

入射的加群のアナロジーとしての h_* - 入射的スペクトラムについて

広島大理 大川哲介 (Tetsusuke Ohkawa)

環上の加群について“入射的”なる概念がある。これの
CW複体, スペクトラムについてのアナロジーは, [1]に於い
て若干調べたが, ここではその後の結果も含めて述べる。

環 R 上の加群 M が R 上入射的であるとは, 任意の R -加群
 N, N' の間の任意の単射 $f: N \rightarrow N'$ に対して, $f^*: \text{Hom}_R(N', M) \rightarrow \text{Hom}_R(N, M)$ が全射となることを言う。又 R -加群
 M, N の間の射 $f: M \rightarrow N$ が $(R-)$ injective enveloping
map であるとは, ①単射である, ② N は入射的, ③ $f(M) \subset N' \subset N$ なる任意の入射的 R -加群 N' について, $N' = N$ が成立
することとを言う。これについて次の成立する

定理. 任意の R -加群 M に対し, ある R -加群 N と射 $f: M \rightarrow N$ で, f が R -injective enveloping map となるものが存在する。

この事実の位相的アナロジーを考える。以下 X を CW-ス
ペクトラムの図, $\mathcal{X}$ をそのホモトピー図, h_* を一々の一般

ホモロジーとする. $X \in \text{Ob } \mathcal{S}$ が h_* -入射的であるとは, スペクトラム間の任意の map $f: Y \rightarrow Z$ に対し, もし $h_*(f)$ が単射ならば $h_*: [Z, X] \rightarrow [Y, X]$ が全射となることを言う.

又スペクトラム間の map $f: X \rightarrow Y$ が h_* -injective enveloping map であるとは, ① $h_*(f)$ は単射, ② Y は h_* -入射的, ③ 任意のスペクトラム Z 及び任意の map $g: Y \rightarrow Z$ に対し, もし $h_*(g \circ f)$ が単射なら $h_*(g)$ も単射になることを言う. これについて次が成立する ([1]).

定理. 任意のスペクトラム X に対し, 適当なるスペクトラム Y と, 適当なる map $f: X \rightarrow Y$ で f が h_* -injective enveloping map となるものが存在する

さて, 代数のオでは次が成立する

定理 R -加群 M が入射的で直既約ならば $A = \text{End}_R(M)$ に対して非可逆元全体 I はイデアルをなし, A/I は斜体となる.

この定理は前頁の定理から容易に得られる. これについて次の位相的アナロジーを得る.

定理 スペクトラム X が h_* -入射的で, $\mathcal{S}$ で直既約ならば $A = [X, X]_*$ に対して, 非可逆元全体は次数イデアルをなし, A/I は次数斜体となる.

証明は代数の場合に平行にはいかず若干複雑になるので略
 する 次は $B = A/I$ として 如何なる次数斜体が生じるかとい
 う問題を考えるが、これについて次が成立する

定理. ① $ch(B) = 0$ なら $B \cong \mathbb{Q}$

② 任意の有限体は (適当に k, X を取って) B とし
 て実現することになる

③ n : 自然数, p : 素数とすると $\mathbb{Z}_p[v, v^{-1}]$
 (但し $\deg v = 2(p^n - 1)$) も実現出来る

文献

[1] The injective hull of homotopy types with respect
 to generalized homology functors, Hiroshima M. J.
 19 (1989) 631 - 639