

負曲率閉曲面の測地流に対応する
Anosov 微分同相写像について

東大 理 橋口 徳一
Norikazu HASHIGUCHI

1. INTRODUCTION.

ここでは、負曲率をもつ有向閉曲面の測地流に対応する Birkhoff's section とその上の Anosov 微分同相写像について論ずる。

Birkhoff は、[B]において、Lagrange の運動方程式の解の位相的な性質を研究する中で、surface of section (= Birkhoff's section) を定義した。その後 [F] において、Fried が、負曲率をもつ閉曲面の測地流に対する Birkhoff's section を構成し、この section についての first return map から測地流を再構成する方法を示した。最近になって Ghys がこの first return map が hyperbolic toral automorphism と半共役であることを示し、更にその行列の trace を計算している。ここでは、その行列の共役類を決定し、Fried の方法を用いて測地流をその行列から具体的に構成する。

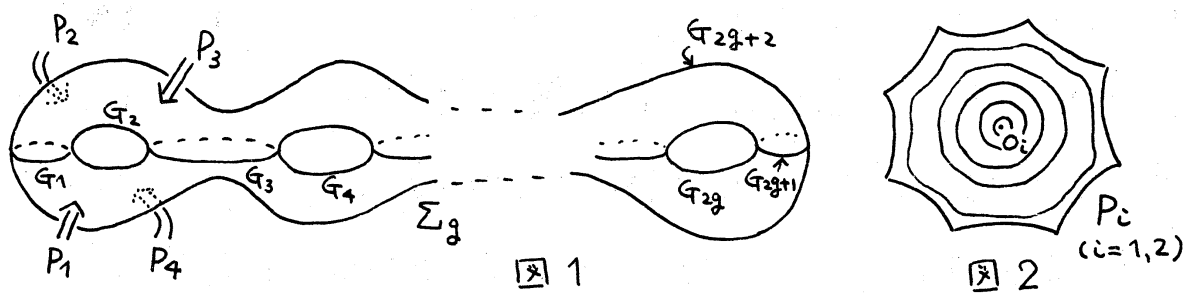
2. BIRKHOFF'S SECTION.

Σ_g : 種数 $g (\geq 2)$ の有向閉曲面で負曲率をもつ metric を決めておく.

$F_t: T\Sigma_g \rightarrow T\Sigma_g \quad (t \in \mathbb{R})$: この metric についての測地流
($T\Sigma_g$ は単位接ベクトル束)

Fried は F_t についての Birkhoff's section を以下のように構成した。

$G_1, G_2, \dots, G_{2g+2}$ を図1に示す単純閉測地線とおく。



これらの測地線によつて Σ_g は 4つの $2g+2$ 角形に分割される。図1のように P_1, P_2, P_3, P_4 と呼ぶ。更に P_1, P_2 上に図2のような1個だけ特異点を持つ、凸で滑らかな単純閉曲線の族 C_1, C_2 を考える(特異点を o_1, o_2 とする。) 今、

$S = \{ C_1, C_2 \text{ の各 閉曲線に接する長さ1のベクトル} \}$ の
 $T\Sigma_g$ における閉包

と定義する。 S は次のような性質を持っている。

1. S は滑らかな有向曲面で、 F_t の閉軌道からなる境界を持っている。
($4g+4$ 個の)

2. S の内部 $S \setminus \partial S$ は $F_\pm$ と横断的に交わり, first return map $F: S \setminus \partial S \rightarrow S \setminus \partial S$ は S の微分同相写像 $\tilde{F}: S \rightarrow S$ へ拡張する。

3. S の Euler 数は $-(4g+4)$ である。

従って S は 2次元トーラス T^2 から $4g+4$ 個の開円板を取り除いた曲面と微分同相である。

今後必要となるので, S についてもう少し詳しく述べる。

$S_i = S \cap p_0^{-1}(P_i)$ ($i=1,2$) とおく。(ここで $p_0: T, \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$ は projection である。) S_i は 0_i 上の fibre を中心線とする円筒である。 D を Σ_g の普遍被覆である Poincaré disk とし, その単位接ベクトル束の自然な自明化 $\pi: T, D \rightarrow D \times S^1$ を $v \in T, D$ に対して $\pi(v) = (p(v), e(v))$ と定義する。

(ここで $p: T, D \rightarrow D$ は projection, $e: T, D \rightarrow S^1 = \partial D$ は $v \in T, D$ に対して $p(v)$ を v 方向に出発した測地線が達する ∂D の点を対応させる写像

∂D には反時計回りの向きを与え, P_i の D への lift を図3のように固定しておく。すると, D は被覆変換によって P_i のいずれかと同一視される無限個の $2g+2$ 角形に分割される。

C_{i+} と C_{i-} ($i=1,2$) を C_i の閉曲線にそれぞれ反時計回り, 時計回りの向きを与えた, 特異点を1個もつ有向閉曲線の族とする。 S_i を T, D に含まれると考えて, 次のように座標を

定める。 $\delta_{i\pm}$ を S_i の境界成分で $C_{i\pm}$ の境界に対応しているものとする。 $\delta_{i\pm}$ は ある閉測地線 G_k の $T.D$ への lift に含まれる部分 $h_{i\pm}^j$ と そうでない部分 $v_{i\pm}^j$ ($j=1, 2, \dots, 2g+2$) の $4g+4$ 個の線分に分割できる。そして S_1 と S_2 から S を得るには v_{1+}^j と $v_{2-}^{j'}$, $v_{2+}^{j''}$ と $v_{1-}^{j''}$ とを貼り合わせれば良い。従って $\{h_{i\pm}^j\}_{j=1, 2, \dots, 2g+2}^{i=1, 2}$ は S の境界となる部分である。

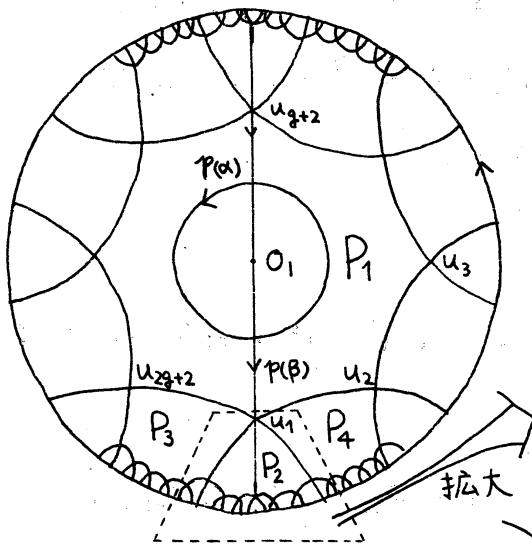


図 3.

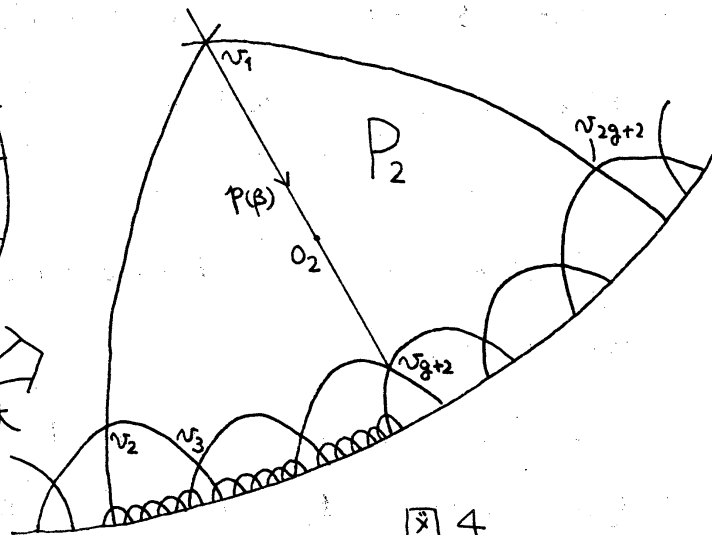


図 4.

$m_i: S_i \rightarrow S'$ を e を S_i に制限した写像とする。 $S_i \setminus \partial S_i$ は 開区間 $m_i^{-1}(a)$ ($a \in S'$) に分割される。 $S_i \setminus \partial S_i$ と $(0, 1) \times S'$ の同一視を $m_i^{-1}(a)$ が $(0, 1) \times \{a\}$ に対応し、 $\{e\} \times S'$ ($e \in (0, 1)$, $e \neq \frac{1}{2}$) は $0 < e < \frac{1}{2}$ の時 C_{i+} の閉曲線の lift と対応し、 $\frac{1}{2} < e < 1$ の時 C_{i-} の閉曲線の lift と対応するように定める。 $k_i: S_i \setminus \partial S_i \rightarrow (0, 1)$ を その projection とする。

$\hat{S}_i$ を S_i の各 h_i をそれぞれ 1 点につぶして得られる円筒とする。 k_i の拡張を $\hat{k}_i: \hat{S}_i \rightarrow [0,1]$ と書く。又 m_i は各 h_i を 1 点に写していたので m_i の拡張 $\hat{m}_i: \hat{S}_i \rightarrow S^1$ も定義できて $\hat{k}_i \times \hat{m}_i: \hat{S}_i \rightarrow [0,1] \times S^1$ なる同-視が得られる。

$\hat{S}$ を S の各境界成分を 1 点につぶして得られる 2 次元トラスとし $\hat{F}: \hat{S} \rightarrow \hat{S}$ は $\tilde{F}$ から得られる $\hat{S}$ の同相写像とする。この時 Ghys は 次を示した。([G])

Theorem A. $\hat{F}$ は hyperbolic toral automorphism と位相共役である。

すなわち $A_g \in SL(2, \mathbb{Z})$ $| \text{trace } A_g | > 2$ があって、

更に 同相写像 $H: T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \rightarrow \hat{S}$ によって

$$\hat{A}_g = H^{-1} \circ \hat{F} \circ H$$

と書ける。(ここで $\hat{A}_g$ は A_g が $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ へひきおこす微分同相写像である。)

筆者は A_g の $SL(2, \mathbb{Z})$ における共役類を決定した。

(注) Ghys は A_g の trace をも計算しているが、 $SL(2, \mathbb{Z})$ の共役類は trace では決まらない。([S-F])

Theorem B. $\hat{S}$ のある basis の下で A_g は 次の形に書ける。

$$A_g = \begin{pmatrix} 2g^2 - 1 & 2g(g-1) \\ 2g(g+1) & 2g^2 - 1 \end{pmatrix} = \left(- \begin{pmatrix} g & g-1 \\ g+1 & g \end{pmatrix} \right)^2$$

3. Theorem B. の証明のあらすじ.

A_g の成分を求めるには、次の事を行う。 T^2 の basis $\langle \tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \rangle$ を $\pi_1(T^2)$ の生成元となる単純閉曲線の組とする。 $\hat{A}_g$ の $\pi_1(T^2)$ への作用を $\hat{A}_g*$ とすると

$$\hat{A}_g*[\tilde{\alpha}] = a[\tilde{\alpha}] + b[\tilde{\beta}]$$

$$\hat{A}_g*[\tilde{\beta}] = c[\tilde{\alpha}] + d[\tilde{\beta}] \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}$$

($[\tilde{\alpha}], [\tilde{\beta}]$ は $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ の代表する $\pi_1(T^2)$ の元)

と書けてゐるならば、 A_g は次の様になる。

$$A_g = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

まず $\hat{S}$ の basis を決める。初めに、 C_{1+} の元で O_1 の近くの単純閉曲線を選び、その $T_1 \Sigma_g$ への lift を α とおくと、 α は $S \setminus \partial S$ の中の単純閉曲線である。 P_1 と P_2 の頂点を図 3, 4 に示すように反時計回りにそれぞれ $u_1, u_2, \dots, u_{2g+2}$ と $v_1, v_2, \dots, v_{2g+2}$ と呼ぶことにする。このとき $u_{g+2}, O_1, u_1 = v_1, O_2, v_{g+2} = u_{g+2}$ をこの順に通過する $P_1 \cup P_2$ 内の単純閉曲線

の $\pi_1 \Sigma_g$ への lift を β とおく。(この lift は実際には、線分 $(u_{g+2}, 0_1)$ の持ち上げが $k_1^{-1}(0, \frac{1}{2})$ に存在するものと、 $k_2^{-1}(\frac{1}{2}, 1)$ に存在するものの 2 通りあるが今は $k_1^{-1}(0, \frac{1}{2}) \wedge (u_{g+2}, 0_1)$ が持ち上がっている方を考える。) β は $S \setminus \partial S$ 内の単純閉曲線である。 α, β とともに $S \setminus \partial S$ に含まれるので、 $\hat{S}$ 内の単純閉曲線 $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ を表す。

Lemma. $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ は $\hat{S}$ の basis をなす。

⊙ α と β は $S \setminus \partial S$ において横断的にただ 1 度だけ交わっている。 $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ も $\hat{S}$ において同様のことを満たし従って $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ は $\pi_1(\hat{S})$ の生成元を表している。 //

$\hat{S}$ を得ると共に S_1 と S_2 の $v_{1\pm}$ と $v_{2\pm}$ をはり合わせて S をつくり ∂S の各成分を 1 点につぶす操作を行った。従って順序を逆にして $\hat{S}_1$ と $\hat{S}_2$ をこれらの境界 $\hat{\delta}_{i\pm}$ ではり合わせても $\hat{S}$ を得ることができる。 $\hat{m}_i$ を $\hat{\delta}_{i\pm}$ に制限すると、 S' の向きを保つ同相写像となるが、これによって $\hat{\delta}_{i\pm}$ と $\partial D = S'$ とを同一視する。 $\hat{\delta}_{1+}$ と $\hat{\delta}_{2-}$, $\hat{\delta}_{2+}$ と $\hat{\delta}_{1-}$ のはり合わせの写像は、 ∂D の同相写像と見ることができる。又、 $k_1^{-1}(0) = \hat{\delta}_{1+}$, $k_2^{-1}(1) = \hat{\delta}_{2-}$, $k_2^{-1}(0) = \hat{\delta}_{2+}$, $k_1^{-1}(1) = \hat{\delta}_{1-}$,

であるので、 $k: \hat{S} \rightarrow S' = [0, 2] / 0 \sim 2$ なる写像を

$$\begin{cases} \hat{k}_1(x) & x \in \hat{S}_1 \\ \hat{k}_2(x) + 1 & x \in \hat{S}_2 \end{cases}$$

と定義できる。

C_i の単純閉曲線は、 $\square$ なので m_i を α に制限した写像 $m_i|_{\alpha}$ は向きを保つ同相写像である。又、 β は S_1 において、 σ_{1+} の点を出発し、 $p^{-1}(0_1)$, $\sigma_{1-} = \sigma_{2+}$, $p^{-1}(0_2)$, $\sigma_{2-} = \sigma_{1+}$ を横切る。 $p(\beta)$ は C_i の元と横断的に交わるので、 $\tilde{\beta}$ も $k^{-1}(a)$ ($a \in S' = [0, 2] / 0 \sim 2$) と横断的に交わっている。従って $k|_{\tilde{\beta}}$ も向きを保つ同相写像である。

以上のことから次のことがわかる。

④ γ を $\hat{S}$ の閉曲線としたとき、 $\pi_1(\hat{S})$ において

$$[\gamma] = a[\tilde{\alpha}] + b[\tilde{\beta}] \quad a, b \in \mathbb{Z}$$

が成立している、ここで以下は同値である。

まず $k(\gamma)$ が $S' = [0, 2] / 0 \sim 2$ を b 回巻いている。(ここで $S' = [0, 2] / 0 \sim 2$ には自然な向きを与えておく。)

次に γ' を $\hat{S}_1$ の閉曲線で、 $\pi_1(\hat{S})$ において $[\gamma] - b[\tilde{\beta}]$ を表しているものとする、 $\hat{m}_1(\gamma')$ は $S' = \partial D$ を a 回巻いている。

(ここで $\pi_1(\hat{S})$ と free homotopy class $[S', \hat{S}]$ とを区別していない。)

この手順に従って $\hat{F}(\alpha)$, $\hat{F}(\beta)$ が $\pi_1(\hat{S})$ の元としてどのように表されるかを求めることができる。実際に計算してみると

$$\hat{F}_*[\alpha] = (2g^2 - 1)[\alpha] + 2g(g+1)[\beta]$$

$$\hat{F}_*[\beta] = 2g(g-1)[\alpha] + (2g^2 - 1)[\beta]$$

となる。これで Theorem B. は示された。

4. F_t の再構成.

Fried は、ある条件を満たす 擬 Anosov 写像 から、3次元閉多様体上の transitive な Anosov 流を構成した。ここでは、彼の方法を用いて A_g から 測地流 F_t を具体的に構成する。

$x_1, x_2, \dots, x_{4g+4} \in T^2$ を $\hat{A}_g : T^2 \rightarrow T^2$ の固定点とし、
 $T_0 = T^2 \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_{4g+4}\}$ とおく。 T は T_0 の自然な compact 化とする。 $\hat{A}_g|_{T_0}$ によって $\dot{A}_g : T \rightarrow T$ なる同相写像が得られ、それは各境界の S^1 を自分自身に写している。 $\dot{A}_g$ の mapping torus を M^* , $\dot{A}_g$ の suspension flow を $\phi_t^* : M^* \rightarrow M^*$ とおく。 M^* の境界は $x_1, x_2, \dots, x_{4g+4}$ に対応して $4g+4$ 個のトーラス $x_1^*, x_2^*, \dots, x_{4g+4}^*$ から成る。各 x_i^* には $H_1(x_i^*)$ の座標系を次のように与える。
 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

i) 1番目の生成元は meridian $m \in H_1(x_i^*)$ で

$\phi_*^*|_{x_i^*}$ の閉軌道の1つが代表している。

ii) 2番目の生成元は longitude $l \in H_1(x_i^*)$ で

mapping torus $M^* \rightarrow S^1$ の fibre の境界に時計回りの向きを与えた閉曲線が代表している。(図5)

x_i^* は $\phi_*^*|_{x_i^*}$ の全ての軌道と横断的に交わり $H_1(x_i^*)$ において $m + l$ を代表する S^1 を葉とする foliation を持っている。この foliation の各葉を1点につぶすことにより新しい flow $\phi_* : M \rightarrow M$ が得られ、実はこの ϕ_* は 測地流 F_* と位相共役である。このようにして $x_1, x_2, \dots, x_{4g+4}$ をうまく選べば F_* が位相的に再構成されるのである。

(注) 位相的に考えれば M は $\hat{A}_g$ の mapping torus に $4g+4$ 回 $(1,1)$ -Dehn surgery を行て得られた。

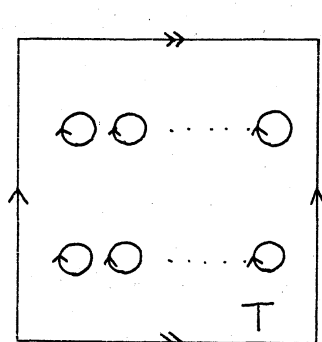


図5.

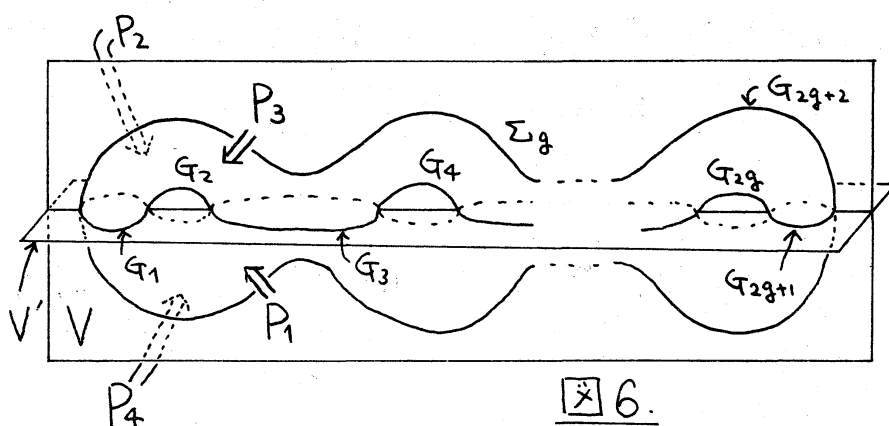


図6.

そこで、 $4g^2 - 4$ 個ある $\hat{A}_g$ の固定点の中から $x_1, x_2, \dots, x_{4g+4}$ を選び出す。そのためには、 A_g が $B_g = \begin{pmatrix} -g & -(g-1) \\ -(g+1) & -g \end{pmatrix}$ の 2 乗の形をしている理由を知ることが有効である。 V を図 6 に示す様な、 $G_2, G_4, \dots, G_{2g+2}$ を含む平面とする。 V についての対称変換 $\tau: \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$ とおく。 $\tau(P_1) = P_4$, $\tau(P_2) = P_3$ となっている。 P_3, P_4 の単純閉曲線の族をそれぞれ $C_3 = \tau(C_2)$, $C_4 = \tau(C_1)$ で定義する。 C_1, C_2 の時と同様に C_3, C_4 から P_3, P_4 上の F_* に対する section $S_3, S_4 \subset T_1 \Sigma_g$ が得られ $S' = S_3 \cup S_4$ は F_* に対する Birkhoff's section となる。 S と S' は互いの境界部分が貼り合わさって $S \cup S'$ は閉曲面であり $F': S \cup S' \rightarrow S \cup S'$ を F_* に対する "first return map" から得られる写像とする。 C_i ($i=1, 2, 3, 4$) の閉曲線は凸だから $F'(S) = S'$, $F'(S') = S$ であり、 $F = (F'|_{S'}) \circ (F'|_S)$ が成立する。 τ が単位接ベクトル束へ誘導する写像を $T_1 \tau: T_1 \Sigma_g \rightarrow T_1 \Sigma_g$ とおくと、 $(T_1 \tau) \circ (T_1 \tau) = \text{id}_{T_1 \Sigma_g}$, $T_1 \tau(S) = S'$ を満たす。測地流 F_* と $T_1 \tau$ は、 V をうまく取れば、可換なので次が成立する。

Lemma. F' と $T_1 \tau$ は可換である。すなわち $F' \circ (T_1 \tau) = (T_1 \tau) \circ F'$

従って $F'|_{S'} = (T_1 \tau|_{S'}) \circ (F'|_S) \circ (T_1 \tau|_S)^{-1} = (T_1 \tau|_{S'}) \circ (F'|_S) \circ (T_1 \tau|_{S'})$

$$F = (F|_{S'}) \circ (F|_S) = (\pi|_{S'}) \circ (F|_S) \circ (\pi|_{S'}) \circ (F|_S) = \{(\pi|_{S'}) \circ (F|_S)\}^2$$

$\hat{S}'$ を S' の各境界成分を 1 点に結びつけて得られる 2 次元トラスとし $\hat{\pi}|_{\hat{S}'}$, $\hat{F}|_{\hat{S}}$ を $\pi|_{S'}$, $F|_S$ から誘導される写像とする。すると、上の事から $\hat{F} = \{(\hat{\pi}|_{\hat{S}'} \circ (\hat{F}|_{\hat{S}}))\}^2$ となる。従って $\hat{B}_g$ を B_g から $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ へひきおこす微分同相写像とすると、 $\{H^{-1} \circ (\hat{\pi}|_{\hat{S}'} \circ (\hat{F}|_{\hat{S}})) \circ H\}^2 = \hat{A}_g = (\hat{B}_g)^2$ が成立するので、次は容易にわかる。

Proposition. $H^{-1} \circ (\hat{\pi}|_{\hat{S}'} \circ (\hat{F}|_{\hat{S}})) \circ H = \hat{B}_g.$

V' を図 6 に示す様な $G_1, G_3, \dots, G_{2g+1}$ を含む平面とし、 $\tau': \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$ を V' についての対称変換、 $\pi': T_1 \Sigma_g \rightarrow T_1 \Sigma_g$ を τ' から得られる写像、 $\hat{\pi}'|_{\hat{S}'}$ は $\pi'|_{S'}$ から誘導される写像とする。 $\hat{B}_g(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ をアフィン写像 $\begin{pmatrix} B_g & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ から $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ へひきおこす微分同相写像とすると Proposition を成立させる普遍被覆 $\pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$ の下で、上と同様にして次が示される。

$$H^{-1} \circ (\hat{\pi}'|_{\hat{S}'} \circ (\hat{F}|_{\hat{S}})) \circ H = \hat{B}_g(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}).$$

閉測地線 G_i は、2通りの向きを持ち得るので、 $T_1 \Sigma_g$ への ι_i は 2通りあるが、それを $+G_i, -G_i$ と書く。 $\{x_1, x_2, \dots, x_{4g+4}\}$

は S の境界に対応する $\hat{S}$ の点である。 $\partial S = \{\pm G_1, \pm G_2, \dots, \pm G_{2g+2}\}$ であり、 $\{\pm G_1, \pm G_3, \dots, \pm G_{2g+1}\}$ は $(\hat{T}|_{\hat{S}}) \circ (\hat{F}|_{\hat{S}})$ の固定点に対応し、 $\{\pm G_2, \pm G_4, \dots, \pm G_{2g+2}\}$ は $(\hat{T}|_{\hat{S}}) \circ (\hat{F}|_{\hat{S}})$ の固定点に対応している。従って、 T^2 で考えると、 $\{x_1, x_2, \dots, x_{4g+4}\}$ は $\hat{B}_g, \hat{B}_g(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ の固定点 となっている訳だが、 $\hat{B}_g, \hat{B}_g(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ の固定点の数はともに $2g+2$ 個であり、共通な固定点はないので

$$\begin{aligned} \{x_1, x_2, \dots, x_{4g+4}\} &= \text{Fix}(\hat{B}_g) \cup \text{Fix}(\hat{B}_g(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})) \\ &= \left\{ \pi\left(\frac{a}{2(g+1)}, \ell\right); \ell=0, \frac{1}{2} \quad a=0, 1, 2, \dots, 2g+1 \right\}. \end{aligned}$$

従って

Theorem C. 行列 A_g から測地流 F_A を構成する

ためには、次のことを行えば良い。

1. まず $\hat{A}_g$ の suspension flow を作る。
2. 次に $\left\{ \pi\left(\frac{a}{2(g+1)}, \ell\right) \in T^2; \ell=0, \frac{1}{2} \quad a=0, 1, 2, \dots, 2g+1 \right\}$ に対応する, suspension flow の閉軌道 について。

Fried の (1,1) - Dehn surgery を行う。

こうしてできた 3次元閉多様体上の flow は測地流 F_A と位相共役である。

References

- [A] Anosov, D.V., Geodesic Flows on Closed Riemannian Manifolds with Negative Curvature, Proc. Steklov Inst. Math. 90, 1-235 (1967).
- [B] Birkhoff, G.D., Dynamical Systems with Two Degrees of Freedom, Trans. Amer. Math. Soc. 18, 199-300 (1917).
- [F] Fried, D., Transitive Anosov Flows and Pseudo-Anosov Maps, Topology vol. 22, no. 3, 299-303 (1983).
- [G] Ghys, E., Sur l'invariance topologique de la classe de Godbillon-Vey, Ann. Inst. Fourier 37, 59-76 (1987).
- [S-F] Sakamoto, K. and Fukuhara, S., Classification of T^2 bundles over T^2 , Tokyo J. Math. vol. 6, no. 2, 311-327 (1983).