

正則函数 $f(x)$ の不変量 $L(f)$ と, $f^{-1}(0)$ の
特異点の性質について.

京大数理研研修員 矢野 環

§0. はじめに.

$f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, θ : 正則函数の芽 (1 層),

$$f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad \alpha = \sum_{i=1}^n \theta f_i.$$

ここで, LE -Ramanujam, 加藤(満生)等により, 次の定理が
得られている.

定理 f は α 上 integral である. 即ち, $\exists a_i(x, \xi): \alpha$ 係数
の $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ の多項式で homogeneous i -次であり,

$$f^L + a_1(x, df) f^{L-1} + a_2(x, df) f^{L-2} + \dots + a_L(x, df) = 0.$$

ここで, (又以下でも df とは α 係数 $\text{grad } f$ と思).

この定理により存在の保証される, f の α 上整係数多項式
 $L(f)$ と記す.

ところで、超曲面 $f^s(0)$ の性質は、 f^s の満たす偏微分方程式系と密接に関係している。即ち、 $\mathcal{D}$ を正則微分係数の偏微分作用素の環(層)、 $\mathcal{D}[s] = \mathcal{D} \otimes \mathbb{C}[s]$ とし、

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \mathcal{D}[s] f^s = \mathcal{D}[s] / \mathcal{J}(s), \\ \mathcal{J}(s) &= \{ p(s) \in \mathcal{D}[s] \mid p(s) f^s = 0 \}. \end{aligned}$$

が重要である。さらに、次の加群を定義する。

$$\widehat{\mathcal{N}} = \mathcal{D}[s] / (\mathcal{J}(s) + \mathcal{D}[s](\sigma + \theta f)).$$

ここで、 $L(f)$ を次の様に定義する。

$$\mathcal{J}(s) \ni Q(s) = s^l + \sum_{\lambda \geq 1} s^{l-\lambda} Q_\lambda(x, D), \quad \text{and } Q_\lambda \leq \lambda$$

である様な最小の l を $\underline{L(f)}$ と記す。 $\sigma_k(p)$ により $p \in \mathcal{D}$ の k 階の表象を表わすことにすれば、

$$\begin{aligned} Q(s) f^s &= (s^l + \sum_{\lambda \geq 1} s^{l-\lambda} Q_\lambda(x, D)) f^{s-l} + (\text{1 につき } l-1 \text{ 以下}) \\ &\quad (s)_l = s(s-1) \cdots (s-l+1) \end{aligned}$$

であることより、次の不等式が成立する。

$$l(f) \leq L(f)$$

$l(f)=1$ の場合は、 $L(f)=1$ でもあるが、一般には等号は成立しない。特異点 f についての $L(f)$ の評価等については、[Y₁] を参照せよ。 $f^s(0)$ が原点を孤立特異点とする場合は、 $l(f)=1$ であるが、実は座標変換により weighted homogeneous polynomial になることが知られており(斎藤恭司)、 $f^s(0)$ は比較的簡単な構造をもつ。よって、 $L(f) \geq 2$ の場合が興味す。

§ 1. $L(f)$ と $f^{-1}(0)$

以下 $f^{-1}(0)$ は $0 \in \mathbb{C}$ を孤立特異点にもっとする。

$(f^{-1}(0), 0)$ の不変量として, local monodromy map M はよく知られている。 $M = S + N$, S : semi-simple, N : nilpotent と

するとき, $N^n = 0$, n : 空間次元 が知られている。

$N^e = 0$ となる初めて e は $L(f)$ と密接に関係している。但し, $L(f)$ (又 $l(f)$) は, 次元 n を一定に定めておいても, $1 < j \leq n$ まで大きく変えれば異なる。

$$\textcircled{1} \quad f = x^{n_1} + y^{n_2} + t x^{m_1} y^{n_2-1} \quad t: \text{non-zero parameter.}$$

$$\frac{n_1-1}{k+1} \leq m_1 \leq \frac{n_1-2}{k}, \quad \frac{1}{m_2} < \frac{m_1}{n_1}, \quad n_2 \geq k+3$$

f は non-quasi-homogeneous であるが (n_1, n_2, m_1) の条件から, 第3項は前2項を $\text{weight}(\frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2})$ で与えたものより高次である。従って, local monodromy は $x^{n_1} + y^{n_2}$ のそれと同じである。 — ①

$$l(f) \leq \left[\frac{k}{2}\right] + 1, \quad L(f) \leq k$$

が示される。($k=1, 2, 3$ まででは, 上記の2式とも等号である。)

超曲面の不変量として, 重要なものに, b 函数がある。

これは, f が孤立特異点の場合は § 0 で定義した $\widehat{M}$

における作用 $A: \overline{P(s)} \mapsto \overline{sp(s)}$ (— は $\mathbb{Q}(s)$ の元, $\widehat{M}$ は 2.1.2 class)

が induce した $s: \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(\widehat{M}, B_{pt}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(\widehat{M}, B_{pt})$

$B_{pt} = \mathbb{Q}[f(x)]$ の最小多項式を $\widehat{b}(s)$ とするとき,

$$b(s) = (s+1) \widehat{b}(s)$$

と与えられる。 $b(s)$ は local monodromy であり、不変量である。実際、 f が $f = f_0 + g$, f_0 : weighted homogeneous isolated sing.

g は f_0 の weight に照して高次のときは、 M は不変であるが、 $b(s)$ は変化する。今、 $\text{Hom}_g(\widehat{M}, \mathbb{Q}_\mu)$ にあてられ、その固有値 $\{-\alpha_1, \dots, -\alpha_\mu\}$ (ここで $\mu = \dim \mathbb{Q}_\mu$, $\alpha_i > 0$ であることがわかる。又、 α_i は重複度も含めて記述されている。) として、

$\widehat{P}(t) = \sum_{i=1}^{\mu} t^{\alpha_i}$ としたとき、前頁の例に引いていって、
は次の形になる。 $\widehat{P}_0(t)$ を $x^{n_1} + y^{n_2}$ となし、 $\widehat{P}(t)$ を f のものとなし、
すなわち、

$$\widehat{P}_0(t) = \frac{(t^{n_1} - t)(t^{n_2} - t)}{(1 - t^{n_1})(1 - t^{n_2})}$$

$$\widehat{P}(t) = \widehat{P}_0(t) + (1-t)t^{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \sum_{k=2}^{\infty} t^{j(\frac{m_1}{n_1} - \frac{1}{n_2})} \frac{1-t^{1-\frac{m_1}{n_1}}}{1-t^{\frac{1}{n_1}}}$$

である。ここで、 $\widehat{P}(t)$ の k 項に k が示されていることに注意せよ。 ($k=1$ の時は、 $\sum$ は空和である。 $k=2, 3$ については式は証明されており、 $k \geq 4$ では予想である。)

$L(f)=2$ の場合は、 $\widehat{M}$ の完全な構造、 $b(s)$ の決定法等すべて $[Y_1], [Y_2]$ 等に表せられている。よって、 $L(f)=3$ の場合が、次の § であつかわれる。

$$\S \quad L(f) = 3.$$

我々は 2 の場合を区別する.

$$l(f) = 2, \quad L(f) = 3.$$

$$l(f) = L(f) = 3.$$

第一の場合, $\exists P(s) = s^2 + sA + B \in \mathcal{J}(s)$,

$$P(s)f^s = a(x)s f^{s-1}$$

$$a(x) \notin \mathcal{U} + \mathcal{O}f$$

となつてゐることを示す。我々はこの場合を $(2, 3; a)$ と表記する。一般の場合に $(2, 3; a)$,

$(b_i(x))$ を ideal $(\mathcal{U}^2 + \mathcal{O}f): f^2$ の basis とせよ.

$$\exists B_j(s) = b_j^{(1)} s^2 + b_j^{(2)} s + b_j^{(3)}, \quad \text{ord } b_j^{(k)} \leq k$$

$$B_j(s)f^s = b_j^{(3)}(x)s f^{s-1},$$

となる $B_j(s)$ が構成される。ここで $b_j^{(3)} \notin \mathcal{U} + \mathcal{O}f$, $j = 1, \dots, J$

$b_j^{(3)} = 0$, $j = J+1, \dots, J+J' \geq 1$ と仮定してよい。このとき,

$$b_j^{(3)} s f^{s+1} \equiv b_j^{(3)} f^s \pmod{\mathcal{J}(\mathcal{U} + \mathcal{O}f) f^s}$$

があることを示す。すなわち, $\mathcal{U} + \mathcal{O}f : b_j^{(3)} = \sum_k \mathcal{O} b_{j,k}^{(4)}$,

$$b_{j,k} = b_{j,k}^{(4)} \cdot b_j \quad (j \leq J), \quad b_{j,k} = b_j \quad (j > J) \quad \text{と置く。我々は}$$

$$B_{j,k}(s) = b_{j,k} s^2 + b_{j,k}^{(1)} s + b_{j,k}^{(2)} \in \mathcal{J}(s)$$

を構成する。これはできる。一般に $j = 1, 2, \dots, J+J'$, $k = 1, 2, \dots$

$$C_e(s) = c_e(x, D) s^2 + c_e^{(1)}(x, D) s + c_e^{(2)}(x, D),$$

$$\text{ord } C_e \geq 1, \quad \text{ord}(C_e) + 2 = \text{ord}(C_e^{(2)}) \geq \text{ord } C_e^{(1)} + 1$$

・と(1)形の $f(s)$ の元が, $f(s)$ の生成元として必要である。

$(2, 3, a)$ の場合, $b_{1,k}, b_{1,k}^{(1)}, b_{1,k}^{(2)}, B_{1,k}^e$ の代りに,

$b_k, b_k^{(1)}, b_k^{(2)}, B_k$ を記すことにしよう。

次に定理は, $L(f)=3$ の場合 $\widetilde{M}$ の完全な構造をよこす

定理. $L(f)=3$ の時, $\widetilde{M}$ は下記の表示をもつ。

1) case $(3, 3)$ i.e. $L(f)=L(f)=3$.

$$0 \leftarrow \widetilde{M} \xleftarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ s \\ s^2 \end{pmatrix}} \mathcal{D}^3 \xleftarrow{\begin{pmatrix} f_i \\ f \\ b_{ij}^{(3)} \\ \\ a'_i & a_i \\ b_{ijk}^{(2)} & b_{ijk}^{(1)} & b_{ijk} \\ c_i^{(2)} & c_i^{(1)} & c_i \end{pmatrix}} \mathcal{D}^N$$

2) case $(2, 3; a)$

$$0 \leftarrow \widetilde{M} \xleftarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ s \\ s^2 \end{pmatrix}} \mathcal{D}^3 \xleftarrow{\begin{pmatrix} f_i \\ f \\ g & h \\ a'_i & a_i \\ b_k^{(2)} & b_k^{(1)} & b_k \end{pmatrix}} \mathcal{D}^{n+2+r+g}$$

ここで, (g, h) は $(0, f)$ として, $(a, 0)$ としてよい。
 さらに,

$$(U + \theta f): a \supset U: f \supset U + \theta f + \theta a$$

が成立している。

$$a'_\nu a_\nu \text{ として, } \sum \theta a_\nu(x) = U: f \text{ であり,}$$

$$(a_\nu(x)s + a'_\nu(x, 0))f^s = 0$$

となる。このとき a である。

この構造定理より, 特に $(2, 3; a)$ の場合には, 次の定理が導かれる。

定理 $F = \dim_{\mathbb{Q}} \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(\widehat{m}, B_{pt})$ とする。 F の μ 次元の basis を, 次の様に選ぶことができる。

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_{\mu_1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ u_{\mu_1} \\ v_{\mu_1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} u_{\mu_1} \\ v_{\mu_1} \\ w_{\mu_1} \end{pmatrix} \right\}.$$

ここで $(u_1, \dots, u_{\mu_1})$ は F_1 の basis であり,

$$F_1 = \{u \in B_{pt} \mid (U + \theta f + \theta a)u = 0\}$$

$$F_2 = \{u \in B_{pt} \mid (U: f)u = 0\}$$

$$F_3 = \{u \in B_{pt} \mid ((U + \theta f): a)u = 0\}.$$

又, (u, v, w) は次の方程式が決定される。

$$\begin{cases} b_k v_i' + b_k^{(1)} u_i = 0, \\ a_k v_i + a_k' u_i = 0, \\ b_k w_i + b_k^{(1)} v_i + b_k^{(2)} u_i = 0. \end{cases}$$

定理 $\exists P(s, x, D) \in \mathcal{P}(s)$ s.t.

$$P(s, x, D) f^{s+1} = b(s) f^s,$$

$$P(s, x, D) = \sum s^k P_k(x, D) \quad (1 \leq k \leq r, \quad \max_k (\text{ord } P_k + k) = \deg b(s)).$$

上記の 1-系は, $L(f) = 2$ の場合 → 自然な拡張であるが,

$a(x)$ の重要な役割をはたすことが着目 (い。より)。より。

$L(f) = 1, 2$ の性質をもつ $P(s)$ の存在を待証 (ていふ)。

証明にあたりては, 先づ定数 $(g, h) = (0, f), (a, 0)$ がつかないけい。

$(2, 3; a)$ の美創と, その構造については $[Y_1], [Y_2]$ に譲る。

- T. Yano
- [Y₁] On the theory of b-functions: to appear in Publ. of RIMS.
- [Y₂] " 2: in prep.
- [Y₃] " 3: " "