

2次元水波問題の数値計算に対するトポロジー的手法を用いた誤差解析

東京大学 新領域創成科学研究科 複雑理工学専攻 村重 淳 (Sunao Murashige)

Department of Complexity Science and Engineering
Graduate School of Frontier Sciences, The University of Tokyo

1. はじめに

本研究では、水波の形状を求める問題の数値計算と、その計算結果に対する数値的検証について考えている。水波問題では水面の境界条件の非線形性が重要であり、興味深い非線形現象が観察されることはよく知られている [1]。そのような現象のメカニズムの解明は工学的にも重要であるが、非線形性の強い条件では精度の高い数値計算が要求される。本研究では、2次元水波に対して Fourier 級数展開を用いた数値計算法を適用し、さらにその計算結果の精度を Conley 指数の理論に基づいたトポロジー的手法により調べた。

2. 2次元水波問題

2.1 定式化

Fig.1(a)のように、水面を一定方向に一定速度 c で進み、流場が Z 方向に変化せず2次元であるときの波を2次元水波とよぶ。この問題は、Fig.1(b)のように、波とともに移動する xy 座標系で2次元定常問題として考えることができる。簡単のために、水深は無限大とする。2次元水波の解は、3次元的な水波の安定性や分岐現象を考えるときの基本解となるので非常に重要である [1]。

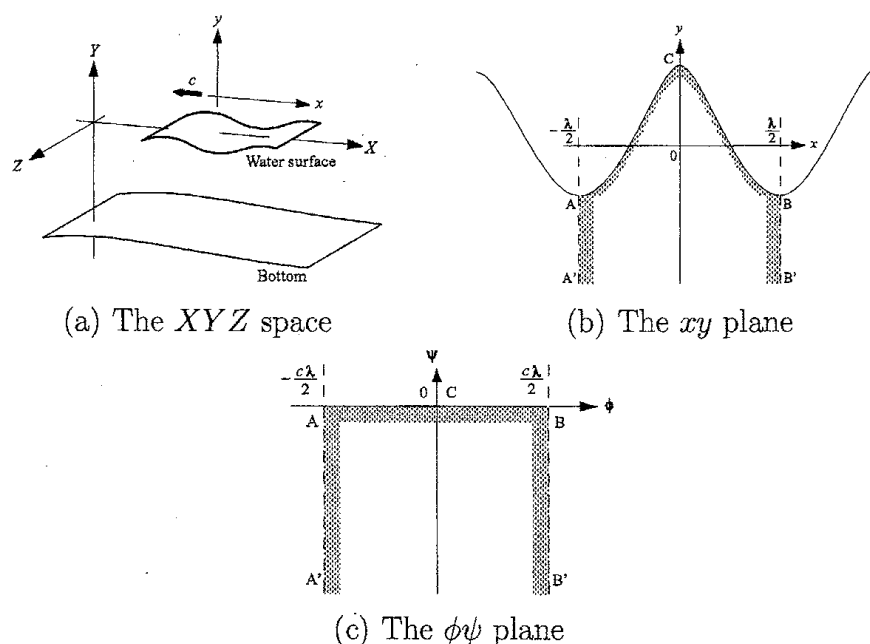


Fig.1 The two-dimensional water wave problem
(c : the wave speed, λ : the wave length)

水は非粘性，非圧縮で，流場は渦無しであると仮定すると，この2次元問題は速度ポテンシャル ϕ と流れ関数 ψ を用いて定式化することができる． (ϕ, ψ) を独立変数， (x, y) を従属変数として選ぶと，水面は $\psi = 0$ で与えられる (Fig.1(c))．波形は周期的で山における鉛直線に関して対称であると仮定すると，解析性より水面の xy 座標系における位置，すなわち波形は次のように Fourier 級数で与えられる．

$$x(\phi) = \frac{1}{c}\phi + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \sin j\phi, \quad y(\phi) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos j\phi. \quad (1)$$

ここで，Fourier 係数 a_j は実数で，長さは波長 λ が 2π となるように無次元化されている．水面の境界条件は，

$$q^2 + 2gy = c^2 \quad \text{at } \psi = 0, \quad (2)$$

で与えられる．ここで， q は流速の絶対値， g は重力加速度を表す．(1)と(2)より， a_j が満たすべき関係式は次式で与えられる．

$$\begin{cases} a_0 + a_1 a_1 + 2a_2 a_2 + 3a_3 a_3 + \cdots = -c^2 \\ a_1 + a_0 a_1 + 2a_1 a_2 + 3a_2 a_3 + \cdots = 0 \\ a_2 + a_1 a_1 + 2a_0 a_2 + 3a_1 a_3 + \cdots = 0 \\ a_3 + a_2 a_1 + 2a_1 a_2 + 3a_0 a_3 + \cdots = 0 \\ \vdots \end{cases} \quad (3)$$

上式は次のようにまとめて表すことができる．

$$F_j(\mathbf{a}) := a_j + \sum_{k=1}^{\infty} k a_{|k-j|} a_k = \begin{cases} -c^2 & (j=0) \\ 0 & (j=1, 2, \dots) \end{cases} \quad (4)$$

ここで， $\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ で，重力加速度が 1 となるように無次元されている．(3) あるいは (4) を Stokes 波方程式とよぶ．

2.2 近似解

Stokes 波方程式 (3) の近似解 $\tilde{a}_j$ を求める方法にはいくつかあるが [2]，ここでは Fourier 級数 a_j を $1+m$ 項 ($0 \leq j \leq m$) で打ち切り， a_0 をパラメータとして選ぶ方法を用いる．そのために，(3) を一つ目の式

$$a_0 + a_1 a_1 + 2a_2 a_2 + \cdots + m a_m a_m = -c^2, \quad (5)$$

と残りの m 個の式

$$\begin{cases} F_1 := a_1 + a_0 a_1 + 2a_1 a_2 + 3a_2 a_3 + \cdots + m a_{m-1} a_m & = 0 \\ F_2 := a_2 + a_1 a_1 + 2a_0 a_2 + 3a_1 a_3 + \cdots + m a_{m-2} a_m & = 0 \\ \vdots \\ F_m := a_m + a_{m-1} a_1 + 2a_{m-2} a_2 + 3a_{m-3} a_3 + \cdots + m a_0 a_m & = 0 \end{cases} \quad (6)$$

に分けて考える. まず, a_0 に適当な値を与え, $1 \leq j \leq m$ に対する (6) を Newton 法で解くことにより $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_m$ を求め, 次に (5) より波の進行速度 c を求める. Fig.2 はこの方法で得られた近似 Fourier 係数 $\tilde{a}_j$ を用いて求めた波形 (Fig.2(a)) と波の進行速度 c (Fig.2(b)) の計算例を表す. 高い波に対しては 300 項以上の Fourier 係数が必要である ($m \geq 300$). 計算結果は次式で定義されるパラメータ Q を用いてまとめられている ($0.5 \leq Q \leq 1$).

$$Q = 1 + \frac{1}{2}a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \quad (7)$$

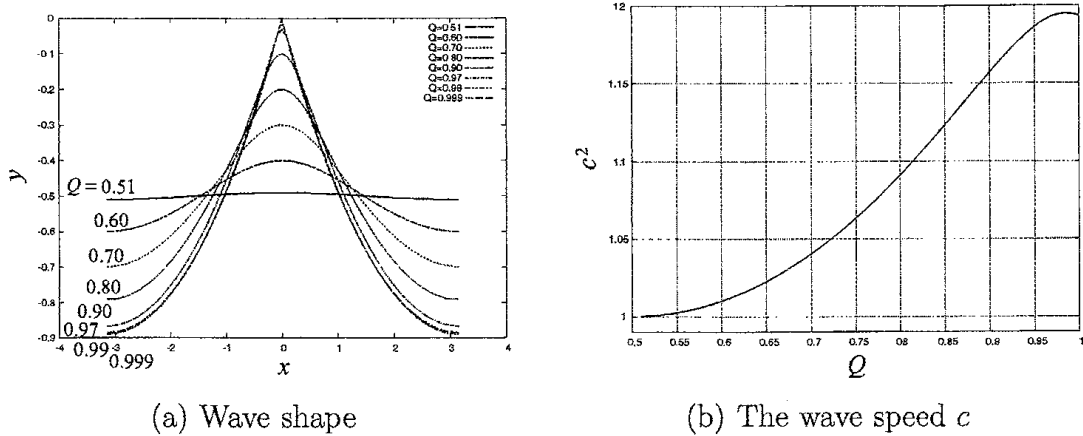


Fig.2 Approximate solutions ($m = 30$ for $Q \leq 0.7$, $m = 300$ for $Q > 0.7$)

(6) を数値的に解くために用いた Newton 法は, 波が高いときに特異になる場合がある. すなわち, (6) を $F(\mathbf{a}) = 0$ と表すと, それに対する Newton 法は

$$\mathbf{a}^{(\nu+1)} = \mathbf{a}^{(\nu)} - A^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{a}^{(\nu)}) \quad \text{with } A = \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{a}} \right|_{\mathbf{a}=\mathbf{a}^{(\nu)}} \quad (\nu = 0, 1, \dots), \quad (8)$$

で与えられるが, ヤコビ行列 A が特異になる場合がある. Fig.3 はヤコビ行列 A の固有値の最小絶対値と Q の関係を表している. $Q \simeq 0.985$ で A は特異になることがわかる.

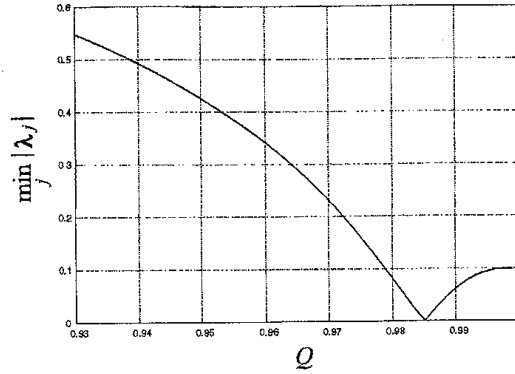


Fig.3 The minimum absolute value of eigenvalues $\min_j |\lambda_j|$ of the Jacobian matrix A in (8)

3. 数値的検証法

3.1 Conley 指数を用いたトポロジー的検証法

2.2 節で示した近似解法に基づき, Stokes 波方程式 (3) の第 2 式以降, すなわち次式に対する計算結果の数値的検証を考える.

$$F_j(\mathbf{a}) = a_j + \sum_{k=1}^{\infty} k a_{|k-j|} a_k = 0 \quad (j = 1, 2, \dots). \quad (9)$$

上式の有限次元近似が (6) であり, その近似解 $\tilde{a}_j$ ($j = 1, 2, \dots, m$) を 2.2 節で示した方法で求めた. (9) の解 a_j ($j = 1, 2, \dots$) は, 次式で与えられる連立常微分方程式の平衡点とみなすことができる.

$$\begin{aligned} \frac{da_j}{dt} &= F_j(\mathbf{a}) \\ &= a_j + \sum_{k=1}^{\infty} k a_{|k-j|} a_k \quad (j = 1, 2, \dots) \\ &= (1 + ja_0)a_j + \underbrace{\sum_{k=1}^{j-1} k a_k a_{j-k} + \sum_{k=1}^{\infty} (k+j) a_k a_{k+j}}_{=I_j(\mathbf{a})} \\ &= (1 + ja_0)a_j + I_j(\mathbf{a}). \end{aligned} \quad (10)$$

一方, Kuramoto-Sivashinsky 方程式と Swift-Hohenberg 方程式の解を Fourier 級数で表すと, それらの Fourier 係数 a_j に対する方程式はそれぞれ次のように与えられる.

Kuramoto-Sivashinsky 方程式 [3]

$$\frac{da_j}{dt} = j^2(1 - \nu j^2)a_j - j \sum_{k=1}^{j-1} a_k a_{j-k} + 2j \sum_{k=1}^{\infty} a_k a_{k+j} \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (11)$$

Swift-Hohenberg 方程式 [4]

$$\frac{da_j}{dt} = \{\nu - (1 - k_0^2 j^2)^2\} a_j - \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=j \\ k_i \in \mathbb{Z}}} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} \quad (j = 0, 1, 2, \dots) \quad (12)$$

Zgliczyński ら [3] は (11) の平衡点に, 平岡ら [4] は (12) の平衡点に対して Conley 指数の理論に基づいたトポロジ的手法を適用することにより, 数値計算で求めた近似解の数値的検証を行った. 本研究では, 彼らの手法をもとにして, (10) の平衡点の近似解に対する数値的検証を試みる.

(10) の平衡点を与える方程式, すなわち (9) を $F(\mathbf{a}) = 0$ と表す. このとき, (10) の平衡点の近似解 $\tilde{\mathbf{a}}$ に対する数値的検証では, 近似解の近傍 $\mathcal{N}$ に (10) の真の平衡点 $\mathbf{a}^*$ が存在することを示す. そのために, 近似解 $\tilde{\mathbf{a}} = (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_m)$ の近傍 $\mathcal{N}$ を次のように設定する.

$$\mathcal{N} = \underbrace{\prod_{j=1}^m [a_j^-, a_j^+]}_{\mathcal{N}_m} \times \underbrace{\prod_{j=m+1}^{\infty} [a_j^-, a_j^+]}_{\mathcal{N}_r} = \mathcal{N}_m \times \mathcal{N}_r, \quad (13)$$

with

$$\begin{cases} 1 \leq j \leq m & : a_j \in [a_j^-, a_j^+] = \tilde{a}_j + [w_j^-, w_j^+] , \\ m < j \leq M & : a_j \in [a_j^-, a_j^+] = \tilde{a}_j + [w_j^-, w_j^+] , \\ M < j & : a_j \in [-g(j), g(j)] . \end{cases} \quad (14)$$

ここで, m は近似解の Fourier 級数の項数を表し, $g(j)$ は $g(j)(>0) \rightarrow 0$ as $j \rightarrow \infty$ となるような減衰関数である. $\mathcal{N}_m$ を近傍の有限次元部分, $\mathcal{N}_r$ を打ち切り部分とよぶ.

Conley 指数の理論より, 近似解の近傍 $\mathcal{N} = \mathcal{N}_m \times \mathcal{N}_r$ に対して, 次のような定理が成り立つことが知られている.

定理 [5] 近傍 $\mathcal{N} = \mathcal{N}_m \times \mathcal{N}_r$ に対して, 以下の条件 1, 2 をみたす $S \subset \mathcal{N}_m$ と $q \in \mathbb{Z} \in \{1, 2, \dots, m\}$ が存在するとする. このとき, 平衡点 $\mathbf{a}^* = (a_1^*, a_2^*, \dots)$, すなわち $F(\mathbf{a}) = 0$ の解が $S \times \mathcal{N}_r$ の中に存在する.

(条件 1) $da_j/dt = F_j(a_1, a_2, \dots)$ ($j = 1, 2, \dots, m$) により生成される流れ φ に対して, S は孤立化ブロックで, 孤立不変集合 $\text{Inv}(S, \varphi)$ に対する j 次元 Conley 指数 CH_j は次のように与えられる.

$$CH_j(\text{Inv}(S, \varphi)) := H_j(S, \partial S^+) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{if } j = q \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} . \quad (15)$$

ここで, H_j は j 次元ホモロジー群, ∂S^+ は次のように定義される出口集合を表す.

$$\partial S^+ := \{x \in \partial S : \varphi((0, t), x) \cap S = \emptyset, \exists t > 0\} . \quad (16)$$

(条件 2) $j > m$ に対して次の関係が成り立つ.

$$\begin{cases} F_j(\mathbf{a} \in \mathcal{N} ; a_j = a_j^+) < 0 , \\ F_j(\mathbf{a} \in \mathcal{N} ; a_j = a_j^-) > 0 . \end{cases} \quad (17)$$

□

この定理の (条件 1) を直接示すことは難しいので, それが成り立つための条件として, 次のような (条件 1') を用いる [3][4].

(条件 1') S は有限次元部分 $\mathcal{N}_m$ に含まれる孤立化ブロックで, その各直積成分の両端 (境界) でベクトル場 F_j は近傍の内側に, あるいは外側に向いている.

また, (条件 2) は, 打ち切り部分 $\mathcal{N}_r$ の境界でベクトル場 F_j は近傍の内側に向いていることを意味している.

この定理を用いて, (10) の平衡点, すなわち (9) の解の近似解に対する数値的検証を試みた. 検証の手順は次のようにまとめられる.

- (i) 近似解 $\tilde{a}_j$ を求め, その近傍 $\mathcal{N}$ を (13) の形式で適当に与える.
- (ii) 打ち切り部分に対する定理の (条件 2) のもとで, $\mathcal{N}_r$ の範囲をできるだけ狭くする.
- (iii) (ii) で求めた $\mathcal{N}_r$ を用いて, 有限次元部分に対する定理の (条件 1) を満足する S を求める.

以下, (ii) と (iii) の具体的な評価方法についてまとめる.

3.2 打ち切り部分 ($j > m$) の評価

(10) に対する定理の (条件 2) は次のように表すことができる.

$$\begin{cases} F_j(\mathbf{a} \in \mathcal{N}; a_j = a_j^+) \subset (1 + ja_0)a_j^+ + I_j(\mathbf{a}) < 0, \\ F_j(\mathbf{a} \in \mathcal{N}; a_k = a_k^-) \subset (1 + ja_0)a_j^- + I_j(\mathbf{a}) > 0. \end{cases} \quad (18)$$

さらに, $I_j(\mathbf{a}) = [I_j^-, I_j^+]$ とすると, 上記の条件は次のように表すことができる.

$$a_j^+ > \frac{I_j^+}{-(1 + ja_0)}, \quad a_j^- < \frac{I_j^-}{-(1 + ja_0)}. \quad (19)$$

ここで, $a_0 < -1$, $1 + ja_0 < 0$ である. a_j の上限と下限 $a_j^\pm$ は (14) のように減衰関数 $g(j)$ で与えられる. 一方, Kuramoto-Sivashinsky 方程式 (11) と Swift-Hohenberg 方程式 (12) に対する (条件 2) は次のように与えられる.

Kuramoto-Sivashinsky 方程式

$$a_j^+ > \frac{I_j^+}{-j^2(1 - \nu j^2)}. \quad (20)$$

Swift-Hohenberg 方程式

$$a_j^+ > \frac{I_j^+}{-\{\nu - (1 - k_0^2 j^2)^2\}}. \quad (21)$$

Zgliczyński ら [3] と平岡ら [4] は (20) (21) に基づく反復法を用いて近傍 $\mathcal{N}_r$ の範囲を効率よく改良している. 彼らの反復法では, (20) (21) の分母に j に関する高次の項が含まれていることが重要である. それに対して, 本研究の問題では (19) の分母に j の高次の項が含まれていないため, 同じ反復法は使えない. そこで, (14) の減衰関数 $g(j)$ を適当に選ぶことにより, 近傍 $\mathcal{N}_r$ の範囲を狭くすることを考えた. 特に, 関数 $g(j)$ の減衰率が Fourier 係数 a_j の減衰率と近くなるように設定した. Fig.4 は Fourier 係数の近似解 $\tilde{a}_j$ が j とともに減衰する様子をまとめている.

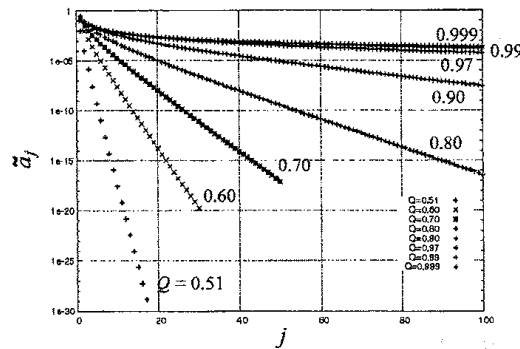


Fig.4 Convergence of approximate Fourier coefficients $\tilde{a}_j$

これまでの Conley 指数の理論を用いた数値的検証に関する研究では, $g(j)$ としてべき型減衰関数 $g_p(j) = cj^{-s}$ が最もよく用いられている. しかし, Fig.4 は Fourier 係数 $\tilde{a}_j$ の減衰率がほとんど指数的であることを表している. したがって, この問題に対しては指数型減衰関数 $g_e(j) = ce^{-sj}$ の方が適していると考えられる. しかし, 指数型減衰関数 $g_e(j)$ をすべての $j > m$ に対して適用することはできない. なぜならば, 打ち切り部分 $j > m$ に対しては, 無限個の条件を調べることはできないので, ある項 ($j = J$ とする) 以降の条件 (19) をひとつの条件にまとめる必要があるからである. 指数型減衰関数 $g_e(j)$ を用いた条件 (19) は次のように表すことができる.

$$a_j^+ = ce^{-sj} > \frac{1}{-(1+ja_0)} e^{-sj} \left\{ c \sum_{k=1}^M (je^{sk} + (k+j)e^{-sk}) |a_k| + c^2 \left(\sum_{k=M+1}^{j-M-1} k + \frac{1+2s(M+1)}{(2s)^2} e^{-2sM} \right) \right\} \quad (22)$$

上式の両辺を ce^{-sj} で割ると次式を得る.

$$1 > \frac{1}{-(\frac{1}{j} + a_0)} \left\{ \sum_{k=1}^M \left(e^{sk} + \left(1 + \frac{k}{j} \right) e^{-sk} \right) |a_k| + c \left(\underbrace{\frac{1}{j} \sum_{k=M+1}^{j-M-1} k}_{\text{Term1}} + \frac{1+2s(M+1)}{(2s)^2} \frac{1}{j} e^{-2sM} \right) \right\} \quad (23)$$

ここで, “Term 1” は $j > J$ に対してまとめて評価することができない. 一方, べき型減衰関数 $g_p(j)$ に対する条件 (19) は次のように表すことができる.

$$a_j^+ = \frac{c}{j^s} > \frac{1}{-(1+ja_0)} \left\{ c \sum_{k=1}^M \left(\frac{j}{(j-k)^s} + \frac{1}{(k+j)^{s-1}} \right) |a_k| + c^2 \left(\sum_{k=M+1}^{j-M-1} \frac{1}{k^{s-1}(j-k)^s} + \frac{1}{(s-1)M^{s-1}(j+M+1)^{s-1}} \right) \right\} \quad (24)$$

上式の両辺を $\frac{c}{j^s}$ で割ると次式を得る.

$$1 > \frac{1}{-(\frac{1}{j} + a_0)} \left\{ \sum_{k=1}^M \left(\frac{1}{(1 - \frac{k}{j})^s} + \frac{1}{(1 + \frac{k}{j})^{s-1}} \right) |a_k| \right. \\ \left. + c \left(\underbrace{\sum_{k=M+1}^{j-M-1} \frac{j^{s-1}}{k^{s-1}(j-k)^s}}_{\text{Term 2}} + \frac{1}{(s-1)M^{s-1}(1 + \frac{M+1}{j})^{s-1}} \right) \right\} . \quad (25)$$

ここで, “Term 2” は $j > J$ に対してまとめて評価することができる. (25) は $j > J$ に対して, 次のように表すことができる.

$$1 > \frac{1}{-(\frac{1}{j} + a_0)} \left[\sum_{k=1}^M \left(\frac{1}{(1 - \frac{k}{j})^s} + 1 \right) |a_k| \right. \\ \left. + c \left\{ \frac{2^s}{(s-1)(M+1)^{s-1}} + \frac{2^{2s-1}}{J^s} + \frac{1}{(s-1)M^{s-1}} \right\} \right] . \quad (26)$$

これらより, 本研究では以下のように, 指数型とべき型両方の減衰関数 $g_e(j)$, $g_p(j)$ を打ち切り部分に適用する.

$$\begin{cases} M_1 < j \leq M_2 & : a_j \in c_1 e^{-s_1 j} [-1, 1] \quad (c_1 > 0, s_1 > 0, c_1, s_1 \in \mathbb{R}) , \\ M_2 < j & : a_j \in \frac{c_2}{j^{s_2}} [-1, 1] \quad (c_2 > 0, s_2 > 1, c_2, s_2 \in \mathbb{R}) . \end{cases} \quad (27)$$

3.3 有限次元部分 ($1 \leq j \leq m$) の評価

(10) に対する定理の (条件 1') は, 平衡点付近のベクトル場 $F(\mathbf{a})$ の向きに対する条件である. したがって, 平衡点付近でベクトル場を線形化することにより, (条件 1') をみたす S を以下のようにして構成することができる. まず, $\mathbf{a}(t)$ を平衡点 $\tilde{\mathbf{a}}$ とそれ以外 $\Delta \mathbf{a}(t)$ に分け ($\mathbf{a}(t) = \tilde{\mathbf{a}} + \Delta \mathbf{a}(t)$), さらに, $\Delta \mathbf{a}$ を有限次元部分 $\Delta \mathbf{a}_m$ と打ち切り部分 $\Delta \mathbf{a}_r$ に分ける ($\Delta \mathbf{a} = \Delta \mathbf{a}_m + \Delta \mathbf{a}_r$) と, (10) は次のように表すことができる.

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta \mathbf{a}}{dt} &= F(\tilde{\mathbf{a}} + \Delta \mathbf{a}) \\ &= F(\tilde{\mathbf{a}}) + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{a}} \Big|_{\mathbf{a}=\tilde{\mathbf{a}}} \Delta \mathbf{a}_m + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial \mathbf{a}} \Big|_{\mathbf{a}=\tilde{\mathbf{a}}} \Delta \mathbf{a}_r + F_r(\Delta \mathbf{a})}_{=r} . \end{aligned} \quad (28)$$

上式の有限次元部分 ($1 \leq j \leq m$) は次のように表すことができる.

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = A\mathbf{b} + F(\tilde{\mathbf{a}}) + \mathbf{r} . \quad (29)$$

ここで, $\mathbf{b} = \Delta \mathbf{a}_m$, $A = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{a}} \Big|_{\mathbf{a}=\tilde{\mathbf{a}}}$ である. さらに, $m \times m$ 行列 A の近似固有値 $\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_m$ と近似固有ベクトル $\tilde{\mathbf{e}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_m$ に対して $D = \text{diag}\{\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_m\}$, $\tilde{P} = \{\tilde{\mathbf{e}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_m\}$, $\tilde{P}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{c}$ とすると, (29) は次のように変形できる.

$$\frac{d\mathbf{c}}{dt} = D\mathbf{c} + \underbrace{B\mathbf{b} + \tilde{P}^{-1}(\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{a}}) + \mathbf{r})}_{=\mathbf{q}} \quad (30)$$

ここで, $B = \tilde{P}^{-1}A - D\tilde{P}^{-1}$ である. $\tilde{P}^{-1}$ は精度保証つきで計算されなければならない. 上式の各成分は次のように表すことができる.

$$\frac{dc_j}{dt} = \tilde{\lambda}_j c_j + q_j \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (31)$$

このとき, $q_j \in [q_j^-, q_j^+]$ とすると, (条件 1') の境界条件をみたす集合 $\bar{S}$ は次のように与えられる.

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\frac{q_j^+}{\tilde{\lambda}_j} < c_j < -\frac{q_j^-}{\tilde{\lambda}_j} & (\tilde{\lambda}_j > 0) \\ -\frac{q_j^-}{\tilde{\lambda}_j} < c_j < -\frac{q_j^+}{\tilde{\lambda}_j} & (\tilde{\lambda}_j < 0) \end{array} \right. \quad \text{for } j = 1, 2, \dots, m. \quad (32)$$

さらに,

$$\bar{S} \subset \tilde{P}^{-1}\mathcal{N}_m, \quad (33)$$

が成り立てば, $\bar{S}$ は (条件 1') をみたす. 本研究では, 上記の包含関係を調べるために, 次のような関係を調べた.

$$S = \tilde{P}\bar{S} \subset \mathcal{N}_m. \quad (34)$$

4. 検証結果

前節の方法を用いて, Stokes 波方程式 (3) の数値的検証が, $Q \leq 0.89$ に対して行えた. Table 1 は検証で用いられたパラメータの一部を表している.

Table 1. Parameters of verified solutions

Q	m	M_1	M_2	c_1	s_1	c_2	s_2
0.51	3	12	19	$3.22 \cdot 10^{-5}$	$2.68 \cdot 10^0$	$1.57 \cdot 10^{11}$	30
0.60	8	17	26	$8.21 \cdot 10^{-5}$	$9.31 \cdot 10^{-1}$	$8.59 \cdot 10^{27}$	30
0.70	16	34	44	$1.37 \cdot 10^{-3}$	$5.75 \cdot 10^{-1}$	$3.12 \cdot 10^{35}$	30
0.80	40	69	89	$1.45 \cdot 10^{-5}$	$1.79 \cdot 10^{-1}$	$6.19 \cdot 10^{46}$	30
0.89	150	189	329	$3.50 \cdot 10^{-9}$	$5.19 \cdot 10^{-2}$	$4.56 \cdot 10^{61}$	30

$Q > 0.89$ に対しては、有限次元部分 $\mathcal{N}_m$ のサイズ m の大きさと (29) のヤコビ行列 A の特異性のため、検証が行えなかった。これらの問題の解決策として、次のような方法が考えられる。

- (i) Stokes 波方程式 (3) を特異性を含まない形に変形する。
- (ii) ヤコビ行列 A は (条件 1') の集合 S を構成するために用いられている。その代わりに、Conley 指数 (15) を直接求めることを考える。
- (iii) 近傍 $\mathcal{N}$ の範囲を体系的に改良する方法を考える。

5. まとめ

本研究では、Conley 指数の理論に基づいた方法を用いて、2次元水波に対する Stokes 波方程式 (3) の解の数値的検証を考えた。特に、Stokes 波方程式の解を対応する常微分方程式の平衡点としてとらえ、近似解の近傍の打ち切り部分に対して指数型減衰関数を導入した。 $Q \leq 0.89$ に対しては検証を行うことができたが、さらに大きな Q の値に対しては検証法の改良が必要である。また、今後は、3次元水波とその安定性問題に対する検証、他の数値的検証法との比較を試みたいと考えている。

参考文献

1. Dias, F. and Kharif, C. : "Nonlinear gravity and capillary-gravity waves," Annu. Rev. Fluid Mech., vol.31, pp.301-346, 1999.
2. Longuet-Higgins, M.S. : "Bifurcation in gravity waves," J. Fluid Mech., vol.151, pp.457-475, 1985.
3. Zgliczyński, P. and Mischaikow, K. : "Rigorous numerics for partial differential equations: the Kuramoto-Sivashinsky equation," Found. Comput. Math., vol.1, pp.255-288, 2001.
4. 平岡 裕章, 小川 知之, Mischaikow, K. : Swift-Hohenberg 方程式の定常大域分岐の Conley 指数を用いた検証, 日本応用数理学会論文誌, vol.13, pp.191-211, 2003.
5. McCord, C. : "Mappings and homological properties in the Conley index theory," Ergod. Th. and Dynam. Sys., vol.8*, pp.175-198, 1988.