ とならなければならないことがわかる。

さて, 我々の考える, 第 n 変分固有値 $\lambda_n(\alpha, \mu)$ とは, 次の条件を満たす固有関数 $u_n(\alpha, \mu, x) \in N_{\alpha, \mu}$ が存在するとき

をいう: $u_n(\alpha, \mu, x)$ は $x=0$ の近傍で正であり,

(a) $(u_n(\alpha, \mu, x), \lambda_n(\alpha, \mu)) \in N_{\alpha, \mu} \times \mathbb{R}$ は (1) をみたす。

$$(b) \quad \varphi(u) := \frac{1}{2} \int_0^1 u(x)^2 dx + \frac{1}{p+1} \int_0^1 |u(x)|^{p+1} dx$$

としたとき,

$$\varphi(u_n(\alpha, \mu, x)) = \beta_n(\alpha, \mu) := \inf_{K \in \Lambda_{n, \alpha, \mu}} \sup_{u \in K} \varphi(u)$$

をみたす。ここで

$$\Lambda_{n, \alpha, \mu} := \{K \subset N_{\alpha, \mu} : K : \text{cpt}, 0 \notin K, \text{symmetric}, \gamma(K) \geq n\},$$

$$\gamma(K) := \inf \{j \in \mathbb{N} : \exists h : K \rightarrow \mathbb{R}^j \setminus \{0\}; h : \text{odd, continu}\}$$

このとき存在定理としては,

定理 B (Zeidler) $n_0 \in \mathbb{N}$, $(n_0 \pi)^2 < \mu < ((n_0+1)\pi)^2$ と仮定し,

$\alpha < 0$, $\mu > \lambda_1$ を fix する。このとき, $1 \leq n \leq n_0$ に対し

$\lambda_n(\alpha, \mu)$, $u_n(\alpha, \mu, x)$ が存在する。

また, この定理 B に基づき, 定理 A のような漸近挙動を調べると, 次の 2通り考えられる:

$$(i) \quad \alpha < 0 : \text{fix } \mu \rightarrow \infty, \mu \rightarrow (n\pi)^2$$

$$(ii) \quad \mu > (n\pi)^2 : \text{fix } \alpha \rightarrow 0, \alpha \rightarrow -\infty$$

まず, 定理 A に対応するように, (i) の場合の, $\lambda_n(\alpha, \mu)$ と $u_n(\alpha, \mu, x)$ の挙動を調べよう。

Prop. 1 (一意性) $n_0 \in \mathbb{N}$ とし, $\mu > (n_0 \pi)^2$ とする。 α を

fix すると, このとき, $1 \leq n \leq n_0$ に対して $\lambda_n(\alpha, \mu)$ は

一意に定まる。

Prop. 2 (連続性) $\forall n_0 \in \mathbb{N}$, $\alpha < 0$: fix する。このとき $\mu > (n_0\pi)^2$ において, $1 \leq n \leq n_0$ に対して, $\lambda_n(\alpha, \mu)$ は μ について連続である。

証) Prop. 1 と, $\beta_n(\alpha, \mu)$ の μ に関する連続性を利用する。 //

従って, $\mu > (n_0\pi)^2$ において, $1 \leq n \leq n_0$ とし, $\lambda_n(\alpha, \mu)$ の曲線をかきこくことができる。

定理 1. $\mu \rightarrow \infty$ のとき,

$$(4) \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty} \lambda_n(\alpha, \mu) / \mu = 1.$$

さらに,

$$(5) \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty} \int_0^1 \mu u_n^2(\alpha, \mu, x) dx = 2(-\alpha).$$

Remark. 定理 A を, $r(x) = 1 + |u(x)|^{p-1}$ と思えば, $u(0) = u(1) = 0$, $f(x) \equiv 1$ なる Z^n ,

$$C := \operatorname{ess. sup}_{0 \leq x \leq 1} \frac{f(x)}{r(x)} = 1$$

となり, 定理 1 は, 定理 A に対応する。

次に, $\mu \rightarrow (n\pi)^2$ のときの $\lambda_n(\alpha, \mu)$ の挙動について

定理 2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha < 0$: fix に対し,

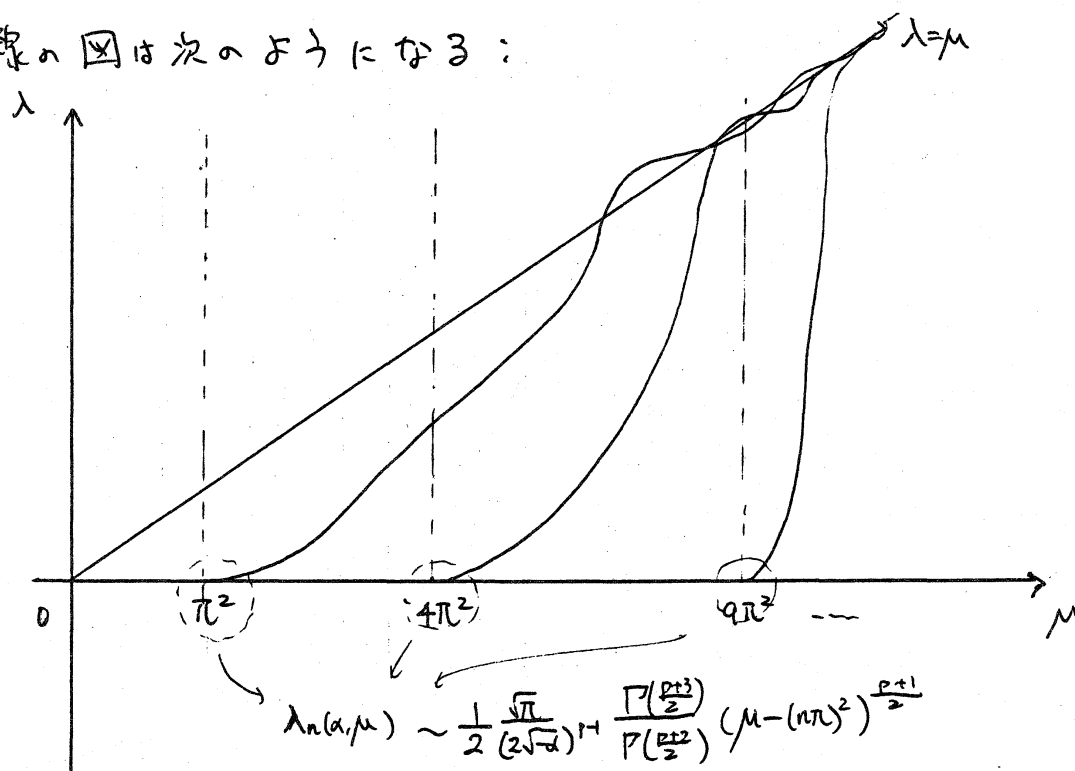
$$(6) \quad \lim_{\mu \downarrow (n\pi)^2} \lambda_n(\alpha, \mu) / (\mu - (n\pi)^2)^{\frac{p+1}{2}} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{2(\sqrt{-\alpha})^{p-1}} \frac{\Gamma(\frac{p+3}{2})}{\Gamma(\frac{p+2}{2})}$$

ここで $\Gamma(\beta) := \int_0^\infty x^{\beta-1} e^{-x} dx$ である。

さらに、

(7) $(\mu - (n\pi)^2)^{\frac{1}{2}} u_n(\alpha, \mu, x) \longrightarrow 2\sqrt{\alpha} \sin n\pi x$ as $\mu \rightarrow (n\pi)^2 \in W_{(0,1)}^{0,1,2}$.

以上の事柄により、 $\alpha < 0$: fix したときの、 $\lambda_n(\alpha, \mu)$ の曲線の図は次のようになる：



証明の手順 まず、定理1について、簡単なため、 $\lambda_1(\alpha, \mu)$ についてだけ方針を述べる。

(a) $w_\mu(x) := \mu^{\frac{1}{2}} u_1(\alpha, \mu, x)$ とおき、 $\mu \gg 1$ のとき、 $\exists c > 0$

$$c^{-1} < \int_0^1 w_\mu^2(x) dx < c$$

を示す。

(b) $\int_0^1 w_\mu^2(x) dx \xrightarrow{\mu \rightarrow \infty} 2(-\alpha)$ を示すか、 $\angle$ のとき

$2\sqrt{-\alpha} \sin \pi x / (\mu - \pi^2)^{\frac{1}{2}} \in N_{\alpha, \mu}$ であることを使う。

(c) $\alpha \geq 0$, 部分積分により,

$$\begin{aligned} 2\alpha &= \int_0^1 u_1'(\alpha, \mu, x)^2 dx - \mu \int_0^1 u_1^2(\alpha, \mu, x) dx \\ &= -\lambda_1(\alpha, \mu) \left[\int_0^1 u_1^2(\alpha, \mu, x) dx + \int_0^1 u_1^{p+1}(\alpha, \mu, x) dx \right] \end{aligned}$$

これより,

$$2(-\alpha) = \frac{\lambda_1(\alpha, \mu)}{\mu} \left(\int_0^1 \omega_\mu^2(x) dx + \frac{1}{\mu^{\frac{p+1}{2}}} \int_0^1 \omega_\mu^{p+1}(x) dx \right)$$

ここで

$$\frac{1}{\mu^{\frac{p+1}{2}}} \int_0^1 \omega_\mu^{p+1}(x) dx \rightarrow 0 \quad \text{as } \mu \rightarrow \infty \quad \text{を示す。}$$

従って, (b) と合わせて定理 1 を得る。

定理 2 についての証明の手順は次の通りである: 簡単のため, $n = 1$ とする。

(a) $\exists c > 0$ s.t. $\mu \downarrow \pi^2$ のとき,

$$c^{-1}(\mu - \pi^2)^{\frac{p+1}{2}} \leq \lambda_1(\alpha, \mu) \leq c(\mu - \pi^2)^{\frac{p+1}{2}}$$

を示す。このとき, Berestycki (1981) の解の *a priori* 評価:

$$(8) \quad \begin{cases} -u''(x) + f(u(x)) = \lambda u(x), & 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

ここで $f(u)$ は, $|u|^{p+1}u$ の性質と同一ような性質をもつものに対し, (u, λ) が (8) の正值解とすると, $f(u)/u$ の逆関数を χ として,

$$\chi(\lambda - \pi^2) \sin \pi x \leq u_\lambda(x) \leq \chi(\lambda), \quad 0 \leq x \leq 1$$

をかつ、

$$(B) \quad v_\mu(x) := (\mu - \pi^2)^{\frac{1}{2}} u_1(\alpha, \mu, x) \quad \text{とおく.}$$

$$v_\mu(x) \longrightarrow v_{\pi^2}(x) \quad \text{as } \mu \rightarrow \pi^2 \text{ in } W^{1,2}(0,1)$$

をいう。ここで、 $v_{\pi^2}(x)$ は、

$$\begin{cases} -u''(x) = \pi^2 u(x), & 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

の解である。よって、 $v_{\pi^2}(x) = C \sin \pi x$ とおす。

(C) $C = 2\sqrt{\alpha}$ であることを示す。ここで、

$$\tilde{u}(x) := 2\sqrt{\alpha} \sin \pi x / (\mu - \pi^2)^{\frac{1}{2}} \in N_{\alpha, \mu} \quad \text{であることを示す。}$$

$C \leq 2\sqrt{\alpha}$ を示せる。逆に定義より、

$$\begin{aligned} 2\alpha &= \int_0^1 u_1'^2(\alpha, \mu, x) dx - \mu \int_0^1 u_1^2(\alpha, \mu, x) dx \\ &= \int_0^1 u_1'^2(\alpha, \mu, x) dx - \pi^2 \int_0^1 u_1^2(\alpha, \mu, x) dx + (\pi^2 - \mu) \int_0^1 u_1^2(\alpha, \mu, x) dx \end{aligned}$$

があるから、定義より、

$$\begin{aligned} \int_0^1 v_\mu^2(x) dx &= 2(-\alpha) + \left[\int_0^1 u_1'^2(\alpha, \mu, x) dx - \pi^2 \int_0^1 u_1^2(\alpha, \mu, x) dx \right] \\ &\geq 2(-\alpha) \end{aligned}$$

ここで $\mu \downarrow \pi^2$ とし、

$$\int_0^1 v_{\pi^2}^2(x) dx = \frac{C^2}{2} \geq 2(-\alpha)$$

$$\therefore C \geq 2\sqrt{\alpha}$$

従って、定理2の(7)は示された。

このことより、

$$\lambda(\alpha, \mu) / (\mu - \pi^2)^{\frac{p+1}{2}} = 2(-\alpha) / \left\{ (\mu - \pi^2)^{\frac{p-1}{2}} \int_0^1 v_\mu^2(x) dx + \int_0^1 v_\mu^{p+1}(x) dx \right\}$$

$$\xrightarrow{\mu \downarrow \pi^2} 2(-\alpha) / \{ (2\sqrt{-\alpha})^{p+1} \int_0^1 \sin^{p+1} \pi x dx \}$$

となり, (6) が示された。

証明終

次に, $\mu > \pi^2$ を fix し, $\alpha \uparrow 0$, $\alpha \rightarrow -\infty$ のとき, $\lambda_n(\alpha, \mu)$, $u_n(\alpha, \mu, x)$ の挙動を調べる。

Prop. 3 ($\alpha < 0$ に関する連続性)

$n_0 \in \mathbb{N}$: fix, $(n_0\pi)^2 < \mu < ((n_0+1)\pi)^2$: fix する。このとき, $1 \leq n \leq n_0$ に対して, $\lambda_n(\alpha, \mu)$ は α に関して連続である。

定理 3 $(n_0\pi)^2 < \mu < ((n_0+1)\pi)^2$ とする。このとき, $1 \leq n \leq n_0$ に対し, $\alpha \uparrow 0$ のとき

$$(9) \quad \lambda_n(\alpha, \mu) = \mu - (n\pi)^2 + O(\sqrt{-\alpha}^{p-1})$$

さらに,

$$(10) \quad u_n(\alpha, \mu, x) / \sqrt{-\alpha} \xrightarrow{\alpha \uparrow 0} 2 \sin n\pi x / (\mu - (n\pi)^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{in } W^{0,2}_{(0,1)}$$

Remark. 定理 3 については, 次元が 2 以上でも, 十分に適切な条件を課せば成り立つ。

定理 4 μ は定理 3 のとおりとする。このとき, $\exists C_\mu > 0$: 定数 s.t. as $\alpha \rightarrow -\infty$

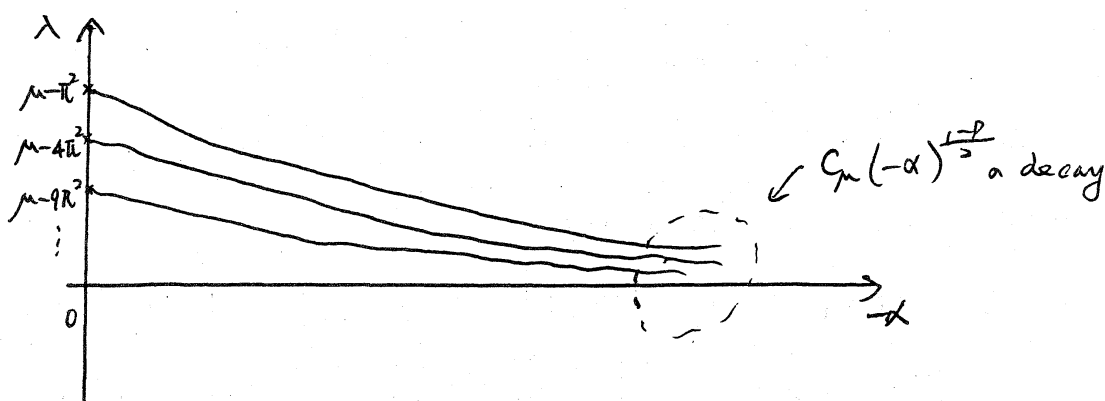
$$(11) \quad \lambda_n(\alpha, \mu) = C_\mu (-\alpha)^{\frac{1-p}{2}} + o((- \alpha)^{\frac{1-p}{2}})$$

ここで

$$C_\mu = 2 \left(\frac{\mu}{2} \right)^{\frac{p+1}{2}} + O(\mu^{\frac{p}{2}}) \quad \text{for } \mu \gg 1.$$

Remarks. C_μ は、(1) より 導かれるある非線形固有値問題の固有値を定めたときの固有関数のノルムのようなもので、一般の μ に対して求めるのは困難である。

Prop 3, 定理 3, 定理 4 を図にすると、次のようになる。



定理 3 の証明の方針

(a) $|1/\lambda_n(\alpha, \mu) - \beta_n(\alpha, \mu)/(-\alpha)| \leq \exists C(\sqrt{-\alpha})^{p-1}$ を示す。これは、まず、

$$\int_0^1 u_n'^2(\alpha, \mu, x) dx \leq \exists C(-\alpha)$$

を示して、これと

$$|-\alpha/\lambda_n(\alpha, \mu) - \beta_n(\alpha, \mu)| = (p-1) \int_0^1 |u_n^{p-1}(\alpha, \mu, x)| dx / (p+1)$$

より導かれる。

(b) $|\beta_n(\alpha, \mu)/(-\alpha) - 1/(\mu - (n\pi)^2)| \leq C(\sqrt{-\alpha})^{p-1}$

を示す。(a) と (b) を組み合わせると、(9) が示される。

(10) の場合、簡単のため、 $n=1$ とする。

$$(11) \quad \begin{cases} -u''(x) - \mu u(x) = -\lambda u(x), & 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

$$\text{と } v_\alpha(x) := u_1(\alpha, \mu, x)/\sqrt{-\alpha} \text{ とし}$$

$v_\alpha(x) \xrightarrow{\alpha \uparrow 0} v_0(x) \in \overset{\circ}{W}^{1,2}(0,1)$ を示す。ここでも、

$v_0(x)$ は (1) の非自明解である。

$$(b) \quad \int_0^1 v_\alpha'(x) dx - \mu \int_0^1 v_\alpha^2(x) dx = -2$$

を示す。これは、 $v_\alpha \in N_{-1,\mu}$ より示される。

$$(c) \quad \int_0^1 v_\alpha'^2(x) dx \xrightarrow{\alpha \uparrow 0} \int_0^1 v_0'^2(x) dx$$

を示す。従って、(a), (c) より $v_\alpha \rightarrow v_0$ in $\overset{\circ}{W}^{1,2}(0,1)$ が示され、(b) より、係数が定まる。

定理4の証明の手順 簡単のため、 $n=1$ とする。

$$(a) \quad \lambda_1(\alpha, \mu) / \alpha = -1 / \lambda_1(\alpha, \mu) \quad \text{を示す。}$$

$$(b) \quad \beta_1(\alpha, \mu) / (-\alpha)^{\frac{p+1}{2}} \xrightarrow{\alpha \rightarrow -\infty} \exists A_\mu \quad \text{を示す。}$$

(a), (b) を用いると、

$$\lambda_1(\alpha, \mu) = c_\mu (-\alpha)^{\frac{1-p}{2}} + o((- \alpha)^{\frac{1-p}{2}})$$

がわかる。ここでも、 $c_\mu = 2/(p+1)A_\mu$ である。

$$(c) \quad w_\alpha(x) := v_1(\alpha, \mu, x) / (-\alpha)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{(p+1)A_\mu}{2} \right)^{\frac{1}{p-1}} \quad \text{とおく。}$$

$\alpha \rightarrow -\infty$ のとき、

$$w_\alpha(x) \longrightarrow w_0(x) > 0 \quad \text{in } \overset{\circ}{W}^{1,2}(0,1)$$

を示す。ここでも $w_0(x)$ は、次の非線形 Sturm-Liouville 問題の解：

$$(12) \quad \begin{cases} -w''(x) + |w(x)|^{p-1} w(x) = \mu w(x), & 0 < x < 1, \\ w(0) = w(1) = 0 \end{cases}$$

(d) $\mu^2 := \int_0^1 \omega(x)^2 dx$ とするとき, $\mu \gg 1$ とき

$$(13) \quad \mu = \mu^{p+1} + O(\mu^{\frac{p-1}{2}})$$

が成り立つ。これより,

$$\int_0^1 \omega_0^2(x) dx = \mu^{\frac{2}{p+1}} (1 + O(\mu^{-\frac{1}{2}})) \quad \mu \gg 1$$

が成り立つ。このことを利用して, $\int_0^1 \omega_0^{p+1}(x) dx - \int_0^1 \omega_0^2(x) dx$ を計算し, 結論を得る。 証明終