

On the dressed electron state in the semi-relativistic Pauli-Fierz model

信州大学理学部数理自然情報科学科 佐々木 格

1 モデルの導入

相対論的シュレディンガー作用素と量子電磁場の結合系を準相対論的 Pauli-Fierz モデル (semi-relativistic Pauli-Fierz model) という。これは物理的には、荷電粒子（例えば電子）が光と相互作用しながら運動する量子系を記述するモデルである。ここでは、荷電粒子が 1 個の場合を考え、荷電粒子のスピンは考えない。以下、粒子と言え、この荷電粒子を意味するものとする。この量子系の状態のヒルベルト空間は

$$\mathcal{H} := L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathcal{F} \quad (1.1)$$

によって定義されるである。 $L^2(\mathbb{R}^3)$ が粒子の状態のヒルベルト空間を表す。そして

$$\mathcal{F} := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \bigotimes_{\text{sym}}^n L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\}), \quad (\bigotimes_{\text{sym}}^0 L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\}) := \mathbb{C}) \quad (1.2)$$

は量子電磁場の状態のヒルベルト空間である。ベクトル $\Psi \in \mathcal{F}$ は成分ごとに $\Psi = (\Psi^{(n)})_{n=0}^{\infty}$, $\Psi^{(n)} \in \bigotimes_{\text{sym}}^n L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\})$ と書き表す。 $\Omega := (1, 0, 0, \dots) \in \mathcal{F}$ を真空と呼ぶ。 $f \in L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\})$ に対して、生成作用素 $a^*(f)$ は

$$(a^*(f)\Psi)^{(n)} = \sqrt{n} S_n(f \otimes \Psi^{(n-1)}) \quad (1.3)$$

によって定義される。これは $a^*(f)\Psi \in \mathcal{F}$ となる Ψ の集合を定義域として閉作用素となる。消滅作用素 $a(f)$ を $(a^*(f))^*$ で定義する。このとき a, a^* は正準交換関係

$$[a(f), a^*(g)] = \langle f, g \rangle \quad f, g \in L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\}) \quad (1.4)$$

$$[a(f), a(g)] = [a^*(f), a^*(g)] = 0 \quad (1.5)$$

を満たす。生成・消滅作用素をその形式的な積分核 $a(k)$ を用いて,

$$a(f) = \int f(k)a(k)dk, \quad (1.6)$$

$$a^*(f) = \int f(k)a^*(k)dk, \quad (1.7)$$

のように書き表す。ここに $\int dk = \sum_{\lambda=1,2} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k}$, $k = (\mathbf{k}, \lambda)$ 。閉作用素 $T : L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\})$ に対して

$$\begin{aligned} T^{(0)} &:= 0, \quad T^{(1)} = T, \quad T^{(2)} = \overline{T \otimes I + I \otimes T} \\ T^{(3)} &:= \overline{T \otimes I \otimes I + I \otimes T \otimes I + I \otimes I \otimes T}, \quad \dots \end{aligned}$$

と定義する。 T の第 2 量子化作用素 $d\Gamma(T)$ は

$$d\Gamma(T) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} T^{(n)} \quad (1.8)$$

と定義される。 T を関数 $T(k)$ による掛け算作用素としたとき形式的に

$$d\Gamma(T) = \int T(k)a^*(k)a(k)dk \quad (1.9)$$

と表される。自由な光子のハミルトニアンは

$$H_f := d\Gamma(\omega(\mathbf{k})) = \int \omega(\mathbf{k})a^*(k)a(k)dk. \quad (1.10)$$

で定義される。以下では $\omega(\mathbf{k}) = |\mathbf{k}| + m$, ($m > 0$) の場合のみを考える。光子の運動量作用素は

$$\mathbf{P}_f := d\Gamma(\mathbf{k}) = (d\Gamma(k_1), d\Gamma(k_2), d\Gamma(k_3)) \quad (1.11)$$

によって定義される。量子化されたベクトルポテンシャルは各 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ に対して

$$A_j(\mathbf{x}) := \sum_{\lambda=1,2} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\overline{\Lambda(\mathbf{k})} e_j^{(\lambda)}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} a(k) + \text{h.c.} \right) \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{|\mathbf{k}|}}, \quad j = 1, 2, 3 \quad (1.12)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) := (A_1(\mathbf{x}), A_2(\mathbf{x}), A_3(\mathbf{x})) \quad (1.13)$$

と定義される。ここで Λ は紫外切断と呼ばれ (1) $\Lambda(-\mathbf{k}) = \overline{\Lambda(\mathbf{k})}$, (2) $|\mathbf{k}|^{1/2}\Lambda$, $|\mathbf{k}|^{-1}\Lambda \in L^2(\mathbb{R}^3)$ と仮定される。 $\mathbf{e}^{(1)}(\mathbf{k})\mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{k})$ は偏極ベクトルと呼ばれ, $\mathbf{e}^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{e}^{(\mu)}(\mathbf{k}) = \delta_{\lambda,\mu}$, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}^{(\lambda)}(\mathbf{k}) = 0$, $\lambda, \mu = 1, 2$ を満たすように定義される (各成分は可測になるように定義

する)。なお、一般的に量子電磁力学のモデルは偏極ベクトルの取り方に依存しないことが知られている。 $A_j(\mathbf{x})$ の閉包は $\mathcal{F}$ 上で自己共役になる。以下、閉包も同じ記号を用いて書くこととする。 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ を粒子の座標と考え $A_j(\mathbf{x})$ を $\mathcal{H}$ 上で作用させて作られる作用素も同じ記号 $A_j(\mathbf{x})$ で表すこととする。

準相対論的 Pauli-Fierz モデルのハミルトニアンは

$$H = \sqrt{(-i\nabla \otimes I - e\mathbf{A}(\mathbf{x}))^2 + M^2} - M + I \otimes H_f \quad (1.14)$$

によって定義される。ここに $M > 0$ は粒子の静止質量である。 $L^2(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\})$ の部分空間 h に対して、

$$\mathcal{F}_{\text{fin}}(h) = \text{L.h.}[\{a^*(f_1) \cdots a^*(f_m)\Omega | f_j \in h, m \geq 0\}] \quad (1.15)$$

とおく。 $\mathcal{D}_0 := \mathcal{F}_{\text{fin}}(C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \times \{1, 2\}))$ とする。(1.14) の数学的な定義は次のように行う。 $(-i\nabla \otimes I - e\mathbf{A}(\mathbf{x}))^2 + M^2$ は $\mathcal{H}_0 := C_0^\infty(\mathbb{R}^3) \hat{\otimes} \mathcal{D}_0$ 上の下に有界な対称作用素である。そこで、この作用素の Friedrichs 拡大をとり、作用素解析によりその平方根 $\sqrt{(-i\nabla \otimes I - e\mathbf{A}(\mathbf{x}))^2 + M^2}$ を定義する。この作用素は定義域に $\mathcal{H}_0$ を含む。次に、 $I \otimes H_f$ も定義域に $\mathcal{H}_0$ を含むため、形式和で (1.14) を定義する。このとき、 H の定義域は $\mathcal{H}_0$ を含む。詳しいモデルの定義や自己共役性については [2] が詳しい。

全運動量を

$$\mathbf{P} := -i\nabla \otimes I + I \otimes d\Gamma(\mathbf{k}) \quad (1.16)$$

によって定義する。このとき H は $\mathbf{P} = (\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3)$ と強可換になることが知られている。そして、 $\mathbf{P}$ を対角化するような、あるユニタリ作用素 U による同型の意味で

$$\mathcal{H} \cong \int_{\mathbb{R}^3}^{\oplus} \mathcal{F} d^3\mathbf{P} \quad (1.17)$$

$$H \cong \int_{\mathbb{R}^3}^{\infty} H(\mathbf{P}) d^3\mathbf{P} \quad (1.18)$$

と書くことができる。このとき

$$H(\mathbf{P}) := \sqrt{(\mathbf{P} - \mathbf{P}_f - e\mathbf{A})^2 + M^2} - M + H_f \quad (1.19)$$

となる。ただし $(\mathbf{A} := \mathbf{A}(0))$ は $\mathcal{F}$ 上の自己共役作用素であり、上記の H の構成のように $\mathcal{D}_0$ 上で定義した対称作用素の Friedrichs 拡大を経由して定義される。 $H(\mathbf{P})$ は、全運動量 $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^3$ を固定した準相対論的 Pauli-Fierz モデルのハミルトニアンを表す。 $H(\mathbf{P})$ の

形式の定義域は全運動量 $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^3$ に依存しない。なぜなら $K(\mathbf{P})$ を $(\mathbf{P} - \mathbf{P}_f - e\mathbf{A})^2|_{\mathcal{D}_0}$ の Friedrichs 拡大としたとき,

$$\|(\mathbf{P} - \mathbf{P}_f - e\mathbf{A})\Psi\|^2 \leq 2|\mathbf{P}|^2\|\Psi\|^2 + 2\|(\mathbf{P}_f - e\mathbf{A})\Psi\|^2, \quad (1.20)$$

だから $D(K(\mathbf{P})) = D(K(0))$ かつ $K(\mathbf{P}) \leq 2K(0) + 2|\mathbf{P}|^2$ である, 従って

$$\sqrt{K(\mathbf{P}) + M^2} \leq 2\sqrt{K(0) + M^2} + \sqrt{2}|\mathbf{P}| \quad (1.21)$$

となるので, $Q(K(\mathbf{P})^{1/2}) = Q(K(0)^{1/2})$ でなければならない。形式和によって

$$H(\mathbf{P}) := \sqrt{K(\mathbf{P}) + M^2} + H_f,$$

を定義することができる。このとき $Q(H(\mathbf{P})) = Q(K(0)^{1/2}) \cap Q(H_f)$.

定義域を $D(H_0) = D(|\mathbf{P}_f|) \cap D(H_f)$ で作用素 $H_0 := \sqrt{(\mathbf{P} - \mathbf{P}_f)^2 + M^2} + H_f$ は自己共役であり, $\mathcal{D}_0$ 上で本質的に自己共役である。

$$H_I = H(\mathbf{P}) - H_0.$$

と定義する。このとき $\mathbf{P}$ に依存しない定数 $C > 0$ があって,

$$\|H_I\phi\| \leq eC\|(H_0 + C')\phi\|, \quad \phi \in \mathcal{D}_0 \quad (1.22)$$

が成り立つ。従って, $eC < 1$ のとき $H(\mathbf{P})$ は $D(H_0)$ で自己共役であり, H_0 の任意の芯上で本質的に自己共役である。本質的自己共役性は結合定数によらずに示すことができることが知られている [2]。

2 主定理

$m > 0$ に対して, $\omega(\mathbf{k}) = |\mathbf{k}| + m$ と定義する。特に $H(\mathbf{P})$ を $H_m(\mathbf{P})$ と書く。

$$\begin{aligned} E_m(\mathbf{P}) &:= \inf \sigma(H_m(\mathbf{P})), \\ \Delta_m(\mathbf{P}) &:= \inf_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} (E_m(\mathbf{P} - \mathbf{k}) - E_m(\mathbf{P}) + \omega(\mathbf{k})) \end{aligned}$$

と定義する。関数 $E_m(\mathbf{P} - \mathbf{k}) - E_m(\mathbf{P}) + \omega(\mathbf{k})$ は, 電子と相互作用する光の分散関係のような役割を果たす。このとき次の定理が成り立つ^{*1}。

^{*1} (arXiv:1304.0051)

Theorem 2.1. すべての $m > 0$ と $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^3$ に対して

$$\Delta_m(\mathbf{P}) \geq m \quad (2.1)$$

が成り立つ。

[3] では、スピン $1/2$ が入った系に対しては $\Delta_m(\mathbf{P})$ は実際に真性スペクトルの下限と基底エネルギーとの差となることが証明されている：

$$\Delta_m(\mathbf{P}) = \inf \sigma_{\text{ess}}(H(\mathbf{P})) - E_m(\mathbf{P}).$$

しかし、そこでの証明では粒子がスピン $1/2$ を利用しているため、今回のモデルに対しては、 $\Delta_m(\mathbf{P})$ がスペクトルギャップである事は（おそらく技術的な問題で）まだ証明されていない。しかし、スピンレスの場合でも $\Delta_m(\mathbf{P})$ はスペクトルギャップに等しいはずである。不等式 $\Delta_m(\mathbf{P}) \geq m$ は $H_m(\mathbf{P})$ が離散的な基底状態を持つ事を強く示唆している。

Theorem 2.2. $eC < 1$ であると仮定する。もし、 $t > 0$ によらない定数 c があって、評価

$$\|(H_f + 1)((\mathbf{P} - \mathbf{P}_f - e\mathbf{A})^2 + M^2 + t)^{-1}(H_f + 1)^{-1}\| \leq ct^{-1}, \quad t > 1$$

が成り立つなら、そのとき $\Delta_m(\mathbf{P})$ はスペクトルギャップである：

$$\Delta_m(\mathbf{P}) = \inf \sigma_{\text{ess}}(H(\mathbf{P})) - E_m(\mathbf{P}).$$

特に、 $H_m(\mathbf{P})$ は基底状態を持つ。

準相対論的 Pauli-Fierz モデルのファイバーハミルトニアン $H(\mathbf{P})$ の基底状態の存在は、[1] によって議論されており、そこでは、任意の $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^3$ に対して、他の定数を十分小さく取れば $H(\mathbf{P})$ が基底状態を持つことが証明されている。

粒子がスピンを持つ場合： $(\mathbf{P} - \mathbf{P}_f - e\mathbf{A})^2 \rightarrow K_s(\mathbf{P}) := [\sigma \cdot (\mathbf{P} - \mathbf{P}_f - e\mathbf{A})]^2$ については、Miyao-Spohn[3] によって定理の仮定と同様の評価式

$$\|(N_f + 1)(K_s(\mathbf{P}) + M^2 + t)^{-1}(N_f + 1)^{-1}\| \leq c(t^{-1} + t^{-3/2} + t^{-2}), \quad t > 1, \quad (2.2)$$

が証明されている。ここに $N_f = d\Gamma(1)$ 。そして、彼らは正則化したスピンを持つハミルトニアン

$$H_{MS} := \gamma \sqrt{K_s(\mathbf{P}) + M^2} + H_f(m), \quad (2.3)$$

が $\gamma < 1$, $m > 0$ の場合に基底状態を持つことを証明した。不等式 (2.2) は $\Delta_m(\mathbf{P})$ がスペクトルギャップであることを証明するための障害であり、これは運動エネルギーの平方根の処理から現れる。ちなみに非相対論的なモデルではこのような障害は起こらないため、より単純な評価によって、スペクトルギャップの存在が証明される。また、非相対論的な場合には、粒子の運動エネルギーは $\mathbf{P}^2/2M$ であることから、 $|\mathbf{P}|/M > 1$ では、粒子の速度は光速を超えることとなり、この場合にはスペクトルギャップは開かない。このことは電磁相互作用が無い系の場合には簡単に分かる。すなわち $e = 0$ の場合には、ハミルトニアンは対角化されている：

$$H(\mathbf{P}) = \sqrt{(\mathbf{P} - \mathbf{P}_f)^2 + M^2} + H_f = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^{(n)}(\mathbf{P}),$$

ここに

$$\begin{aligned} H^{(0)}(\mathbf{P}) &= \sqrt{\mathbf{P}^2 + M^2}, & H^{(1)}(\mathbf{P}) &= \sqrt{(\mathbf{P} - \mathbf{k})^2 + M^2} + \omega(\mathbf{k}) \\ H^{(2)}(\mathbf{P}) &= \sqrt{(\mathbf{P} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)^2 + M^2} + \omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2) \\ H^{(3)}(\mathbf{P}) &= \dots \end{aligned}$$

である。シュバルツの不等式によって $H^{(1)}(\mathbf{P}) \geq \sqrt{\mathbf{P}^2 + M^2} - |\mathbf{k}| + \omega(\mathbf{k}) \geq H^{(0)}(\mathbf{P})$ が成り立つので、すべての $\mathbf{P}$ に対して $H^{(0)}(\mathbf{P})$ は基底状態エネルギーである。対応する基底状態は真空 $\Omega \in \mathcal{F}$ である。一方、粒子が非相対論的な運動エネルギーを持つ場合には

$$H_{nr}^{(1)}(\mathbf{P}) = \frac{1}{2M}(\mathbf{P} - \mathbf{k})^2 + \omega(\mathbf{k}) \geq \frac{\mathbf{P}^2}{2M} - \frac{|\mathbf{P}|}{M}|\mathbf{k}| + \frac{\mathbf{k}^2}{2M} + \omega(\mathbf{k})$$

が成り立つ。従って、もし $|\mathbf{P}|/M > 1$ ならば、 $\inf \sigma(H_{nr}^{(1)}) \leq |\mathbf{P}|^2/2M$ となり真空よりも光子 1 個の空間の方がエネルギーが低くなる。この場合、明らかに真空 Ω は基底状態ではない。

3 定理 2.1 の証明

定理 2.1 の証明で本質的に使う技術は Löwner-Heinz 不等式だけである。 $\mathbf{A}$ の具体的な形は使わない。しかし、残念ながら粒子のスピンを考えたときには、ここでの手法は使えないように見える。

Löwner-Heinz 不等式とは次のような主張である。 A を下に有界な自己共役作用素、 B は $D(A) \subset D(B)$ となる対称作用素とする。このとき、もし $D(A)$ 上の形式の意味で

$B^2 \leq A^2$ ならば, $B \leq A$ が成り立つ。この定理は次のように Kato-Rellich の定理の下限の評価から導くことができる。仮定より, 任意の $\epsilon > 0$ に対して B は $(1 + \epsilon)A$ に対して相対有界であり $a = 1/(1 + \epsilon)^2, b = 0$ として $\|B\Psi\| \leq a\|A\Psi\| + b\|\Psi\|, \Psi \in D(A)$ が成り立つ。したがって, Kato-Rellich の定理の下限の評価式より $(1 + \epsilon)A + B$ は $D(A)$ 上で自己共役であり, $(1 + \epsilon)A + B \geq 0$ が成り立つ。 $\epsilon > 0$ は任意だったので $A \geq B$ である。

Proof. 定理 (3.1) の証明を行う。定理は $\mathcal{D}_0$ 上の不等式

$$H_m(\mathbf{P} - \mathbf{k}) + \omega(\mathbf{k}) \geq m + H_m(\mathbf{P}). \quad (3.1)$$

と変分原理から直ちに導かれるので (3.1) を示せばよい。作用素 $T(\mathbf{P})$ を

$$T(\mathbf{P}) := \sqrt{(\mathbf{P} - \mathbf{P}_f + e\mathbf{A})^2 + M^2} \quad (3.2)$$

で定義する。このとき (3.1) は $\mathcal{D}_0$ 上の不等式

$$T(\mathbf{P} - \mathbf{k}) \geq T(\mathbf{P}) - |\mathbf{k}| \quad (3.3)$$

が成り立つ事と同値である。Löwner-Heinz 不等式より (3.3) は $\mathcal{D}_0$ 上の不等式

$$T(\mathbf{P} - \mathbf{k})^2 \geq (T(\mathbf{P}) - |\mathbf{k}|)^2, \quad (3.4)$$

から従う。(3.4) の両辺を展開すれば (3.4) を示すためには

$$|\mathbf{k}| \cdot T(\mathbf{P}) \geq \mathbf{k} \cdot (\mathbf{P} - \mathbf{P}_f + e\mathbf{A}) \quad (3.5)$$

を示せばよいことが分かる。もう一度 Löwner-Heinz 不等式を使うことにより, 不等式 (3.5) は

$$|\mathbf{k}|^2 T(\mathbf{p})^2 \geq [\mathbf{k} \cdot (\mathbf{P} - \mathbf{P}_f + e\mathbf{A})]^2 \quad (3.6)$$

から導かれる。そこで $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3) := \mathbf{P} - \mathbf{P}_f + e\mathbf{A}$ と定義する。一般に, 対称作用素 a, b に対して, $D(a) \cap D(b)$ 上の形式の意味で $ab + ba \leq a^2 + b^2$ が成り立つことに

注意する。この事実から $\mathcal{D}_0$ 上で

$$\left(\sum_{j=1}^3 k_j B_j \right)^2 = \sum_{j,l=1}^3 k_j B_j k_l B_l \quad (3.7)$$

$$\leq \frac{1}{2} \sum_{j,l} (k_j^2 B_j^2 + k_l^2 B_l^2) \quad (3.8)$$

$$= \sum_j k_j^2 \sum_l B_l^2 = |\mathbf{k}|^2 \cdot \mathbf{B}^2 \quad (3.9)$$

$$\leq |\mathbf{k}|^2 \cdot (\mathbf{B}^2 + M^2) \quad (3.10)$$

が成り立つ。したがって、不等式 (3.6) が成り立つ事がわかり、上の議論から結局は (3.1) が成り立つ事となる。 $\square$

4 定理 2.2 の証明の概略

証明の方針は [3] と同じものである。

この章では、作用素をすべて配位空間で考える。すなわち、以下では光子の運動量 $\mathbf{k}$ が微分作用素 $-i\nabla_{\mathbf{y}}$ となるように空間全体をフーリエ変換してある。 $j, \bar{j}$ を $C^\infty(\mathbb{R})$ の関数で $j^2 + \bar{j}^2 = 1$ かつ $j(t) = 1(|t| < 1)$, $j(t) = 0(|t| > 2)$ を満たすものとする。定数 $R > 0$ に対して $j_R(\mathbf{x}) = j(|\mathbf{x}|/R)$, $\bar{j}_R(\mathbf{x}) = \bar{j}(|\mathbf{x}|/R)$ とおく。等長作用素 $U : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}$ を

$$\begin{aligned} U\Omega &= \Omega \otimes \Omega \\ Ua(f)U^* &= a(j_R f) \otimes I + I \otimes a(\bar{j}_R f) \end{aligned}$$

によって定義する。作用素 $H^\otimes(\mathbf{P})$ を

$$H^\otimes(\mathbf{P}) := \sqrt{(\mathbf{P} - \mathbf{P}_f \otimes I - I \otimes \mathbf{P}_f - e\mathbf{A} \otimes I)^2 + M^2} + H_f \otimes I + I \otimes H_f \quad (4.1)$$

で定義する。定理 2.2 の主張は評価

$$|\langle \Phi, (H(\mathbf{P}) - U^* H^\otimes(\mathbf{P}) U) \Phi \rangle| \leq O(R^0) \|(H(\mathbf{P}) + 1)\Phi\|^2, \quad \Psi \in \mathcal{D}_0 \quad (4.2)$$

から従う。このことを以下で説明する。 $H^\otimes(\mathbf{P})$ は $\otimes$ の右側の依存性は $\mathbf{P}_f$ および H_f だけであり、これらはフーリエ変換で元に戻すと単なる掛け算作用素となるため、分解

$$\mathcal{F} \otimes \mathcal{F} \cong \mathcal{F} \otimes \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}^{(n)}, \quad \mathcal{F}^{(n)} = \bigotimes_{\text{sym}} L^2(\mathbb{R}^3; d\mathbf{k}) \quad (4.3)$$

対応して,

$$H^\otimes(\mathbf{P}) \cong \oplus_{n=0}^{\infty} H_n^\otimes(\mathbf{P}; \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) \quad (4.4)$$

となる。ここに

$$H_n^\otimes(\mathbf{P}; \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) := \sqrt{(\mathbf{P} - \mathbf{P}_f \otimes I - I \otimes (\mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_n) - e\mathbf{A} \otimes I)^2 + M^2 + H_f \otimes I + I \otimes (\omega(\mathbf{k}_1) + \dots + \omega(\mathbf{k}_n))} \quad (4.5)$$

$$= H(\mathbf{P} - \sum_{j=1}^n \mathbf{k}_j) \otimes I + I \otimes \sum_{j=1}^n \omega(\mathbf{k}_j) \quad (4.6)$$

したがって, $\omega(\mathbf{k}_1) + \dots + \omega(\mathbf{k}_n) \geq \omega(\mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_n)$ に注意すると

$$U^* H^\otimes(\mathbf{P}) U \geq U^* \left(\inf_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} E(\mathbf{P} - \mathbf{k}) + \omega(\mathbf{k}) I \otimes (1 - P_\Omega) \right) U \quad (4.7)$$

となる, ただし P_Ω は $\Omega \in \mathcal{F}$ への正射影作用素である。そして具体的計算により $U^* I \otimes P_\Omega U = \Gamma(j_R)$ となる。ここに $\Gamma(T) = 1 \oplus_{j=1}^{\infty} \otimes^j T$ 。したがって,

$$H(\mathbf{P}) + m\Gamma(j_R) \geq \inf_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3} (E(\mathbf{P} - \mathbf{k}) + \omega(\mathbf{k})) + o(1) \quad (4.8)$$

であり, この両辺の作用素の真性スペクトルの下限を取れば, $\Gamma(j_R)$ は $H(\mathbf{P})$ に対して, 相対コンパクトであることより

$$\inf \sigma_{\text{ess}}(H(\mathbf{P})) - E(\mathbf{P}) \geq \Delta_m(\mathbf{P}) + o(1) \quad (4.9)$$

となる。最後に $R \rightarrow \infty$ とすれば $o(1) \rightarrow 0$ となるので, $\inf \sigma_{\text{ess}}(H(\mathbf{P})) - E(\mathbf{P}) \geq \Delta_m(\mathbf{P})$ が得られる。そこで, 問題は評価式 (4.2) の導出になる。 H_f の分解は難しくない。 $D := \mathbf{P} - \mathbf{P}_f - e\mathbf{A}$ 及び $D^\otimes := U^*(\mathbf{P} - \mathbf{P}_f \otimes I - I \otimes \mathbf{P}_f - e\mathbf{A} \otimes I)U$ と定義する。作用素の平方根をレゾルベントで表示する公式 $\sqrt{A} = (1/\pi) \int_0^\infty A(A+t)^{-1} \sqrt{t} dt$ を使うと

$$\sqrt{D^2 + M^2} - \sqrt{(D^\otimes)^2 + M^2} \quad (4.10)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \sqrt{t} dt \frac{1}{D^2 + M^2 + t} (D^2 - (D^\otimes)^2) \frac{1}{(D^\otimes)^2 + M^2 + t} \quad (4.11)$$

となる。いま分解

$$D^2 - (D^\otimes)^2 = D(D - D^\otimes) + (D - D^\otimes)D - (D - D^\otimes)^2$$

を行うと、このとき $(D - D^\otimes)(H_f + 1)^{-1} = O(R^0)$ となる事を証明するのは難しくない。そして、次の量を評価しなければならない。

$$\|(H_f + 1)(D^2 + M^2 + t)^{-1}D(D - D^\otimes)((D^\otimes)^2 + M^2 + t)^{-1}(H_f + 1)^{-1}\| \quad (4.12)$$

そして、これは

$$\begin{aligned} & \| (H_f + 1)^{-1}(D^2 + M^2 + t)^{-1}(H_f + 1) \| \cdot \| (H_f + 1)^{-1}D \| \cdot \\ & \| (D - D^\otimes)(H_f + 1)^{-1} \| \cdot \| (H_f + 1)((D^\otimes)^2 + M^2 + t)^{-1}(H_f + 1)^{-1} \| \end{aligned}$$

で上から押さえられる。ここでもし、定理の仮定の評価が正しいとすると、上の量は

$$ct^{-1} \cdot c \cdot O(R^0) \cdot ct^{-1}, \quad t > 1. \quad (4.13)$$

で押さえられることとなる。したがって、評価式

$$\left\langle \Psi, (\sqrt{D^2 + M^2} - \sqrt{(D^\otimes)^2 + M^2}) \Psi \right\rangle \leq O(R^0) \langle \Psi, (H_f + 1) \rangle, \quad \Psi \in \mathcal{D}_0$$

が導かれ、(4.2) が成立することとなる。定理の仮定は最近、日高建氏（九州大学）が類似の評価を（運動量を固定しない）準相対論的 Pauli-Fierz モデルに対して導いたが、今回のファイバーハミルトニアンに対してはまだ証明されていない。

参考文献

- [1] A. Könenberg and O. Matte, The Mass Shell in the Semi-Relativistic Pauli-Fierz Model, *Annales Henri Poincaré*, vol. **15**, 2014, p. 863–915.
- [2] J. Lőrinczi, F. Hiroshima, and V. Betz, *Feynman-Kac-type theorems and Gibbs measures on path space*, vol. 34, Walter De Gruyter, 2011, Seminar on Probability, Studies in Mathematics.
- [3] T. Miyao and H. Spohn, *Spectral analysis of the semi-relativistic Pauli-Fierz Hamiltonian*, *J. Funct. Anal.* **256** (2009), no. 7, 2123–2156.