

力学系と 摂動 Perron–Frobenius 作用素

森 真
日本大学文理学部

1 Perron–Frobenius 作用素

$F: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ を piecewise linear かつ expanding

$$\xi = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \operatorname{ess\,inf}_{x \in [0, 1]} \log |F^n'(x)| > 0$$

であり, topologically transitive であるとする. このとき, Lebesgue 測度に絶対連続な invariant probability measure μ がただ一つ存在して, 力学系 $([0, 1], \mu, F)$ は mixing であることが知られている.

このことを証明するのに L^1 からそれ自身への写像である Perron–Frobenius 作用素

$$Pf(x) = \sum_{y: F(y)=x} f(y) |F'(y)|^{-1}$$

のスペクトルが役にたつ (cf. for example [5, 6]). そうはいうものの, Perron–Frobenius operator は compact でないので, スペクトルを決定するのは一般には容易ではない.

一方で, Ruelle によって定義された dynamical ζ function

$$\zeta(z) = \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \sum_{p: F^n(p)=p} |F^n'(p)|^{-1} \right]$$

はその Fredholm determinant を与えると形式的にみなせる. すなわち, その特異点の逆数が有界変動関数全体に制限した Perron–Frobenius 作用素のスペクトルになると予想される.

1.1 Symbolic Dynamics

piecewise linear 変換 $F: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ について,

1. 有限集合 $\mathcal{A}$ が存在して区間 $\{\langle a \rangle\}_{a \in \mathcal{A}}$ は $[0, 1]$ の分割を与え, F' は各 $\langle a \rangle$ ($a \in \mathcal{A}$) の上で定数 η_a^{-1} である.

2. $x \in [0, 1]$ に対してその展開 $a_1^x a_2^x \cdots (a_i^x \in \mathcal{A})$ を $F^{i-1}(x) \in \langle a_i^x \rangle$ で定義すると, F は $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ のある閉部分集合 X の上の shift θ と同一視できる.
3. F が Markov であるとは, $F(\langle a \rangle) \cap \langle b \rangle$ の内点 $\neq \emptyset$ ならば $F(\langle a \rangle)$ の閉包は $\langle b \rangle$ を含む. ことである. このとき, $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ の上の構造行列を

$$M_{a,b} = \begin{cases} 1 & F(\langle a \rangle) \cap \langle b \rangle \text{ の内点 } \neq \emptyset, \\ 0 & \text{その他,} \end{cases}$$

とおくと, $X = \{a_1 a_2 \cdots \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} : M_{a_i, a_{i+1}} = 1\}$ で与えられる.

4. $\alpha = a_1 a_2 \cdots$ に対して, $x \in [0, 1]$ でその展開が α に一致するものがあるとき, α は存在するという.
5. word $w = a_1 \cdots a_n$ と点 $x \in [0, 1]$ に対して

$$\begin{aligned} \langle w \rangle &= \bigcap_{i=1}^n F^{-i+1}(\langle a_i \rangle), \\ wx &= a_1 \cdots a_n a_1^x a_2^x \cdots, \\ \eta_w &= \prod_{i=1}^n \eta_{a_i}, \\ \operatorname{sgn} w &= \begin{cases} +1 & F^{n'}(x) > 0 \ (x \in \langle w \rangle), \\ -1 & \text{その他,} \end{cases} \end{aligned}$$

と定める. wx は記号の無限列とみなし, 対応する点が存在するときはその点と同一視する.

1.2 Renewal Equation

$g \in L^\infty$, $J \subset [0, 1]$ について, 母関数を

$$s_g^J(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int_J g(F^n x) dx$$

で定義しよう. この母関数は Perron-Frobenius 作用素を用いて

$$\begin{aligned} s_g^J(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int P^n 1_J(x) g(x) dx \\ &= \int (I - zP)^{-1} 1_J(x) g(x) dx \end{aligned}$$

と表される. したがって, 形式的にはこの母関数の特異点が Perron-Frobenius 作用素のスペクトルの逆数であることがわかる.

F が Markov のときには

$$\begin{aligned}\Phi(z)_{a,b} &= \begin{cases} z\eta_a & F(\langle a \rangle) \cap \langle b \rangle \text{ の内点} \neq \emptyset, \\ 0 & \text{その他,} \end{cases} \\ s_g(z) &= (s_g^{(a)}(z))_{a \in A},\end{aligned}$$

と定義すると,

$$s_g^J(z) = \int_J g(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \int_J g(F^n x) dx$$

とわけて, 後半を n を $n-1$, $F(x)$ を x と取り直すことで,

$$s_g(z) = \left(\int_{\langle a \rangle} g(x) dx \right)_{a \in A} + \Phi(z) s_g(z)$$

すなわち

$$s_g(z) = (I - \Phi(z))^{-1} \left(\int_{\langle a \rangle} g(x) dx \right)_{a \in A}$$

を得ることができる. このことから $s_g(z)$ の特異点, すなわち P のスペクトルの逆数は, $\det(I - \Phi(z)) = 0$ の解であることが言える.

それだけでなく, $\Phi(z)$ は本質的に構造行列であることを思い出せば, $\Phi(z)^n$ のトレースは n 周期点に対応し $\zeta(z) = \frac{1}{\det(I - \Phi(z))}$ であることを示すのは困難ではない. したがって, Markov の場合には力学的ゼータ関数は全空間で meromorphic な関数に拡張できた.

このことは先に予想した結論をラフな形ではあるものの証明したことになる. 実際には, 今構成した renewal equation は特別な区間に対応する母関数についてのみ考えているので, 限られた特異点しか得られない. そこで renewal equation を拡張することで, $|z| < e^{-\epsilon}$ をみたす z は有界変動関数に制限した Perron-Frobenius 作用素のスペクトルであることがわかる. 以上をまとめれば力学的ゼータ関数は $(\det(I - \Phi(z)))^{-1}$ に等しく, その特異点のうち $|z| < e^{\epsilon}$ をみたすものが有界変動関数に制限した Perron-Frobenius 作用素のスペクトルの逆数になることが示される.

以上の性質から $\det(I - \Phi(z))$ を Fredholm determinant とよび, $\Phi(z)$ を Fredholm Matrix とよぶことにしよう.

例 1

$$F(x) = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} x \pmod{1} \text{ なら } M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Phi(z) = \begin{pmatrix} z \frac{\sqrt{5}-1}{2} & z \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ z \frac{\sqrt{5}-1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(I - \Phi(z)) = (1 - z)\left(1 + \frac{2}{3 + \sqrt{5}}z\right)$$

Perron-Frobenius 作用素の固有値は 1 と $-\frac{2}{3+\sqrt{5}}$ を得るが, $|z| \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 以下の z はすべて固有値となる. したがって, 孤立した特異点は 1 しかない. 以上より, 力学系は混合的であることがわかり, *decay rate of correlation* は $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ に等しい.

さらに, 不変確率測度の密度関数も混合的であれば, $\Phi(z)$ の $z = 1$ の固有ベクトルから得られる. 実際, $\int_J g(F^n(x)) dx$ は $|J| \times \int g d\mu$ に収束する. ここで $|J|$ は区間 J のルベーグ測度である. このことから

$$\lim_{z \uparrow 1} (1 - z) s_g(z) = (|\langle a \rangle| \int g d\mu)_{a \in \mathcal{A}}$$

であることと

$$\lim_{z \uparrow 1} (1 - z) s_g(z) = \lim_{z \uparrow 1} (1 - z) (I - \Phi(z))^{-1} \left(\int_{\langle a \rangle} g dx \right)_{a \in \mathcal{A}}$$

であることを比較すればよい.

1.3 Signed Symbolic Dynamics

今までの議論をより一般の piecewise linear 変換について拡張しよう.

区間 J に対して, $(\sup J)^+$ と $(\inf J)^-$ を J^+ (J^-) とそれぞれ表す. とくに $\langle a \rangle^+$ と $\langle a \rangle^-$ を a^+ , a^- と表し $\tilde{\mathcal{A}} = \{a^\sigma\}_{a \in \mathcal{A}, \sigma = +, -}$ とおく. これを符号付きアルファベットとよぶ. さらに

$$\begin{aligned} x <_\sigma y &= \begin{cases} x < y & \text{if } \sigma = +, \\ x > y & \text{if } \sigma = -, \end{cases} \\ \sigma(y^\sigma, x) &= \begin{cases} +\frac{1}{2} & y^\sigma >_\sigma x, \text{ or } y^\sigma = x \text{ if } y^\sigma \in \langle a_1^y \rangle, \\ -\frac{1}{2} & \text{otherwise,} \end{cases} \\ \epsilon(\theta^n y^\sigma) &= \sigma, \quad (n \geq 0) \\ \delta[L] &= \begin{cases} 1 & L \text{ is true,} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

とおく. $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \cdots$ ($\alpha_n \in \mathcal{A}$) を $y \in [0, 1]$ の展開, $\sigma = +$ または $-$ として, $\tilde{\alpha} = y^\sigma$ について

$$s^{\tilde{\alpha}}(z, x) = \sigma(\tilde{\alpha}, x) + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \sum_{|w|=n} \eta_w \delta[w[1] = \tilde{\alpha}_1, \exists \theta w x] \sigma(\tilde{\alpha}, wx)$$

とおけば, 区間 $J \subset \langle a \rangle$ ($a \in \mathcal{A}$) について

$$s^J(z, x) = \sum_{\sigma = +, -} s^{J^\sigma}(z, x) \quad \text{a.e. } x \quad (1)$$

が成り立つ. renewal equation を定義する際に, 区間の像を追う必要があるが, Markov でないときには, 区間の像を追うことはほとんど不可能である. 一方, 区間の端点にのみ依存する $s^{J^+}(z, x)$ および $s^{J^-}(z, x)$ についてならば renewal equation の構成が可能になる. それと (1) を用いて Perron-Frobenius 作用素の固有値を求めることができる. 実際,

1. $\chi^{\tilde{\alpha}}(z, x) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \eta_{\tilde{\alpha}_1 \dots \tilde{\alpha}_n} \sigma(\theta^n \tilde{\alpha}, x),$
2. $\phi(\tilde{\alpha}, \tilde{b}) = \begin{cases} +\frac{1}{2} & \tilde{b} \leq \langle \tilde{\alpha}_2 \rangle^-, \\ -\frac{1}{2} & \tilde{b} > \langle \tilde{\alpha}_2 \rangle^-, \end{cases}$
3. $\Phi(z)_{\tilde{\alpha}, \tilde{b}} = \epsilon(\tilde{\alpha}) \sum_{n=1}^{\infty} z^n \operatorname{sgn}(\tilde{\alpha}_1 \dots \tilde{\alpha}_n) \eta_{\tilde{\alpha}_1 \dots \tilde{\alpha}_n} \phi(\theta^{n-1} \tilde{\alpha}, \tilde{b}).$

とおき

$$\begin{aligned} s_g(z) &= (s_g^{a^\sigma}(z))_{a \in \mathcal{A}, \sigma=+, -}, \\ \chi_g(z) &= (\chi_g^{a^\sigma}(z))_{a \in \mathcal{A}, \sigma=+, -}, \end{aligned}$$

と定義すれば, Markov の場合と同様の renewal equation

$$s_g(z) = (I - \Phi(z))^{-1} \chi_g(z)$$

を得て, $\det(I - \Phi(z)) = \frac{1}{\zeta(z)}$ の 0 点により, $|z| > e^{-\epsilon}$ における Perron-Frobenius 作用素のスペクトルを決定できる ([7, 8]).

2 Perturbed Perron-Frobenius operator

今までの 1 次元の変換のエルゴード性に関する Perron-Frobenius 作用素の話題を拡張しよう. そのために 2 種類の摂動

$$\begin{aligned} P_\alpha f(x) &= \sum_{y: F(y)=x} f(y) |F'(y)|^{-\alpha} \\ P_h f(x) &= \sum_{y: F(y)=x} f(y) |F'(y)|^{-1} e^{ih(x)} \quad (h \in L^\infty) \end{aligned}$$

について考える. P_α は Hausdorff 次元の研究, P_h は中心極限定理 ([16]) や large deviation の研究に用いる.

2.1 Hausdorff Dimension

例 2 *piecewise linear Markov* 変換の例 を考えよう.

Cantor 集合を図 1 のように

$$C = \{x \in I: F^n(x) \in \langle a \rangle \cup \langle c \rangle\}$$

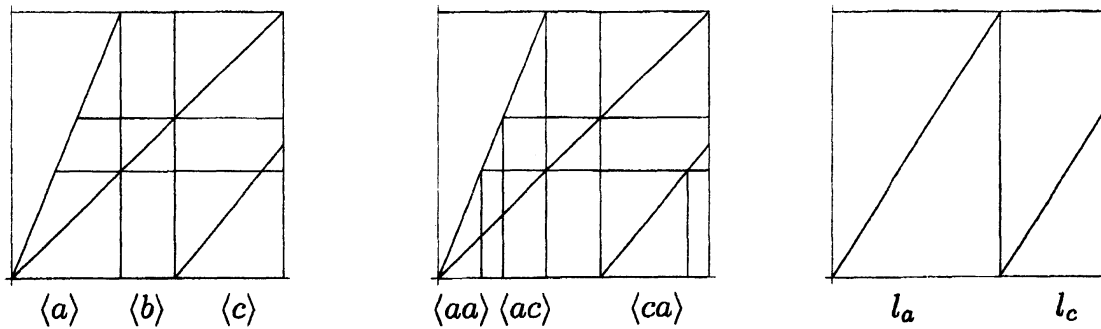


図 1: 長さ 1 と 2 のワードによる被覆, そして変換 g

と定義する. この例では一見 Markov でないように見えるが, 端点 1 の像が区間 $\langle b \rangle$ に入ることから Markov であることがわかる.

$$\Phi_\alpha(z) = \begin{pmatrix} z\eta_a^\alpha & z\eta_a^\alpha \\ z\eta_b^\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

とおけば長さ n のワードによる被覆の合計長さは

$$(1, 1)\Phi_\alpha^{n-1}(1) \begin{pmatrix} |\langle a \rangle|^\alpha \\ |\langle c \rangle|^\alpha \end{pmatrix}$$

をみtas. したがって

$$\det(I - \Phi_\alpha(1)) = 0$$

の最大根 α が Hausdorff 次元になることが予想される.

証明の概要を与えよう. α_0 を $\det(I - \Phi_\alpha(1)) = 0$ の最大根とする. $\Phi_{\alpha_0}(1)$ の固有値 1 の固有ベクトルを $\begin{pmatrix} l_a \\ l_c \end{pmatrix}$ とするとき, 図 1 のような写像 G を考えることができる. この G と $F|_C$ とは記号力学系が等しい.

測度 μ の Hausdorff 次元 $\dim_\mu$ とは C を測度が δ 以下のワードによる被覆 $\sum_w (\mu(\langle w \rangle))^\alpha$ を考えて, この $\delta \downarrow 0$ の極限の臨界点をもって, 通常の Hausdorff 次元と同様に定義したものである. この定義から次の定理を得る.

定理 1 (Billingsley の定理 ([2])) 2つの測度 μ_1, μ_2 について

$$C \subset \left\{ x \in I: \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \mu_1 \langle a_1^x \cdots a_n^x \rangle}{\log \mu_2 \langle a_1^x \cdots a_n^x \rangle} = \alpha \right\}$$

をみtasならば $\dim_{\mu_2} = \alpha \dim_{\mu_1}$ をみtas.

この定理を我々の Cantor 集合に適用しよう.

μ_1 は G の作用する単位区間の上のルベグ測度を記号力学系を経由して C に induce したものとする. 明らかに $\dim_{\mu_1} = 1$ である. 一方, μ_2 は F の作用する単位区間の上のルベグ測度とすると

$$\dim_{\mu_2} = \alpha_0 \dim_{\mu_1} = \alpha_0$$

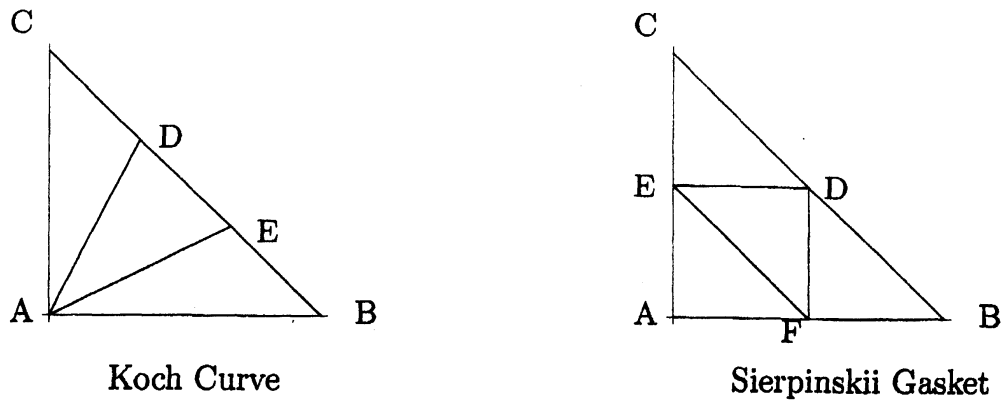


図 2: 2次元のフラクタルの例

をみたすことがわかる。

最後に測度の Hausdorff 次元 $\dim_{\mu_2}$ が C の通常の Hausdorff 次元と等しいことも多少技術的な計算をすれば導かれる ([13]).

この例をより一般の場合に拡張してみよう。Markov 型でない場合にも、符号付き記号力学系を用いれば摂動 Perron–Frobenius 作用素に対応する摂動 Fredholm Matrix $\Phi_\alpha(z)$ を構築できる。これを用いて

$$\det(I - \Phi_\alpha(1)) = 0$$

をみたす α_0 が求める Hausdorff 次元になることは、上に示した Markov 型のときと同様に $\Phi_{\alpha_0}(1)$ の固有値 1 の固有ベクトルから作られる 1 次元力学系と対比することで証明される ([11, 4])。その他, tree の次元の計算も可能である ([15])。

符号付き記号力学系とはアルファベットに対応する集合の端点により、内側と外側にわけていると解釈できる。そこで高次元の場合にもアルファベットに対応する集合の境界を 2 次元なら頂点と辺に分解し、3 次元なら頂点、辺、面に分解して内側と外側にわけること高次元の符号付き記号力学系を作ることができる ([9, 10, 12])。

図 2 のようなフラクタルを考えよう。Koch 曲線では三角形 ADE が除かれる領域、Sierpinski gasket では三角形 DEF が除かれる領域とする。写像は Koch 曲線では三角形 ACD が A を不動点として反転して ABC 内に写像、また、三角形 AEB も A を不動点として反転して ABC 内に写像する。Sierpinski gasket でも三角形 CDE は C を不動点として反転して写像、三角形 EDF も E を不動点として反転して写像、三角形 AEF だけは A を不動点としてそのまま拡大するとする。

それぞれの写像が三角形 ABC 全体に広がる時得られる Cantor 集合がもともとの Koch 曲線や Sierpinski gasket であるが、全体に広がらない場合でも符号付き記号力学系を用いれば完全な自己同型写像ではないフラクタルの次元を計算できることがわかる ([14])。

2.2 Large Deviation

$h \in L^\infty$ を与えて, F によるランダムウォーク $S_n h(x) = \sum_{k=0}^{n-1} h(F^k(x))$ を考えよう. 母関数

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n m \left\{ x \in J: A \leq \frac{1}{n} S_n h(x) \leq B \right\}$$

を定める. 大数の法則によれば $\frac{1}{n} S_n h(x)$ は $\int h d\mu$ (μ は不変確率測度) に概収束する. large deviation とは A と B の間に $\int h d\mu$ を含まないとき, $m \{x \in J: A \leq \frac{1}{n} S_n h(x) \leq B\}$ が 0 に収束するスピードである. これには上の式により, この母関数の収束半径を求めればよいことがわかる.

特性関数 $\phi_{n,h}^J(t) = \int_J e^{it S_n h} dx$. を用いると, 反転公式を用いれば,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} z^n m \left\{ x \in J: A \leq \frac{1}{n} S_n h(x) \leq B \right\} &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n |J| \mu_{n,h}^J[nA, nB] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \frac{e^{-itnA} - e^{-itnB}}{t} \phi_{n,h}^J(t) dt \end{aligned}$$

を得る. これを変形すると

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} z^n m \left\{ x \in J: A \leq \frac{1}{n} S_n h(x) \leq B \right\} \\ = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \frac{e^{-itnA} - e^{-itnB}}{t} \int P_{th}^n 1_J(x) dx dt \end{aligned}$$

と摂動 Perron-Frobenius 作用素で表現できる. さらに弱大数の法則により積分の順序交換ができて

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} z^n m \left\{ x \in J: A \leq \frac{1}{n} S_n h(x) \leq B \right\} \\ = \int dx \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \frac{dt}{t} \left((I - z P_{th_A})^{-1} 1_J - (I - z P_{th_B})^{-1} 1_J \right) (x) \end{aligned}$$

と表すことができる. ここで $h_A(x) = h(x) - A$ である.

$h(x)$ は $\langle a \rangle$ の上で定数 $h(a)$ であると仮定する.

$$s_h^J(z, x) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{|w|=n} 1_J(wx) e^{i S_n h(wx)} \eta_w$$

とおくと

$$\begin{aligned} \int s_h^J(z, x) dx &= \int \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{|w|=n} 1_J(wx) e^{i S_n h(wx)} \eta_w dx \\ &= \int \sum_{n=0}^{\infty} z^n P_h^n 1_J(x) dx = \int (I - z P_h)^{-1} 1_J(x) dx \end{aligned}$$

Markov 型ならば

$$\begin{aligned}\Phi_h(z)_{a,b} &= \begin{cases} z\eta_a e^{ih(a)} & \text{if } F(\langle a \rangle) \supset \langle b \rangle, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \\ s_h(z, x) &= (s_h^{(a)}(z, x))_{a \in \mathcal{A}} \\ \chi(x) &= (1_{\langle a \rangle}(x))_{a \in \mathcal{A}}\end{aligned}$$

とおけば、前と同様に renewal equation が構成できて

$$s_h(z, x) = (I - \Phi_h(z))^{-1} \chi(x)$$

が成り立つ。また、

$$\begin{aligned}& \sum_{n=0}^{\infty} z^n m \left\{ x: A < \frac{1}{n} S_n h(x) < B \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{a \in \mathcal{A}} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \frac{dt}{t} \int \left\{ s_{th_A}^{(a)}(z, x) - s_{th_B}^{(a)}(z, x) \right\} dx\end{aligned}$$

さらに

$$\begin{aligned}& \frac{1}{2\pi i} \sum_{a \in \mathcal{A}} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \frac{dt}{t} \int s_{th}^{(a)}(z, x) dx \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \frac{dt}{t} (1, \dots, 1) (I - \Phi_{th}(z))^{-1} (|\langle a \rangle|)_{a \in \mathcal{A}}\end{aligned}$$

と perturbed Fredholm matrix $\Phi_h(z)$ で表現できる。

もっとも簡単な Bernoulli の場合に限ろう。 F を Bernoulli, すなわち $F(\langle a \rangle)$ の閉包が $[0, 1]$ に一致するとする。この場合, perturbed Fredholm matrix は

$$\Phi_h(z)_{a,b} = z\eta_a e^{ih(a)}$$

と簡単な形で与えられ, $(1, \dots, 1)$ は固有値 1 の固有ベクトルになり, さらに

$$\det(I - \Phi_h(z)) = 1 - \sum_{a \in \mathcal{A}} z\eta_a e^{ih_a} = 1 - z \int e^{ih(x)} d\mu$$

が成り立つことから

$$\begin{aligned}& \sum_{n=0}^{\infty} z^n m \left\{ x: A < \frac{1}{n} S_n h(x) < B \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \frac{dt}{t} \left(\frac{1}{1 - z \int e^{ith_A} d\mu} - \frac{1}{1 - z \int e^{ith_B} d\mu} \right)\end{aligned}$$

を得る。ここで $\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T dt$ を複素積分で行えば, 円の上の積分は $T \rightarrow \infty$ で無視できて, 半円内の留数を計算すればよい。 $t = 0$ に特異点があるが

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{t(1 - z \int e^{ith} d\mu)} = \frac{1}{1 - z}$$

より, この項は $h = h_A$ と $h = h_B$ でキャンセルする.

$t = t_0 = t_A(z_0)$ と $z_0 \in \mathbb{R}$ で $\frac{\phi(z)}{z - z_0}$ となるような場合をみつけよう. テイラー展開により

$$\begin{aligned} \int h_A e^{ith_A} d\mu &= \int h_A e^{it_0 h_A} e^{i(t-t_0)h_A} d\mu \\ &= \int h_A e^{it_0 h_A} (1 + i(t-t_0)h_A + O(t-t_0)) d\mu, \end{aligned}$$

そこで z_0 で $t_A(z)$ で展開すると

$$\int h_A e^{ith_A} d\mu = \int h_A e^{it_0 h_A} d\mu + O(z - z_0)$$

したがって,

$$\int h_A e^{it_0 h_A} d\mu = 0$$

すなわち

$$\left. \frac{d}{dt} \int e^{ith_A} d\mu \right|_{t=t_0} = 0, \quad \text{もしくは} \quad \frac{\partial}{\partial t} \det(I - \Phi_{th}(z)) = 0$$

をみたさなければならない. $\int e^{sh_A} d\mu$ の最小値を与える s_A はただ一つである. 一方で, $z \int e^{it(z)h_A} d\mu = 1$ から $1 = z_0 \int e^{it(z_0)h_A} d\mu = z_0 \int e^{s_A h_A} d\mu$ したがって

$$z_0 = \left(\int e^{s_A h_A} d\mu \right)^{-1}$$

を得る. この結果は次の Cramer の定理の別証明になっている. 図 3 は Bernoulli 型の場合の (s, z) の曲線の例である. この極大値に対応する z が large deviation を与えることがわかる.

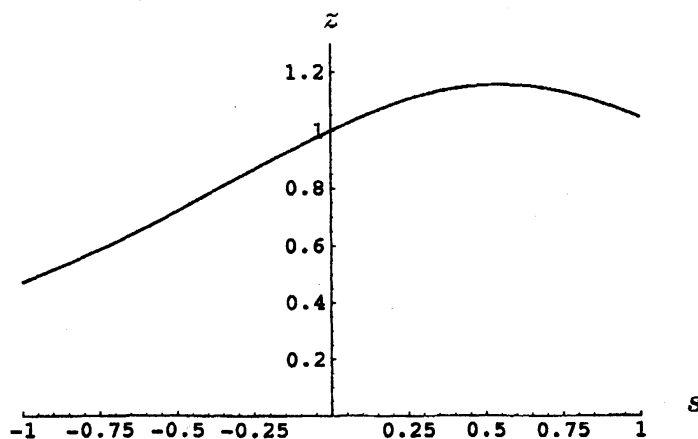


図 3: $\eta_a = \frac{1}{4}$, $\eta_b = \frac{3}{4}$, $h_A(a) = 1$, $h_A(b) = -1$

定理 2 (Cramer) $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ を独立同分布とする. 任意の $a > E(X_1)$ について

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P\{S_n \geq an\} = -\sup_{t \in \mathbb{R}} (at - \log(E[e^{tX_1}]))$$

それでは Markov の場合にも考えてみよう.

$$F(x) = \begin{cases} \eta_a^{-1}x & x \in \langle a \rangle, \\ \eta_c^{-1}(x - \eta_a) & x \in \langle b \rangle, \end{cases}$$

ここで, $F(\langle a \rangle) = \langle a \rangle \cup \langle b \rangle$, $F(\langle b \rangle) = \langle a \rangle$ とする. したがって, $\eta_a + \eta_a \eta_b = 1$ が成り立つ.

The perturbed Perron-Frobenius matrix は

$$\Phi_h(z) = \begin{pmatrix} ze^{ih(a)}\eta_a & ze^{ih(a)}\eta_a \\ ze^{ih(b)}\eta_b & 0 \end{pmatrix}$$

で与えられる. そこで

$$\det(I - \Phi_h(z)) = 1 - ze^{ih(a)}\eta_a - z^2 e^{i(h(a)+h(b))}\eta_a\eta_b$$

をみtas. この場合にも $\det(I - \Phi_{ish}(z)) = 0$ の解, $z = z(s)$ の最小の極値を探せばよい. 図 4 では 2 つの分枝があるが, 極値は $z > 0$ において 1 つ定まる. これが large deviation を与える. より複雑な Markov になれば分枝はいくつか現れるが, その極値をみればよいことがわかる. 一般の場合にも, 符

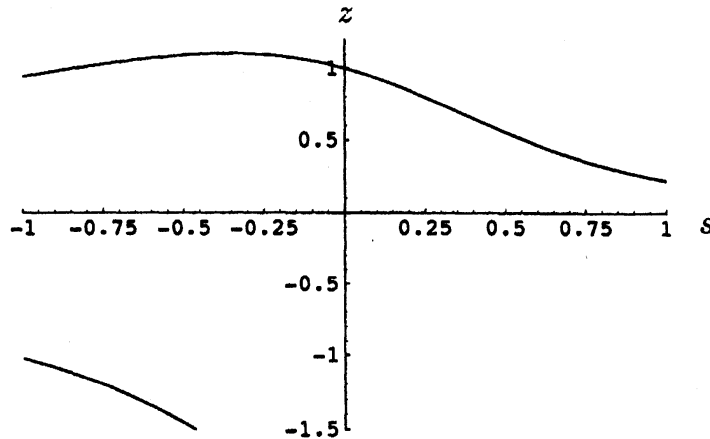


図 4: $\eta_a = \eta_b = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $h_A(a) = 2$, $h_A(b) = -3$

号付き記号力学系に表現して, $\det(I - \Phi_{ish}(z)) = 0$ の解, $z = z(s)$ の最小の極値を探せばよい.

ただし, 分枝が無限に現れることになるので, 表現は必ずしもきれいというわけではない. 摂動が 0 になる場合 (0,1) を通ることから, おそらく, この点を通る分枝の極値が large deviation を与えると思われるが, 残念ながら証明はまだできていない.

参考文献

- [1] V.Baladi and G.Keller, Zeta functions and transfer operators for piecewise monotone transformations, *Commun. Math. Phys.*, vol. 127, 459–478 (1990).
- [2] P. Billingsley, *Ergodic Theory and Information*, John Wiley & Sons (1965).
- [3] F.Hofbauer and G.Keller, Zeta functions and transfer-operators for piecewise linear transformations, *J.Reine Angew. Math.*, vol. 352, 100–113 (1984).
- [4] Y. Ichikawa, M. Mori and M. Ohno, Hausdorff Dimension of a Cantor set on R^1 , *Tokyo J. Math.*, vol.26, No.2, 371-390 (2003)
- [5] G.Keller, Ergodicité et mesures invariantes pour les transformations dilatantes par morceaux d'une région bornée du plan, *C.R. Acad. Sc. Paris*, vol. 289, 625–627 (1979).
- [6] A.Lasota and J.A.Yorke, On the existence of invariant measures for piecewise monotonic transformations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 186, 481–488 (1973).
- [7] M. Mori, Fredholm determinant for piecewise linear transformations, *Osaka J. Math.*, vol. 27, 81–116 (1990).
- [8] M. Mori, Fredholm determinant for piecewise monotonic transformations, *Osaka J.Math.*, vol. 29, 497–529 (1992).
- [9] M. Mori, Zeta function and Perron–Frobenius operator of piecewise linear transformations on R^k , *Tokyo J. Math.*, vol. 18, 401–416 (1995).
- [10] M. Mori, Fredholm determinant for piecewise linear transformations on a plane, *Tokyo J. Math.*, vol. 21, 477–510 (1998).
- [11] M. Mori, Dynamical system on Cantor set, *Tokyo J. Math.*, vol. 21, 217–231 (1998).
- [12] M. Mori, Fredholm determinant for higher dimensional piecewise linear transformations, *Japanese Journal of Mathematics*, vol. 25 No.2, 317–342(1999)
- [13] M. Mori, Cantor sets generated by piecewise linear map, *Proceedings of the Institute of Natural Sciences, Nihon University*, vol. 35, 145-171 (2000).

- [14] M. Mori, Dynamical systems on fractals in a plane, *Osaka J. Math.*, vol.38, 1-28 (2001).
- [15] M. Mori, Hausdorff dimension of tree generated by piecewise linear transformation, *Tokyo J. Math.*, vol 28, No.1, 249-258 (2005).
- [16] J. Rousseau-Egele, Un théorème de la limite locale pour une classe de transformations dilatantes et monotones par morceaux *Ann. of Prob.* vol.3, 772-788 (1983).