

Von Neumann 代数の predual における閉 ユニタリー軌道の空間

北大応電研 日合文雄 (Fumio Hiai)

§1. 序論

M は von Neumann 代数, M_* は M の predual, M_*^+ は M_* の positive cone (i.e. M_*^+ は M 上の正の正規線形汎関数の全体) とする. さらに, $\mathcal{S}(M) (\subset M_*^+)$ は M 上の正規 states の全体とする. $\mathcal{U}$ は M に属する ユニタリー全体とする. $\varphi \in M_*^+$ の ユニタリー軌道 $\{u\varphi u^* = \varphi(u^* \cdot u) : u \in \mathcal{U}\}$ の ノルム閉包を $[\varphi]$ で表すと, M_*^+ に次の同値関係が入る: $\varphi \sim \psi \stackrel{\text{def}}{\iff} \varphi \in [\psi]$. このとき, 商空間 $M_*^+ / \sim$ は距離

$$\begin{aligned} d([\varphi], [\psi]) &= \inf \{ \|\varphi' - \psi'\| : \varphi' \in [\varphi], \psi' \in [\psi] \} \\ &= \inf_{u \in \mathcal{U}} \|\varphi - u\psi u^*\| \end{aligned}$$

により 距離空間となる. この距離空間 $M_*^+ / \sim$ の完備性は容易にわかる.

最近, Haagerup-Størmer [5] が $M_*^+ / \sim$ の isometric chara-

cterizationを与えたので、次節以下でそれを紹介しよう。さらに筆者と中村美浩氏が最近得た関連結果[6, 7]も報告する。

以下この節では、 $M_*^+/\sim$ に関してこれまで知られていた結果をいくつか挙げておこう。

(1°) M が I_n 型 factor, i.e. $M = \mathbb{M}_n$ ($n \times n$ 行列全体) の場合, $\varphi \in M_*^+$ は $0 \leq h_\varphi \in \mathbb{M}_n$ により $\varphi(x) = \text{tr}(h_\varphi x)$ と書けて,

$$d([\varphi], [\psi]) = \inf_{u \in \mathcal{U}} \|h_\varphi - u h_\psi u^*\|_1.$$

ただし $\|\cdot\|_p$ は Schatten p -ノルムとする。行列については、次の結果がよく知られている: Hermite 行列 $h, k \in \mathbb{M}_n$ の固有値をそれぞれ $\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_n, \beta_1 \geq \dots \geq \beta_n$ とするとき,

$$\inf_{u \in \mathcal{U}} \|h - u k u^*\|_p = \left\{ \sum_{i=1}^n |\alpha_i - \beta_i|^p \right\}^{1/p}, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

ただし $p = \infty$ では右辺 $= \max_{1 \leq i \leq n} |\alpha_i - \beta_i|$. これは Lidskii-Wielandt の定理の系であり, $p = \infty$ の場合は H. Weyl (1912) の古典的結果である。

(2°) M が III_1 型 factor の場合, Connes-Størmer [4] による $\mathcal{S}(M)$ の homogeneity (i.e. $\mathcal{S}(M)/\sim$ が一点集合) から次が成立: 任意の $\varphi, \psi \in M_*^+$ に対して

$$d([\varphi], [\psi]) = |\varphi(1) - \psi(1)|.$$

つまり $[\varphi] \mapsto \varphi(1)$ は $M_*^+/\sim$ から $[0, \infty)$ への isometry. [4] では M が separable predual を仮定しているが, この仮定は要らない.

(3°) M が separable predual の III_λ 型 factor ($0 \leq \lambda < 1$) の場合, Bion-Nadal [1] は discrete 分解 $M = N \rtimes_{\theta} \mathbb{Z}$ を用いて, $\mathcal{S}(M)/\sim$ を flow of weights 上の Borel 確率測度のある集合と対応させた. 特に $0 < \lambda < 1$ の場合, $\mathcal{S}(M)/\sim$ が単位円周上の Borel 確率測度の全体と対応することと

$$\text{diam}(\mathcal{S}(M)/\sim) \leq 2(1 - \sqrt{\lambda})$$

を示した. ただし上の左辺は $\mathcal{S}(M)/\sim$ の直径.

(4°) Connes-Haagerup-Størmer [3] は, M が σ -finite な III_λ 型 factor ($0 \leq \lambda \leq 1$) のとき,

$$\text{diam}(\mathcal{S}(M)/\sim) = 2 \frac{1 - \sqrt{\lambda}}{1 + \sqrt{\lambda}}$$

を示した. ($\lambda = 1$ の場合が (2°) で述べた結果 [4].)

§2. Haagerup-Størmer の主定理

M 上の忠実な正規 semifinite weight ω を取り, M のモジュラー自己同型群 σ_t^ω による接合積を $N = M \rtimes_{\sigma^\omega} \mathbb{R}$ とすると, N は semifinite であり, $\tau \circ \theta_\lambda = e^{-\lambda} \tau$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) を満す忠実

な正規トレース τ をもつ. ここに, $\mathcal{N}$ 上の自己同型群 θ_s は σ_t^ω の dual action. $\mathcal{N}$ に affiliate する τ -可測作用素の全体を $\tilde{\mathcal{N}}$ で表し, $\tilde{\mathcal{N}}_+$ は $\tilde{\mathcal{N}}$ の positive cone とする. $\varphi \in \mathcal{M}_*^+$ に対して, $\mathcal{N}$ 上の dual weight $\tilde{\varphi}$ を取ると, Radon-Nikodym 微分 $h_\varphi = \frac{d\tilde{\varphi}}{d\tau}$ は $\tilde{\mathcal{N}}_+$ に属し $\theta_s(h_\varphi) = e^{-s} h_\varphi$ ($s \in \mathbb{R}$) を満す. (実際, この対応 $\varphi \mapsto h_\varphi$ を linear extension したものが, $\mathcal{M}_*$ と Haagerup L^1 -空間 $L^1(\mathcal{M}) = \{a \in \tilde{\mathcal{N}} : \theta_s(a) = e^{-s} a \ (s \in \mathbb{R})\}$ の間の同型対応になる.) そこで, 各 $\varphi \in \mathcal{M}_*^+$ に対して, $\mathcal{N}$ に属する射影 $e_\varphi = \chi_{(1, \infty)}(h_\varphi)$ が定まる. ここに, $\chi_{(\alpha, \beta)}(h_\varphi)$ は h_φ の区間 (α, β) に対応するスペクトル射影を表す. $\theta_s(e_\varphi) = \chi_{(e^s, \infty)}(h_\varphi)$ より

$$\begin{aligned} \tau(e_\varphi) &= \tilde{\varphi}(h_\varphi^{-1} e_\varphi) = \varphi\left(\int_{-\infty}^{\infty} \theta_s(h_\varphi^{-1} e_\varphi) ds\right) \\ &= \varphi\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^s h_\varphi^{-1} \chi_{(e^s, \infty)}(h_\varphi) ds\right) \\ &= \varphi\left(h_\varphi^{-1} \int_0^{\infty} \chi_{(\lambda, \infty)}(h_\varphi) d\lambda\right) \\ &= \varphi(\text{supp } h_\varphi) = \varphi(\text{supp } \varphi) = \varphi(1). \end{aligned}$$

よって $\hat{\varphi} \in Z(\mathcal{N})_*^+$ (ただし $Z(\mathcal{N})$ は $\mathcal{N}$ の center) が

$$\hat{\varphi}(z) = \tau(e_\varphi z), \quad z \in Z(\mathcal{N}),$$

で定義できる. このとき, 任意の $\varphi, \psi \in \mathcal{M}_*^+$ に対して,

$$(1) \quad \varphi \leq \psi \Rightarrow \hat{\varphi} \leq \hat{\psi},$$

$$(2) \quad \|\hat{\varphi} - \hat{\psi}\| \leq d([\varphi], [\psi]),$$

$$(3) \quad \hat{\varphi} \cdot \theta_\lambda \geq e^{-\lambda} \hat{\varphi} \quad (\lambda > 0).$$

(1) は容易であり, (2) を示すには $\varphi \vee \psi = \varphi + (\varphi - \psi)_- = \psi + (\varphi - \psi)_+$ において,

$$\begin{aligned} \|\hat{\varphi} - \hat{\psi}\| &\leq \|(\varphi \vee \psi)^\wedge - \hat{\varphi}\| + \|(\varphi \vee \psi)^\wedge - \hat{\psi}\| \\ &= 2(\varphi \vee \psi)^\wedge(1) - \hat{\varphi}(1) - \hat{\psi}(1) \quad (\text{by (1)}) \\ &= 2(\varphi \vee \psi)(1) - \varphi(1) - \psi(1) \\ &= \|\varphi - \psi\|. \end{aligned}$$

任意の $u \in \mathcal{U}$ に対して, $(u\psi u^*)^\wedge = \hat{\psi}$ より $\|\hat{\varphi} - \hat{\psi}\| \leq \|\varphi - u\psi u^*\|$ となり, (2) が成立. (3) は $\theta_\lambda(h_\varphi) = e^{-\lambda} h_\varphi$ より容易.

(2) より $[\varphi] \in \mathcal{M}_*^+ / \sim \mapsto \hat{\varphi} \in Z(\mathcal{N})_*^+$ が well-defined.

そこで Haagerup-Størmer [5] の主定理は,

定理 (i) $[\varphi] \mapsto \hat{\varphi}$ は $\mathcal{M}_*^+ / \sim$ から $Z(\mathcal{N})_*^+$ への isometry.

(ii) $\mathcal{M}$ が properly infinite で I 型 direct summand をもたないとき, $[\varphi] \mapsto \hat{\varphi}$ の値域は

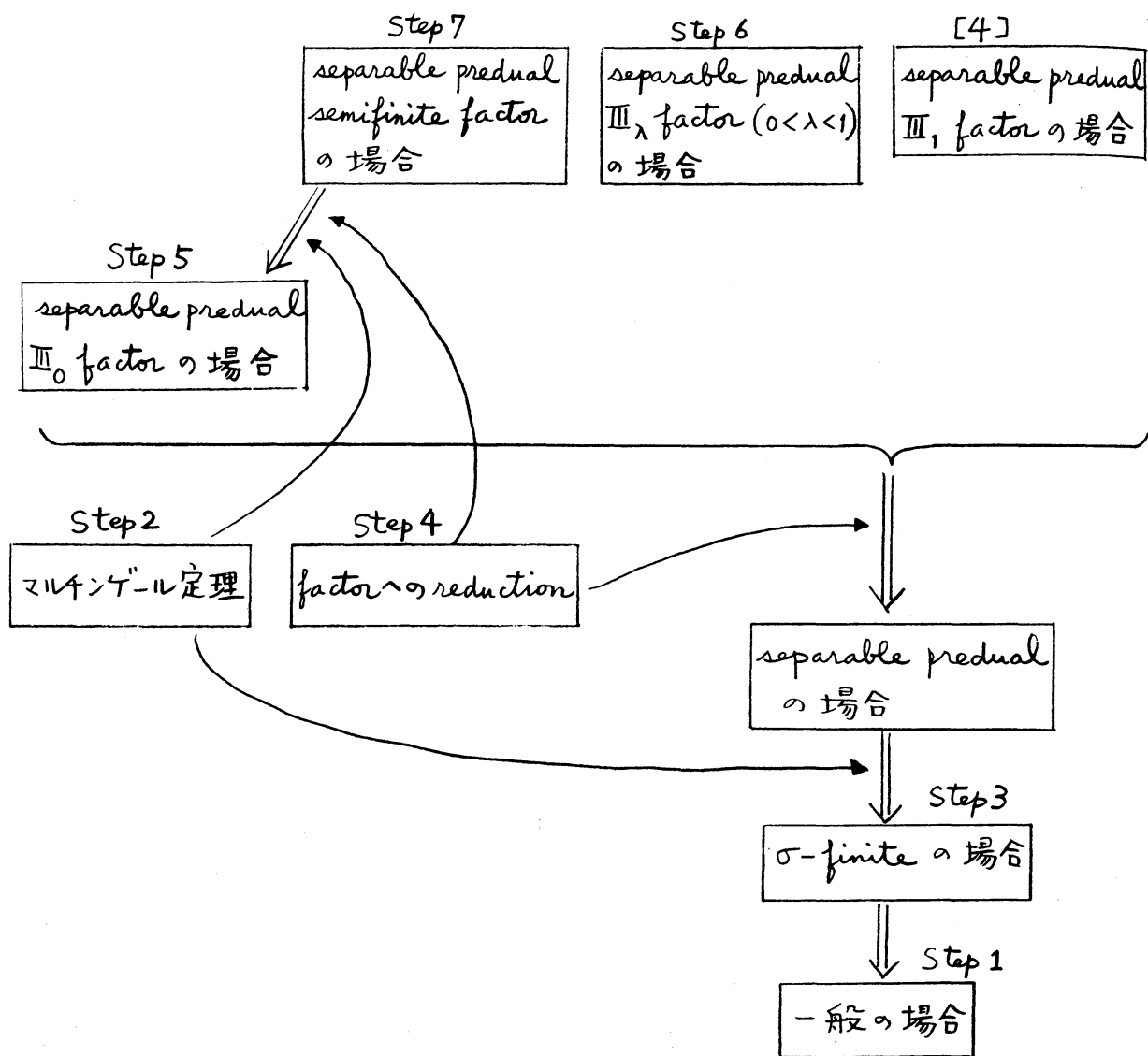
$$P(\mathcal{M})_{\text{def}} = \{\chi \in Z(\mathcal{N})_*^+ : \chi \cdot \theta_\lambda \geq e^{-\lambda} \chi \quad (\lambda > 0)\}.$$

(iii) $\mathcal{M}$ が II₁ 型のとき, $[\varphi] \mapsto \hat{\varphi}$ の値域は

$$\{\chi \in P(\mathcal{M}) : \chi \leq \tau|_{Z(\mathcal{N})}\}.$$

§3. 証明の概略

定理の証明はかなり長いので、その方針を流れ図に書いておくと次のようになる。



対応 $\varphi \mapsto \hat{\varphi}$ を具体的に計算するのは, separable predual の semifinite factor および III_λ 型 factor ($0 < \lambda < 1$) の場合である. III_1 型 factor の場合は [4] から成立. separable predual の各 factor で定理が成立すれば, separable predual 一般で成立す

ることは reduction theory を使って証明される. III_0 型 factor の場合は, 具体的な計算をしないで (直接計算はほとんど不可能か), II_∞ 型の場合に帰着させて証明する. このために マルチンゲール定理 を用意する. σ -finite の場合は, separable predual の場合に帰着させて証明する. ここでも マルチンゲール定理 が使われる. 最後に, 一般の場合は σ -finite の場合に帰着させる.

証明全体として, semifinite factor および III_λ factor ($0 < \lambda < 1$) での直接計算を除けば, マルチンゲール定理 が最大のポイントであり, 残りの証明は概ね形式的なものである.

この節で以下, 証明の最後からほぼ逆順に各ステップのスケッチを述べよう.

Step 1 まず, 次の 2 つのことをチェックする:

(1) $M = \sum_{i \in I}^{\oplus} M_i$ のとき, 各 M_i で定理が成立すれば M でも成立.

(2) $M = \mathcal{P} \otimes B(\mathcal{H})$ (ただし $B(\mathcal{H})$ は Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の有界作用素全体) のとき, $\mathcal{P}$ で定理が成立すれば M でも成立.

一般に, finite な M は σ -finite か $\rightarrow$ finite な M_i の直和 $M = \sum_{i \in I}^{\oplus} M_i$ と書ける. ここで M が II_1 型ならば各 M_i は II_1 型. また properly infinite な M は σ -finite か $\rightarrow$ properly infinite

な p_i で $M = \sum_{i \in I}^{\oplus} p_i \otimes B(\mathcal{H}_i)$ と書ける. よって (1), (2) から, 一般の場合は σ -finite の場合に帰着する.

Step 2 (マルチンゲール定理) $M_\alpha \nearrow M$ とし, 各 α に対し conditional expectation $E_\alpha: M \rightarrow M_\alpha$ が存在して マルチンゲール条件を満たすとき, 各 M_α で定理が成立すれば,

- (1) M でも定理の (i) が成立,
- (2) M および各 M_α が properly infinite で I 型 direct summand をもたないとき, M でも定理の (ii) が成立,
- (3) M および各 M_α が II_1 型のとき, M でも定理の (iii) が成立.

証明は, α_0 を取って $\alpha \geq \alpha_0$ で考えてよい. M_{α_0} 上の 忠実な正規 semifinite weight ω_0 を取り $\omega = \omega_0 \circ E_{\alpha_0}$ とすると (定理の成立は ω の取り方に依らないことに注意), $\alpha \geq \alpha_0$ に対し $\omega \circ E_\alpha = \omega$ より $\sigma_t^{\omega_\alpha} = \sigma_t^\omega|_{M_\alpha}$ (ただし $\omega_\alpha = \omega|_{M_\alpha}$). このとき, $\mathcal{N}_\alpha (= M_\alpha \rtimes_{\sigma^{\omega_\alpha}} \mathbb{R}) \subset \mathcal{N} (= M \rtimes_{\sigma^\omega} \mathbb{R})$ で $\mathcal{N}_\alpha \nearrow \mathcal{N}$, $\theta_\alpha = \theta|_{\mathcal{N}_\alpha}$, $\tau_\alpha = \tau|_{\mathcal{N}_\alpha}$. さらに, $\varphi \in M_*^+$ に対して $\tilde{\varphi}_\alpha = \tilde{\varphi}|_{\mathcal{N}_\alpha}$ (ただし $\varphi_\alpha = \varphi|_{M_\alpha}$). conditional expectation $E_\alpha \otimes \text{id}_{B(L^2(\mathbb{R}))}: M \otimes B(L^2(\mathbb{R})) \rightarrow M_\alpha \otimes B(L^2(\mathbb{R}))$ の $\mathcal{N} (\subset M \otimes B(L^2(\mathbb{R})))$ への制限 F_α は $\mathcal{N}$ から $\mathcal{N}_\alpha$ への conditional expectation となり,

$$\frac{d\tilde{\varphi}}{d\tau} = \frac{d(\tilde{\varphi}_\alpha \circ F_\alpha)}{d(\tau_\alpha \circ F_\alpha)} = \frac{d\tilde{\varphi}_\alpha}{d\tau_\alpha}$$

より $e_\varphi = e_{\varphi_\alpha}$ ($\alpha \geq \alpha_0$). よって $\varphi, \psi \in M_*^+$ のとき, $\chi = \tau((e_\varphi - e_\psi) \cdot) \in N_*$ において

$$\begin{aligned} d([\varphi], [\psi]) &\leq d_\alpha([\varphi_\alpha], [\psi_\alpha]) = \|\hat{\varphi}_\alpha - \hat{\psi}_\alpha\| \\ &= \|\chi|_{Z(N_\alpha)}\| \longrightarrow \|\chi|_{Z(N)}\| = \|\hat{\varphi} - \hat{\psi}\| \end{aligned}$$

が示せるので, §2の(2)と合わせて(1)がわかる. (2)は, $P(M)$ が

$$P_0 = \left\{ \chi \in Z(N)_*^+ : \chi = \int_{-\infty}^0 e^s \rho \cdot \theta_s ds, \rho \in Z(N)_*^+ \right\}$$

のノルム閉包であることを使って示せる. さらに(3)の証明には, center-valuedトレースに対する Dixmier approximation theorem が使われる.

Step 3 M が σ -finite な II_1 (resp. II_∞ , III) 型 のとき, countably generated な v. N. 部分代数 $M_0 \subset M$ と conditional expectation $E_0: M \rightarrow M_0$ が存在して, $M_0 \subset \mathcal{P} \subset M$ で $E_0 = E_0 E_\mathcal{P}$ となる conditional expectation $E_\mathcal{P}: M \rightarrow \mathcal{P}$ をもつ v. N. 部分代数 $\mathcal{P}$ がすべて II_1 (resp. II_∞ , III) 型 であることが証明できる. この証明は, $\text{II}_1, \text{II}_\infty$ 型 の場合は容易であるが, III 型 の場合は $\varphi \in \mathcal{S}(M)$ の ユ=タリー軌道 の閉凸包に関する 巧妙な議論を用いる. そこで, $M_0 \subset \mathcal{P} \subset M$ である countably generated v. N. 部分代数 $\mathcal{P}$ に対して $\bigvee_{t \in \mathbb{R}} \sigma_t^\omega(\mathcal{P}) = \bigvee_{t \in \mathbb{Q}} \sigma_t^\omega(\mathcal{P})$ が σ^ω -

不変かつ countably generated となるから, countably generated な II_1 (resp. II_∞ , III) 型の $M_\alpha \nearrow M$ が存在して Step 2 の仮定を満すことがわかる. よって σ -finite の場合は separable predual の場合に帰着する.

Step 4 (factor への reduction) M が separable predual のとき, direct integral による factor 分解

$$\{\mathcal{H}, M, \omega\} = \int_{\Gamma}^{\oplus} \{\mathcal{H}(\gamma), M(\gamma), \omega_\gamma\} d\nu(\gamma)$$

を取ると,

$$\mathcal{N} = \int_{\Gamma}^{\oplus} \mathcal{N}(\gamma) d\nu(\gamma) \quad (\text{ただし } \mathcal{N}(\gamma) = M(\gamma) \rtimes_{\sigma, \omega_\gamma} \mathbb{R}),$$

$$Z(\mathcal{N}) = \int_{\Gamma}^{\oplus} Z(\mathcal{N}(\gamma)) d\nu(\gamma),$$

$$\theta_\omega = \int_{\Gamma}^{\oplus} \theta_\omega(\gamma) d\nu(\gamma), \quad \tau = \int_{\Gamma}^{\oplus} \tau_\gamma d\nu(\gamma).$$

各 $\varphi \in M_*^+$ を $\varphi = \int_{\Gamma}^{\oplus} \varphi_\gamma d\nu(\gamma)$ ($\varphi_\gamma \in M(\gamma)_*^+$) と書くと, $h_\varphi = \int_{\Gamma}^{\oplus} h_{\varphi_\gamma} d\nu(\gamma)$ (ただし $h_{\varphi_\gamma} = \frac{d\tilde{\varphi}_\gamma}{d\tau_\gamma}$). よって $e_\varphi = \int_{\Gamma}^{\oplus} e_{\varphi_\gamma} d\nu(\gamma)$ となり $\hat{\varphi} = \int_{\Gamma}^{\oplus} \hat{\varphi}_\gamma d\nu(\gamma)$. 従って, 各 $M(\gamma)$ で定理が成立すれば,

$$\begin{aligned} \|\hat{\varphi} - \hat{\psi}\| &= \int_{\Gamma} \|\hat{\varphi}_\gamma - \hat{\psi}_\gamma\| d\nu(\gamma) = \int_{\Gamma} d([\varphi_\gamma], [\psi_\gamma]) d\nu(\gamma) \\ &= d([\varphi], [\psi]) \end{aligned}$$

が示せるので, M でも定理の (i) が成立. M が properly infinite

で I 型 direct summand をもたないとき, a.e. γ に対し $M(\gamma)$ もそうであるから, direct integral の常套的議論により M でも定理の (ii) が成立するのがわかる. 定理の (iii) も同様.

Step 5 M が separable predual の III_0 型 factor のとき, II_∞ 型の P により $M = P \rtimes \mathbb{Z}_2^{(\infty)}$ と書ける [2]. $M_n = P \rtimes \mathbb{Z}_2^{(n)}$ とすると, $M_n \nearrow M$ で マルチンゲール条件を満たす conditional expectation $E_n: M \rightarrow M_n$ が存在する. $\mathbb{Z}_2^{(n)}$ が有限群だから, M_n は II_∞ 型である. よって Step 2 から, M に対する定理は II_∞ 型の場合に帰着し, さらに Step 4 から semifinite factor の場合 (Step 7) に帰着する.

Step 6 M が separable predual の III_λ 型 factor ($0 < \lambda < 1$) のとき, $\sigma_{t_0}^\omega = \text{id}$ (ただし $t_0 = -2\pi/\log \lambda$) とする忠実な正規 semifinite weight ω が取れて, 接合積 $N_0 = M \rtimes_{\sigma_\omega} (\mathbb{R}/t_0\mathbb{Z})$ は $\mathcal{H} \otimes L^2(\mathbb{R}/t_0\mathbb{Z})$ 上の II_∞ 型 factor になる. このとき, σ^ω の dual action $(\theta_0^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ (ここには $(\mathbb{R}/t_0\mathbb{Z})^\wedge = \mathbb{Z}$ とみなす) と N_0 上の正規トレース τ_0 について, $\tau_0 \circ \theta_0 = \lambda \tau_0$ が成立している. $\varphi \in M_*^+$ に対して, $N = M \rtimes_{\sigma_\omega} \mathbb{R}$ 上の dual weight $\tilde{\varphi}$ と別に, N_0 上の dual weight $\bar{\varphi}$ が定まる (i.e. N_0 から M への operator valued weight $T_0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \theta_0^n(\cdot)$ により $\bar{\varphi} = \varphi \circ T_0$).

いま

$$f_{\varphi}(s) = \tau_0(\chi_{(s, \infty)}(\frac{d\bar{\varphi}}{d\tau_0})), \quad s > 0,$$

とおくと, 次の計算できる:

$$(1) f_{\varphi}(s) = \lambda f_{\varphi}(\lambda s) \quad (s > 0),$$

$$(2) \varphi(1) = \int_{\lambda}^1 f_{\varphi}(s) ds,$$

$$(3) \varphi \sim \psi \iff f_{\varphi} = f_{\psi},$$

$$(4) d([\varphi], [\psi]) = \int_{\lambda}^1 |f_{\varphi}(s) - f_{\psi}(s)| ds,$$

$$(5) \{f_{\varphi} : [\varphi] \in \mathcal{M}_{*}^{+}/\sim\} = \{f : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty) \mid \text{非増加, 右連続, } f(s) = \lambda f(\lambda s) (s > 0)\}.$$

そこで f_{φ} が $\hat{\varphi}$ と等価であることをチェックすればよい. ユニタリー

$$\nabla : \mathcal{H} \otimes L^2(\mathbb{R}/t_0\mathbb{Z}) \otimes L^2(0, \gamma_0) \longrightarrow \mathcal{H} \otimes L^2(\mathbb{R})$$

(ただし $\gamma_0 = -\log \lambda$) を適当に定めると, $\nabla^* \cdot \nabla$ による同一視で

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_0 \otimes L^{\infty}(0, \gamma_0) = \int_{[0, \gamma_0)}^{\oplus} \mathcal{N}_0 d\gamma.$$

このとき,

$$\tau = \int_{[0, \gamma_0)}^{\oplus} e^{-\gamma} \tau_0 d\gamma, \quad \text{i.e.} \quad \tau = \tau_0 \otimes e^{-\gamma} d\gamma.$$

$\gamma \in \mathcal{N}_0 \otimes L^{\infty}(0, \gamma_0) (= L^{\infty}([0, \gamma_0), \mathcal{N}_0))$ と $s = r + n\gamma_0$ ($r \in [0, \gamma_0)$, $n \in \mathbb{Z}$) に対し τ ,

$$(\theta_0(y))(\gamma) = \begin{cases} \theta_0^{n+1}(y(\gamma-r+\gamma_0)), & 0 \leq \gamma < r, \\ \theta_0^n(y(\gamma-r)), & r < \gamma < \gamma_0. \end{cases}$$

これより, $\varphi \in \mathcal{M}_*^+$ に対し $\tilde{\varphi} = \bar{\varphi} \otimes d\gamma$ がわかり,

$$\frac{d\tilde{\varphi}}{d\tau} = \frac{d(\bar{\varphi} \otimes d\gamma)}{d(\tau_0 \otimes e^{-\gamma} d\gamma)} = \frac{d\bar{\varphi}}{d\tau_0} \otimes m(e^\gamma)$$

(ただし $m(e^\gamma)$ は e^γ の掛算作用素). よって

$$e_\varphi = \int_{[0, \gamma_0)}^{\oplus} \chi_{(1, \infty)}(e^\gamma \frac{d\bar{\varphi}}{d\tau_0}) d\gamma = \int_{[0, \gamma_0)}^{\oplus} \chi_{(e^{-\gamma}, \infty)}(\frac{d\bar{\varphi}}{d\tau_0}) d\gamma$$

となり, $z \in Z(\mathcal{N}) = L^\infty(0, \gamma_0)$ に対して

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(z) &= \tau(e_\varphi z) = \int_0^{\gamma_0} \tau_0(\chi_{(e^{-\gamma}, \infty)}(\frac{d\bar{\varphi}}{d\tau_0}) z(\gamma)) e^{-\gamma} d\gamma \\ &= \int_\lambda^1 f_\varphi(s) z(-\log s) ds. \end{aligned}$$

従って, $\varphi, \psi \in \mathcal{M}_*^+$ のとき

$$\|\hat{\varphi} - \hat{\psi}\| = \int_\lambda^1 |f_\varphi(s) - f_\psi(s)| ds = d([\varphi], [\psi]) \quad (\text{by (4)})$$

より, 定理の (i) が成立. 定理の (ii) は (5) からわかる.

Step 7 $\mathcal{M}$ が separable predual の semifinite factor のとき,
 $\mathcal{M}$ 上の正規トレース τ_0 を

$$J_{\text{def}} \{ \tau_0(p) : p \in M \text{ 射影} \} = \begin{cases} \{0, 1, 2, \dots\} & (M \text{ が I 型}) \\ [0, 1] & (M \text{ が II}_1 \text{ 型}) \\ [0, \infty) & (M \text{ が II}_\infty \text{ 型}) \end{cases}$$

のように取って, $\varphi \in M_*^+$ に対して

$$f_\varphi(\lambda) = \tau_0(\chi_{(\lambda, \infty)}(\frac{d\varphi}{d\tau_0})), \quad \lambda > 0,$$

とおくと, 次の計算できる:

$$(1) \varphi(1) = \int_0^\infty f_\varphi(\lambda) d\lambda,$$

$$(2) \varphi \sim \psi \iff f_\varphi = f_\psi,$$

$$(3) d([\varphi], [\psi]) = \int_0^\infty |f_\varphi(\lambda) - f_\psi(\lambda)| d\lambda,$$

$$(4) \{f_\varphi : [\varphi] \in M_*^+ / \sim\} = \{f : [0, \infty) \rightarrow J \mid \text{非増加, 右連続 } L^1\text{-関数}\}.$$

$\sigma_t^{\tau_0} = \text{id}$ より $\mathcal{N} \cong M \otimes L^\infty(\mathbb{R})$ なので,

$$\mathcal{N} = M \otimes L^\infty(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}}^\oplus M d\gamma$$

と同一視すると, $\tau = \int_{\mathbb{R}}^\oplus e^{-\gamma} \tau_0 d\gamma$, $(\theta_s(y))(\gamma) = y(\gamma - s)$ ($\gamma \in \mathbb{R}$).

よって $\varphi \in M_*^+$ に対して, $\tilde{\varphi} = \varphi \otimes d\gamma$ となり $\frac{d\tilde{\varphi}}{d\tau} = \frac{d\varphi}{d\tau_0} \otimes m(e^\gamma)$,

$$e_\varphi = \int_{\mathbb{R}}^\oplus \chi_{(e^{-\gamma}, \infty)}(\frac{d\varphi}{d\tau_0}) d\gamma. \quad z \in Z(\mathcal{N}) = L^\infty(\mathbb{R}) \text{ に対して}$$

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(z) &= \tau(e_\varphi z) = \int_{-\infty}^\infty \tau_0(\chi_{(e^{-\gamma}, \infty)}(\frac{d\varphi}{d\tau_0}) z(\gamma)) e^{-\gamma} d\gamma \\ &= \int_0^\infty f_\varphi(\lambda) z(-\log \lambda) d\lambda. \end{aligned}$$

従って (3) より 定理の (i) が成立. M が II_∞ 型 のとき, 定理の (ii) は (4) からわかる. M が II_1 型 のとき, 定理の (iii) は $J=[0,1]$ に注意すると同じく (4) からわかる.

最後に, 説明を省略した Step 6 の (1)-(5) と Step 7 の (1)-(4) が最も具体的な計算部分であることを注意しておく.

§4. 定理の応用

定理の直接的な応用として, $\mathcal{S}(M)/\sim$ に関する以下の結果が [5] で与えてある.

(1°) M が properly infinite で I 型 direct summand を持たないとき, $[\varphi] \mapsto \hat{\varphi}$ は $\mathcal{S}(M)/\sim$ から

$$P_1(M) = \{ \chi \in \mathcal{S}(Z(N)) : \chi \cdot \theta_s \geq e^{-s} \chi \ (s > 0) \}$$

への onto isometry. また $P_1(M)$ は Choquet simplex.

これの前半は定理の (ii) であり, 後半は容易にわかる.

(2°) M が III_λ 型 factor ($0 \leq \lambda \leq 1$) のとき,

$$\text{diam}(\mathcal{S}(M)/\sim) = 2 \frac{1-\sqrt{\lambda}}{1+\sqrt{\lambda}}.$$

これは §1 の (4°) で述べた結果であるが, [3] の証明は分り易くない. 上の (1°) を使って計算すると, より初等的な別証が得られる. ただし $\lambda=1$ の場合は, 定理の証明で $\mathcal{S}(M)$

の homogeneity を使っているから、別証にはなっていない。尚
[5] では M が separable predual を仮定しているが、この
仮定は不要であろう。

(3°) M が III_λ 型 factor ($0 < \lambda < 1$) のとき, $P_1(M)$ はコン
パクトな Bauer simplex (i.e. $\text{ex} P_1(M)$ がコンパクト) であり,
従って $\mathcal{S}(M)/\sim$ はコンパクト。

(4°) M が III_0 型 factor のとき, $\text{ex} P_1(M) = \emptyset$ であり, 従っ
て $P_1(M)$ および $\mathcal{S}(M)/\sim$ はコンパクトでない。

ついでに, M が I_n 型を除く semifinite factor のときも,
 $\mathcal{S}(M)/\sim$ がコンパクトでないことに注意しておく。

[5] では他にも定理の応用として, centralizer が II_1 型の
忠実正規 state の存在に関する結果と, approximate pointwise
inner 自己同型 (i.e. $\varphi \circ \alpha^{-1} \sim \varphi$ ($\varphi \in M_*^+$) となる $\alpha \in \text{Aut}(M)$)
に関する興味ある結果が与えてある。

§5. 関連結果

筆者と中村氏が [6, 7] で得た結果は Haagerup-Størmer の
主定理に密接に関連している。この節でそれらを報告しよう。
まず M は忠実な正規トレース τ をもつ semifinite v. N. 代数と
する。 (M, τ) 上の L^p -空間は

$$L^p(M) = \{x \in \tilde{M} : \|x\|_p = \tau(|x|^p)^{1/p} < \infty\}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$L^\infty(M) = M, \quad \|\cdot\|_\infty = \|\cdot\|.$$

また

$$\tilde{\mathcal{G}} = \{x \in \tilde{M} : \tau(\chi_{(s, \infty)}(|x|)) < \infty \ (s > 0)\}$$

とすると, $\tilde{\mathcal{G}} \supset L^p(M) \ (1 \leq p < \infty)$. $x \in \tilde{M}$ の generalized s -numbers $\mu_t(x)$, $t > 0$, は

$$\mu_t(x) = \inf \{s \geq 0 : \tau(\chi_{(s, \infty)}(|x|)) \leq t\}.$$

$\tau(1) < \infty$ のとき, $x \in \tilde{M}_{sa}$ (selfadjoint な $\tilde{M}$ の元) の spectral scale $\lambda_t(x)$, $0 < t < \tau(1)$, は

$$\lambda_t(x) = \inf \{s \in \mathbb{R} : \tau(\chi_{(s, \infty)}(x)) \leq t\}.$$

このとき, majorization の手法を使って次が得られる.

(1°) M が finite factor のとき, $x, y \in \tilde{M}_{sa}$ に対して

$$\inf_{u \in \mathcal{U}} \|x - uy u^*\|_p = \left\{ \int_0^{\tau(1)} |\lambda_t(x) - \lambda_t(y)|^p dt \right\}^{1/p}, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

ただし $p = \infty$ では 右辺 = $\sup_{0 < t < \tau(1)} |\lambda_t(x) - \lambda_t(y)|$.

(2°) M が infinite な semifinite factor のとき, $x, y \in \tilde{\mathcal{G}}_{sa}$ に対して

$$\inf_{u \in \mathcal{U}} \|x - uy u^*\|_p = \left\{ \int_0^\infty |\mu_t(x_+) - \mu_t(y_+)|^p dt + \int_0^\infty |\mu_t(x_-) - \mu_t(y_-)|^p dt \right\}^{1/p},$$

$$1 \leq p \leq \infty.$$

ただし $p=\infty$ では 右辺 $= \max \left\{ \sup_{t>0} |\mu_t(x_+) - \mu_t(y_+)|, \sup_{t>0} |\mu_t(x_-) - \mu_t(y_-)| \right\}$.

また $x = x_+ - x_-$ は x の Jordan 分解.

いま $\varphi, \psi \in M_*^+$ のとき, $x = \frac{d\varphi}{d\tau}$, $y = \frac{d\psi}{d\tau} \in L^1(M)_+$ となり,
(1°), (2°) から

$$d([\varphi], [\psi]) = \inf_{u \in \mathcal{U}} \|x - u y u^*\|_1 = \int_0^\infty |\mu_t(x) - \mu_t(y)| dt.$$

$\mu_t(x)$ は $f_\varphi(s) = \tau(\chi_{(s, \infty)}(x))$ の "inverse" 関数であり,

$$\int_0^\infty |\mu_t(x) - \mu_t(y)| dt = \int_0^\infty |f_\varphi(s) - f_\psi(s)| ds$$

に注意すると, 上の (1°), (2°) は M が semifinite factor の場合
で $M_*^+ = L^1(M)_+$ に対する定理の (i) を $L^p(M)_{sa}$, $1 \leq p \leq \infty$, に拡張
していることがわかる.

次に M が III 型の場合を考えよう.

(3°) M が σ -finite な III 型 factor のとき, 正規な $x, y \in M$
に対して

$$\inf_{u \in \mathcal{U}} \|x - u y u^*\| = h(\sigma(x), \sigma(y)).$$

ここに 右辺は x, y のスペクトル $\sigma(x), \sigma(y)$ の間の Hausdorff
距離.

さて, §2 の $\mathcal{N}$ と θ_ϕ を用いて, Haagerup L^p -空間は

$$L^p(M) = \{x \in \tilde{\mathcal{N}} : \theta_\lambda(x) = e^{-\lambda/p} x \quad (\lambda \in \mathbb{R})\}, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

特に M が III_λ 型 factor ($0 < \lambda < 1$) の場合, §3 の Step 6 の $\mathcal{N}_0$ と θ_0 を用いて, "discrete" Haagerup L^p -空間は

$$L_o^p(M) = \{x \in \tilde{\mathcal{N}}_0 : \theta_0(x) = \lambda^{1/p} x\}, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

(4°) M が III_1 型 factor のとき, $x, y \in L^p(M)_{sa}$, $1 \leq p < \infty$, に対して

$$\inf_{u \in \mathcal{U}} \|x - u y u^*\|_p = \left\{ |\|x_+\|_p - \|y_+\|_p|^p + |\|x_-\|_p - \|y_-\|_p|^p \right\}^{1/p}.$$

これの左辺 $\geq$ 右辺は $x \in L^p(M)$ の $\tilde{\mathcal{N}}$ での generalized s -numbers が $\mu_t(x) = t^{1/p} \|x\|_p$ であることから majorization の手法で証明される. 左辺 $\leq$ 右辺は $\mathcal{S}(M)$ の homogeneity と generalized Powers-Størmer 不等式 (by Kosaki) を使って証明される.

(5°) M が III_λ 型 factor ($0 < \lambda < 1$) のとき, $x, y \in L_o^p(M)_{sa}$, $1 \leq p < \infty$, に対して

$$\inf_{u \in \mathcal{U}} \|x - u y u^*\|_p = \left\{ \int_\lambda^1 |\mu_t(x_+) - \mu_t(y_+)|^p dt + \int_\lambda^1 |\mu_t(x_-) - \mu_t(y_-)|^p dt \right\}^{1/p}.$$

こゝに $\mu_t(x)$ は x の $\tilde{\mathcal{N}}_0$ での generalized s -numbers.

これも $\mu_t(x) = \lambda^{1/p} \mu_{\lambda t}(x)$ であることから majorization の手法

で証明される.

いま $\varphi, \psi \in \mathcal{M}_*^+$ のとき, $x = \frac{d\bar{\varphi}}{d\tau_0}$, $y = \frac{d\bar{\psi}}{d\tau_0} \in L^1_0(\mathcal{M})_+$ となり
(cf. §3 の Step 6),

$$d([\varphi], [\psi]) = \inf_{u \in \mathcal{U}} \|x - uy u^*\|_1 = \int_{\lambda}^1 |\mu_t(x) - \mu_t(y)| dt.$$

$\mu_t(x)$ は $f_{\varphi}(s) = \tau_0(\chi_{(s, \infty)}(x))$ の "inverse" 関数であり,

$$\int_{\lambda}^1 |\mu_t(x) - \mu_t(y)| dt = \int_{\lambda}^1 |f_{\varphi}(s) - f_{\psi}(s)| ds$$

に注意すると, (5°) は $\mathcal{M}$ が III_{λ} 型 factor ($0 < \lambda < 1$) の場合で
 $\mathcal{M}_*^+ = L^1_0(\mathcal{M})_+$ に対する定理の (i) を $L^p_0(\mathcal{M})_{sa}$, $1 \leq p < \infty$, に拡張
していることがわかる.

次は (5°) の系である.

(6°) $\mathcal{M}$ が III_{λ} 型 factor ($0 < \lambda < 1$) のとき,

$$\text{diam}(L^p(\mathcal{M})_{+,1}/\sim) = 2^{1/p} \frac{1 - \lambda^{1/2p}}{(1 + \lambda^{1/2})^{1/p}}, \quad 1 \leq p \leq 2.$$

こゝに $L^p(\mathcal{M})_{+,1}/\sim$ は $L^p(\mathcal{M})_{+,1} = \{x \in L^p(\mathcal{M})_+ : \|x\|_p = 1\}$ の
閉ユニタリ軌道の空間 (特に $L^1(\mathcal{M})_{+,1}/\sim = \mathcal{S}(\mathcal{M})/\sim$).

§6. 問題と予想

Haagerup-Størmer の主定理が $\mathcal{M}_*^+ = L^1(\mathcal{M})_+$ における結果である
のに対し, §5 のそれぞれの結果は $L^p(\mathcal{M})_{sa}$ におけるもので

あるから強い。他方, Haagerup-Størmer のが unified theorem であるのに対し, われわれのはタイプごとの結果であり, しかも III_0 型が抜けているのが弱い。 $L^p(M)_{sa}$ における unified theorem が出来れば申し分ないが, 当面の問題として以下のものが考えられる。

(問題1) M が III_0 型 factor の場合, $x, y \in L^p(M)_{sa}$, $1 \leq p < \infty$, に対して $\inf_{u \in \mathcal{U}} \|x - uy u^*\|_p$ を exact に評価すること。われわれの majorization の方法では, $\mu_t(x)$ が $\|x\|_p$ だけで決まるので exact な評価は望めない。対応 $[\varphi] \in M_*^+ / \sim \mapsto \hat{\varphi} \in Z(N)_*^+$ を $L^p(M)_+ / \sim$ の元にまで modify して §3 の マルチンゲールの定理の方法を使うことが考えられるが, それだけでは無理なように思われる。

(問題2) M が III_0 型 factor の場合, 問題1を矮小化した問題として予想 $\text{diam}(L^p(M)_{+,1} / \sim) = 2^{1/p}$, $1 \leq p < \infty$, がある。

(問題3) §5 の (2°), (4°), (5°) を考慮すると, M が properly infinite のとき, $x, y \in L^p(M)_{sa}$, $1 \leq p < \infty$, に対して

$$\inf_{u \in \mathcal{U}} \|x - uy u^*\|_p = \left\{ \inf_{u \in \mathcal{U}} \|x_+ - uy_+ u^*\|_p^p + \inf_{u \in \mathcal{U}} \|x_- - uy_- u^*\|_p^p \right\}^{1/p}$$

が予想される。 M が separable predual とすると, $L^p(M)$ に対する reduction theory が使えるから, M が infinite factor のと

きに証明すれば十分であろう。従って M が III_0 型 factor の場合が問題となる。特に $p=1$ の場合, この問題は selfadjoint な $\varphi, \psi \in M_*$ に対して

$$\begin{aligned} d([\varphi], [\psi]) &= d([\varphi_+], [\psi_+]) + d([\varphi_-], [\psi_-]) \\ &= \|\hat{\varphi}_+ - \hat{\psi}_+\| + \|\hat{\varphi}_- - \hat{\psi}_-\| \end{aligned}$$

と同じである。これが証明できれば, 問題 1 で $p=1$ の場合が一応解決することになる。 M が finite な場合, 上の等式が成立しないことに注意しておく。

文 献

- [1] J. Bion-Nadal, Espace des états normaux d'un facteur de type III_λ , $0 < \lambda < 1$, et d'un facteur de type III_0 , Canad. J. Math., 36 (1984), 830-882.
- [2] A. Connes, Une classification des facteurs de type III, Ann. Sci. École Norm. Sup. Sér. 4, 6 (1973), 133-252.
- [3] A. Connes, U. Haagerup and E. Størmer, Diameters of state spaces of type III factors, Lecture Notes in Math. 1132, Springer, 1985, pp. 91-116.
- [4] A. Connes and E. Størmer, Homogeneity of the state space of factors of type III_1 , J. Funct. Anal., 28 (1978), 187-196.
- [5] U. Haagerup and E. Størmer, Equivalence of normal states on von Neumann algebras and the flow of weights, Preprint.
- [6] F. Hiai and Y. Nakamura, Distance between unitary orbits in von Neumann algebras, Pacific J. Math., to appear.
- [7] Y. Nakamura, L^p -distance between unitary orbits in type III factors, Preprint.