

# 多項式の power-free な値について

岡山大 理 内 山 三 郎

## § 1. 序

$k$  は 1 より大なる任意の整数とする. 整数  $n$  が 1 の他に  $k$  乗巾の因数をもたないとき,  $n$  は  $k$ -th power-free あるいは簡単に  $k$ -free と呼ばれる.

$f = f(u)$  を  $r$  次の有理整係数の多項式とする. P. Erdős [1] は, もし  $r \geq 3$  で  $f(n)$  が 1 の他に一定の  $r-1$  乗巾の因数をもたないならば,  $f(u)$  は  $u$  の無限に多くの整数値  $n$  に対して  $(r-1)$ -free な整数を表わすことを証明した. 最近 C. Hooley [2] は,  $f(n)$  の値が  $(r-1)$ -free となるような正の整数  $n \leq x$  の個数  $N(x)$  に対する漸近式をあたえた.

$f(u)$  が既約な多項式のとときその漸近式はつぎの形をとる:

$$(1) \quad N(x) = Cx + O\left(\frac{x}{(\log x)^{B/\log \log \log x}}\right) \quad (x \rightarrow \infty).$$

ここに  $B > 0$  および  $C$  はともに多項式  $f(u)$  に依存する定数

であって、もし  $f(u)$  が  $u$  の整数値に対して 1 の他に一定の  $r-1$  乗中の因数をもたないならば  $C > 0$  である. Hooley [3] はまた 3 次の多項式  $f(u) = au^3 + b$  に対して漸近式 (1) における残余項が

$$O(x(\log x)^{-2/3})$$

に改良されることを証明している.

Erdős [1] はまた証明なしにつきのことを述べている. すなわち、 $f = f(u)$  が次数  $r \geq 2$  の有理整係数の多項式であって一次式の  $r$  乗中に等しくないならば、 $f(p)$  の値が  $r$ -free となるような無限に多くの素数  $p$  が存在する. しかしながら、これは必ずしも正しくない. 例えば  $f(u) = u^2 + 7$  とすればすべての奇素数  $p$  に対して  $f(p) \equiv 0 \pmod{2^3}$  である.

本稿では、多項式  $f$  に関する適当な条件のもとに、 $f(p)$  が  $r$ -free となるような素数  $p \leq x$  の個数  $M(x)$  に対するひとつの漸近式をあてたいと思う. その結果は少しばかり一般的な形に述べることができる.

さて、 $A = (a)$  は正の整数のある増加列とする. 任意の実数  $x \geq 1$  に対して

$$A_x = \{a \in A : a \leq x\}$$

と書き、 $A_x$  に含まれる整数の個数を  $A(x)$  で表わすことに

する.

われわれはつぎの三つの条件をみたす整数列  $A$  を考える:

(i) 定数  $B > 0$  および  $c > 0$  が存在して

$$A(x) > B \frac{x}{(\log 2x)^c};$$

(ii)  $A(x, k, l)$  によって  $a \equiv l \pmod{k}$  をみたす  $A_x$  の整数  $a$  の個数を表わすとき,  $(k, l) > 1$  であるような整数  $k, l$  に対して  $A(x, k, l)$  は一様に上に有界である;

(iii) 任意の固定された  $E > 0$  および  $H > 0$  に対して

$$A(x, k, l) = \frac{A(x)}{\varphi(k)} + O\left(\frac{A(x)}{(\log x)^H}\right)$$

が  $1 \leq k \leq (\log x)^E$ ,  $(l, k) = 1$  について一様に成立つ.

とくに,  $A$  がすべての素数からなる列であるとき, この  $A$  に対して上の三つの条件がみたされることはよく知られている.

われわれは  $f(a)$  が  $r$ -free となるような整数  $a \in A_x$  の個数を  $M(x)$  で表わし, この  $M(x)$  に対してひとつの漸近式をあたえる.

## § 2. 定理

$f = f(u)$  は次数  $r \geq 2$ , 有理整係数の原始多項式とする  
もし  $f$  の判別式  $D_f$  が 0 でないならば

$$(2) \quad M(x) = C A(x) + O\left(\frac{A(x)}{\log \log x}\right) \quad (x \rightarrow \infty)$$

が成立つ.  $C$  は

$$C = \prod_p \left(1 - \frac{g^*(p^r)}{p^{r-1}(p-1)}\right)$$

で  $p$  はすべての素数の上に亘り  $g^*(k)$  は合同式

$$f(u) \equiv 0 \pmod{k}$$

の非同余な解  $u \pmod{k}$  のうち  $(u, k) = 1$  をみたすものの  
個数を表わす.

## § 3. 定理の証明 (概要)

合同式  $f(u) \equiv 0 \pmod{k}$  の解  $\pmod{k}$  の個数を  $g(k)$  と  
すれば,  $g(k)$  は乗法的関数である. すなわち  $(k_1, k_2) = 1$   
ならば

$$g(k_1 k_2) = g(k_1) g(k_2)$$

が成立つ. また, 素数の中  $k$  に対して  $g(k) = O(1)$  であ  
り, 従って一般の正の整数  $k$  に対して

$$g(k) = O(k^\varepsilon)$$

が任意の正数  $\varepsilon$  を以て成立つこと，はよく知られている。

容易に分るように，  $g^*(k)$  もまた乗法的である。明ら  
かに，すべての  $k$  に対して  $0 \leq g^*(k) \leq \min(g(k), g(k))$   
である。

さて，  $k$  を任意の正整数とし  $f(a) \equiv 0 \pmod{k}$  をみたす  
整数  $a \in A_x$  の個数を  $Z_k(x)$  と記すことにする。

$$\xi_1 = \log \log x$$

とおき，  $f(a)$  が  $\xi_1$  を超えないどの素数の  $r$  乗中でも割れな  
いような整数  $a \in A_x$  の個数を  $P(x)$  とすれば

$$M(x) = P(x) + R(x)$$

と書くことができる。 二に，

$$P(x) = \sum_k \mu(k) Z_{k^r}(x)$$

で  $k$  は  $\xi_1$  より大なる素因数をもたない square-free (すなわち  
2-free) な正の整数の上に亘り， また

$$0 \leq -R(x) \leq \sum_{p > \xi_1} Z_{p^r}(x)$$

である。

整数列  $A$  に対する条件 (ii), (iii) から容易に

$$P(x) = CA(x) + O\left(\frac{A(x)}{\log \log x}\right)$$

であることが分る. 定数  $C$  は上の定理において記されたものである.

つぎに

$$\xi_2 = (\log x)^{c+1}, \quad \xi_3 = \frac{x}{\xi_2}$$

とおき,

$$\begin{aligned} \sum_{p > \xi_1} Z_{p^r}(x) &= \sum_{\xi_1 < p \leq \xi_2} + \sum_{\xi_2 < p \leq \xi_3} + \sum_{p > \xi_3} \\ &= R_1(x) + R_2(x) + R_3(x) \end{aligned}$$

と書く.

条件 (i), (ii), (iii) により

$$R_1(x) = O\left(\frac{A(x)}{\log \log x}\right)$$

であり, また

$$R_2(x) = O\left(\frac{A(x)}{\log x}\right)$$

であることは直ちに分る.

$R_3(x)$  の評価は Hookey [2] の論法と並行になされ,

$$R_3(x) = O\left(\frac{A(x)}{(\log x)^{B/\log \log \log x}}\right)$$

がえられる. ここに  $B > 0$  は  $f$  にのみ依存する定数である.

これらの結果をあつめれば

$$R(x) = O\left(\frac{A(x)}{\log \log x}\right)$$

となり, 漸近式 (2) がえられるのである.

われわれの定理の証明の詳細は別に発表する予定である ([4] 参照).

文

献

- [1] P. Erdős: Arithmetical properties of polynomials.  
Journ. London Math. Soc., 28(1953), 416-425.
- [2] C. Hooley: On the power free values of polynomials.  
Mathematika, 14(1967), 21-26.
- [3] ———: On the square-free values of cubic polynomials. Journ. für reine und angew. Math., 229 (1968), 147-154.
- [4] S. Uchiyama: On the power-free values of a polynomial.  
To appear.