

The Smith homology and a generalized Borsuk-Ulam Theorem

京都府立医科大学数学教室 長崎生光 (Ikumitsu Nagasaki)

Kyoto Prefectural University of Medicine

和歌山大学教育学部数学教室 川上智博 (Tomohiro Kawakami)

Faculty of Education, Wakayama University

大阪大学大学院理学研究科 原 靖浩 (Yasuhiro Hara)

Graduate school of Science, Osaka University

京都産業大学理学部数理科学科数学教室 牛瀧文宏 (Fumihito Ushitaki)

Faculty of Science, Kyoto Sangyo University

1 Introduction

Smith homology は [1] や [2] で書かれているように変換群論において様々な応用を持つ. Borsuk-Ulam の定理を証明するのに Smith homology を用いている文献は見当たらないが, [3] や [6] における証明では Smith exact sequence を用いて証明するのと同様のことをしている. この原稿では, まず, 群が自由に作用する空間について Smith homology の定義を与え, その場合に, [1] や [2] にも書かれている Smith exact sequence を紹介する. その上で, それを用いて, Borsuk-Ulam の定理を homology の観点から一般化した次の定理を証明しよう.

Theorem 1.1([5]). k を 2 以上の自然数とし, C_k を位数 k の巡回群とする. X を C_k が自由に作用する弧状連結な位相空間, Y を C_k が自由に作用する Hausdorff 空間とする. このとき, 自然数 n で, $1 \leq q \leq n$ に対して $H_q(X; \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}) = 0$, かつ $H_{n+1}(Y/C_k; \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}) = 0$ を満たすようなものが存在するならば, X から Y への C_k -map は存在しない.

この定理で $X = S^m$, $Y = S^n$ で C_k がこれらに自由に作用する場合 (k が 2 より大きいときは m, n は奇数) を考えると, $m > n$ ならば, S^m から S^n への C_k -map が存在しないというよく知られた Borsuk-Ulam の定理を得る.

2 The Smith homology

この章で, Smith homology を定義しよう. [1] や [2] では単体的複体の homology を用いているが, ここでは, singular homology を用いることにする.

以下, k を 2 以上の自然数とし, C_k を位数 k の巡回群とする. X を C_k -space とし, $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}[C_k]$ を $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ 上の C_k の群環とする.

$q \in \mathbb{Z}$ に対して, q 次鎖群 $C_q(X; \mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$ は自然な C_k 作用を持ち, それが $C_q(X; \mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$ 上の $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}[C_k]$ 作用を導く.

g を C_k の生成元とし,

$$\alpha = 1 + g + \cdots + g^{k-1}$$

$$\beta = 1 - g$$

とおく. 定義より $\alpha\beta = \beta\alpha = 0$ である. また, すべての q に対して $\alpha C_q(X; \mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$ と $\beta C_q(X; \mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$ は $C_q(X; \mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$ の $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}[C_k]$ -submodule であり, $\alpha\partial = \partial\alpha, \beta\partial = \partial\beta$, が成り立つので (∂ は $\{C_q(X; \mathbb{Z}/k\mathbb{Z})\}$ の boundary operator を表す), $\{\alpha C_q(X; \mathbb{Z}/k\mathbb{Z})\}$ および $\{\beta C_q(X; \mathbb{Z}/k\mathbb{Z})\}$ は $\{C_q(X; \mathbb{Z}/k\mathbb{Z})\}$ の subchain complex になる.

Proposition 2.1. すべての q に対して, 次の二つの系列は完全である.

$$0 \rightarrow \alpha C_q(X; \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) \xrightarrow{i} C_q(X; \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) \xrightarrow{\beta} \beta C_q(X; \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow \beta C_q(X; \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) \xrightarrow{j} C_q(X; \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) \xrightarrow{\alpha} \alpha C_q(X; \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) \rightarrow 0.$$

ここで, i, j は包含写像, α (resp. β) は α (resp. β) の積により定義される写像である.

Proof. $\beta \circ i = 0, \alpha \circ j = 0$ なので, $\text{Im } i \subset \text{Ker } \beta, \text{Im } j \subset \text{Ker } \alpha$ は成り立つ.

$s = \sum_j \sum_{i=0}^{k-1} n_{ji} g^i \sigma_j \in \text{Ker } \beta$ とする. ここで, g は C_k の生成元であり, $l \neq l', 0 \leq i \leq k-1$ ならば, $g^i \sigma_l \neq \sigma_{l'}$ を満たすように σ_i をとっておく. $\beta s = 0$ なので, 任意の j に対して, $\sum_{i=0}^{k-1} n_{ji} g^i (1 - g) \sigma_j = 0$ が成り立つ. したがって, この式の左辺を変形して, すべての j に対して, $\sum_{i=1}^{k-1} (n_{ji} - n_{j(i-1)}) g^i \sigma_i + (n_{j0} - n_{j(k-1)}) \sigma_j = 0$ を得る. 故に, $n_{j0} = n_{j1} = \cdots = n_{jk-1}$. $n_j = n_{j0} (= n_{j1} = \cdots = n_{jk-1})$ とおくと, $s = \sum_j n_j (1 + g + \cdots + g^{k-1}) \sigma_j = \alpha \sum_j n_j \sigma_j \in \text{Im } i$. したがって, $\text{Ker } \beta = \text{Im } i$ である.

次に $s = \sum_j \sum_{i=0}^{k-1} n_{ji} g^i \sigma_j \in \text{Ker } \alpha$ とする. $\alpha s = \sum_j (n_{j0} + \cdots + n_{j(k-1)}) (1 + \cdots + g^{k-1}) \sigma_j = 0$ なので, $n_{j0} + \cdots + n_{j(k-1)} = 0$ である.

したがって, $s = \sum_j (n_{j0}(1-g) + (n_{j0} + n_{j1})g(1-g) + (n_{j0} + n_{j1} + n_{j2})g^2(1-g) + \cdots + (n_{j0} + n_{j1} + \cdots + n_{j(k-2)})g^{k-2}(1-g)) \sigma_j$ と変形できて, $s \in \text{Im } j$. 故に $\text{Ker } \alpha = \text{Im } j$ である. ■

$H_q^\alpha(X, \mathbf{Z}/k\mathbf{Z})$, $H_q^\beta(X, \mathbf{Z}/k\mathbf{Z})$ をそれぞれ chain complex $\{\alpha C_q(X; \mathbf{Z}/k\mathbf{Z})\}$, $\{\beta C_q(X; \mathbf{Z}/k\mathbf{Z})\}$ から定義される homology 群とする. この homology 群を Smith homology 群 と呼ぶ.

上の proposition から次の定理を得る.

Theorem 2.2. 次の二つの系列は完全である.

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H_q^\alpha(X; \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}) &\xrightarrow{i_*} H_q(X; \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}) \xrightarrow{\beta_*} H_q^\beta(X; \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}) \\ &\xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}^\alpha(X; \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}) \xrightarrow{i_*} H_{q-1}(X; \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}) \xrightarrow{\beta_*} H_{q-1}^\beta(X; \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H_q^\beta(X; \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}) &\xrightarrow{j_*} H_q(X; \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}) \xrightarrow{\alpha_*} H_q^\alpha(X; \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}) \\ &\xrightarrow{\partial'_*} H_{q-1}^\beta(X; \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}) \xrightarrow{j_*} H_{q-1}(X; \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}) \xrightarrow{\alpha_*} H_{q-1}^\alpha(X; \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

$k = 2$ のとき $\alpha = \beta$ であり, 次の完全系列を得る.

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H_q^\alpha(X; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) &\xrightarrow{i_*} H_q(X; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \xrightarrow{\alpha_*} H_q^\alpha(X; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \\ &\xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}^\alpha(X; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \xrightarrow{i_*} H_{q-1}(X; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \xrightarrow{\alpha_*} H_{q-1}^\alpha(X; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

次の proposition より, 上の定理で $k = 2$ の場合は Thom-Gysin 完全系列 (cf. [4]) と同じものであることがわかる.

Proposition 2.3. Y を C_k が free に作用している Hausdorff 空間とする. このとき, 任意の $q \in \mathbf{Z}$ に対して, $H_q^\alpha(Y, \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}) \cong H_q(Y/C_k, \mathbf{Z}/k\mathbf{Z})$ である.

Proof. 最初に, $\alpha : C(Y; \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}) \rightarrow \alpha C(Y; \mathbf{Z}/k\mathbf{Z})$ と orbit map $\pi : Y \rightarrow Y/C_k$ から誘導される準同型 $\pi_\# : C(Y; \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}) \rightarrow C(Y/C_k; \mathbf{Z}/k\mathbf{Z})$ が同じ kernel を持つことを示そう.

$\alpha(\sum n_i g^i \sigma) = (\sum n_i) \alpha(\sigma)$ より, $\alpha(\sum n_i g^i \sigma) = 0$ であるための必要十分条件は $\sum n_i = 0$ である. 一方, $\pi_{\#}(\sum n_i g^i \sigma) = (\sum n_i) \pi \circ \sigma$ なので, $\pi_{\#}(\sum n_i g^i \sigma) = 0$ であるための必要十分条件は $\sum n_i = 0$ である. したがって, α と $\pi_{\#}$ は同じ kernel を持つ.

$\tau : \Delta^s \rightarrow Y/C_k$ の lift $\tilde{\tau} : \Delta^s \rightarrow Y$ が存在するので $\pi_{\#}$ は全射である. また, $\alpha : C(Y; \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}) \rightarrow \alpha C(Y; \mathbf{Z}/k\mathbf{Z})$ も明らかに全射である.

故に $\alpha C(Y; \mathbf{Z}/k\mathbf{Z})$ は $C(Y/C_p; \mathbf{Z}/k\mathbf{Z})$ と chain complex として同型である. したがって, $H_q^\alpha(Y, \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}) \cong H_q(Y/C_k, \mathbf{Z}/k\mathbf{Z})$ である. ■

3 Proof of Theorem 1.1

以下で, Introduction で紹介した Theorem 1.1 の証明をする.

Theorem 1.1 の状況のもとで C_k -map $f : X \rightarrow Y$ が存在すると仮定する. X は弧状連結であり, $f(X)$ も弧状連結である. したがって, $f(X)$ は Y のある弧状連結成分に含まれる. $f(X)$ に C_k が free に作用していることから $f(X)$ を含む Y の弧状連結成分にも C_k が free に作用していて, この弧状連結成分について議論をすればよいので, 簡単のため, Y は初めから弧状連結と仮定しておく.

初めに $k = 2$ の場合を証明しよう. f は C_2 -map なので, $\alpha f_{\#} = f_{\#} \alpha$ である.

以下, 記述を簡単にするために, homology の係数の $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ を省略して書くことにする. 次の可換図式を考える. Theorem 2.2 より, この可換図式で水平方向は完全系列になっている.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 \rightarrow & H_{n+1}^\alpha(X) & \xrightarrow{\partial_*^X} & H_n^\alpha(X) & \xrightarrow{i_*^X} & H_n(X) & \xrightarrow{\alpha_*^X} & H_n^\alpha(X) & \xrightarrow{\partial_*^X} & H_{n-1}^\alpha(X) & \rightarrow \dots \\
 & f_*^\alpha \downarrow & & f_*^\alpha \downarrow & & f_* \downarrow & & f_*^\alpha \downarrow & & f_*^\alpha \downarrow & \\
 \rightarrow & H_{n+1}^\alpha(Y) & \xrightarrow{\partial_*^Y} & H_n^\alpha(Y) & \xrightarrow{i_*^Y} & H_n(Y) & \xrightarrow{\alpha_*^Y} & H_n^\beta(Y) & \xrightarrow{\partial_*^Y} & H_{n-1}^\alpha(Y) & \rightarrow \dots
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 \rightarrow & H_1^\alpha(X) & \xrightarrow{i_*^X} & H_1(X) & \xrightarrow{\alpha_*^X} & H_1^\alpha(X) & \xrightarrow{\partial_*^X} & H_0^\alpha(X) & \xrightarrow{i_*^X} & H_0(X) & \xrightarrow{\alpha_*^X} & H_0^\alpha(X) & \rightarrow & 0 \\
 & f_*^\alpha \downarrow & & f_* \downarrow & & f_*^\alpha \downarrow & & f_*^\alpha \downarrow & & f_* \downarrow & & f_*^\alpha \downarrow & & f_* \downarrow \\
 \rightarrow & H_1^\alpha(Y) & \xrightarrow{i_*^Y} & H_1(Y) & \xrightarrow{\alpha_*^Y} & H_1^\alpha(Y) & \xrightarrow{\partial_*^Y} & H_0^\alpha(Y) & \xrightarrow{i_*^Y} & H_0(Y) & \xrightarrow{\alpha_*^Y} & H_0^\alpha(Y) & \rightarrow & 0
 \end{array}$$

定義より, $(i_*^X)_0 = 0$ and $(i_*^Y)_0 = 0$ であり, $(\alpha_*^X)_0 : H_0(X) \rightarrow H_0^\alpha(X)$ と $(\alpha_*^Y)_0 : H_0(Y) \rightarrow H_0^\alpha(Y)$ は同型である. 仮定より, $H_0(X) \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ であり, $H_0(X) \cong H_0^\alpha(X) \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ となる. 同様にして, $H_0(Y) \cong H_0^\alpha(Y) \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ である. $(f_*)_0 :$

$H_0(X) \rightarrow H_0(Y)$ は同型であり, $(\alpha_*^Y)_0 \circ (f_*)_0 = (f_*^\alpha)_0 \circ (\alpha_*^X)_0$ なので, $(f_*^\alpha)_0 : H_0^\alpha(X) \rightarrow H_0^\alpha(Y)$ も同型写像である.

$(i_*^X)_0 = 0$ より, $\text{Im } (\partial_*^X)_1 = \text{Ker } (i_*^X)_0 = H_0^\alpha(X)$. したがって, $(\partial_*^Y)_1 \circ (f_*^\alpha)_1 = (f_*^\alpha)_0 \circ (\partial_*^X)_1 : H_1^\alpha(X) \rightarrow H_0^\alpha(Y)$ は非自明な準同型 (つまり, その像が 0 でない) であることがわかる. 故に, $(f_*^\alpha)_1 : H_1^\alpha(X) \rightarrow H_1^\alpha(Y)$ も非自明な準同型である.

X に関する homology 群の仮定より, $1 \leq q \leq n$ に対して, $(\partial_*^X)_q : H_q^\alpha(X) \rightarrow H_{q-1}^\alpha(X)$ は同型となり, このことを用いると, 帰納的に $0 \leq q \leq n$ に対して $(f_*^\alpha)_q : H_q^\alpha(X) \rightarrow H_q^\alpha(Y)$ が非自明であることが示される.

Proposition 2.3 より $H_{n+1}^\alpha(Y) \cong H_{n+1}(Y/C_p)$ であることと, $H_{n+1}(Y/C_p) = 0$ の仮定より, $H_{n+1}^\alpha(Y) = 0$ である. したがって, $(i_*^Y)_n : H_n^\alpha(Y) \rightarrow H_n(Y)$ は単射であり, $(f_*^\alpha)_n : H_n^\alpha(X) \rightarrow H_n^\alpha(Y)$ が非自明な準同型であることと $(i_*^Y)_n : H_n^\alpha(Y) \rightarrow H_n(Y)$ が単射であることから, $(i_*^Y)_n \circ (f_*^\alpha)_n : H_n^\alpha(X) \rightarrow H_n(Y)$ は非自明な準同型である.

一方, $H_n(X) = 0$ なので, $(i_*^Y)_n \circ (f_*^\alpha)_n = (f_*)_n \circ (i_*^X)_n = 0$. これは矛盾であり, $k = 2$ の場合に X から Y への C_k -map が存在しないことが証明された.

次に $k > 2$ の場合を証明しよう. 以下, 記述を簡単にするために, homology の係数の $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ を省略して書くことにする. 次の可換図式を考えよう. Theorem 2.2 より, 水平方向は完全系列になっている.

$$\begin{array}{ccccccc}
\rightarrow & H_n^\alpha(X) & \xrightarrow{i_*^X} & H_n(X) & \xrightarrow{\beta_*^X} & H_n^\beta(X) & \xrightarrow{\partial_*^X} & H_{n-1}^\alpha(X) & \rightarrow & \dots \\
& f_*^\alpha \downarrow & & f_* \downarrow & & f_*^\beta \downarrow & & f_*^\alpha \downarrow & & \\
\rightarrow & H_n^\alpha(Y) & \xrightarrow{i_*^Y} & H_n(Y) & \xrightarrow{\beta_*^Y} & H_n^\beta(Y) & \xrightarrow{\partial_*^Y} & H_{n-1}^\alpha(Y) & \rightarrow & \dots
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
\rightarrow & H_1^\alpha(X) & \xrightarrow{i_*^X} & H_1(X) & \xrightarrow{\beta_*^X} & H_1^\beta(X) & \xrightarrow{\partial_*^X} & H_0^\alpha(X) & \xrightarrow{i_*^X} & H_0(X) & \xrightarrow{\beta_*^X} & H_0^\beta(X) & \rightarrow & 0 \\
& f_*^\alpha \downarrow & & f_* \downarrow & & f_*^\beta \downarrow & & f_*^\alpha \downarrow & & f_* \downarrow & & f_*^\beta \downarrow & & f_* \downarrow \\
\rightarrow & H_1^\alpha(Y) & \xrightarrow{i_*^Y} & H_1(Y) & \xrightarrow{\beta_*^Y} & H_1^\beta(Y) & \xrightarrow{\partial_*^Y} & H_0^\alpha(Y) & \xrightarrow{i_*^Y} & H_0(Y) & \xrightarrow{\beta_*^Y} & H_0^\beta(Y) & \rightarrow & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
\rightarrow & H_{n+1}^\alpha(X) & \xrightarrow{\partial_*^X} & H_n^\beta(X) & \xrightarrow{j_*^X} & H_n(X) & \xrightarrow{\alpha_*^X} & H_n^\alpha(X) & \xrightarrow{\partial_*^X} & H_{n-1}^\beta(X) & \rightarrow & \dots \\
& f_*^\alpha \downarrow & & f_*^\beta \downarrow & & f_* \downarrow & & f_*^\alpha \downarrow & & f_*^\beta \downarrow & & \\
\rightarrow & H_{n+1}^\alpha(Y) & \xrightarrow{\partial_*^Y} & H_n^\beta(Y) & \xrightarrow{j_*^Y} & H_n(Y) & \xrightarrow{\alpha_*^Y} & H_n^\alpha(Y) & \xrightarrow{\partial_*^Y} & H_{n-1}^\beta(Y) & \rightarrow & \dots
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
\rightarrow & H_1^\beta(X) & \xrightarrow{j_*^X} & H_1(X) & \xrightarrow{\alpha_*^X} & H_1^\alpha(X) & \xrightarrow{\partial_*^X} & H_0^\beta(X) & \xrightarrow{j_*^X} & H_0(X) & \xrightarrow{\alpha_*^X} & H_0^\alpha(X) & \rightarrow & 0 \\
& f_*^\beta \downarrow & & f_* \downarrow & & f_*^\alpha \downarrow & & f_*^\beta \downarrow & & f_* \downarrow & & f_*^\alpha \downarrow & & f_* \downarrow \\
\rightarrow & H_1^\beta(Y) & \xrightarrow{j_*^Y} & H_1(Y) & \xrightarrow{\alpha_*^Y} & H_1^\alpha(Y) & \xrightarrow{\partial_*^Y} & H_0^\beta(Y) & \xrightarrow{j_*^Y} & H_0(Y) & \xrightarrow{\alpha_*^Y} & H_0^\alpha(Y) & \rightarrow & 0
\end{array}$$

容易に $(i_*^X)_0 = 0$ と $(i_*^Y)_0 = 0$ がわかる. したがって, $(\beta_*^X)_0 : H_0(X) \rightarrow H_0^\beta(X)$ と $(\beta_*^Y)_0 : H_0(Y) \rightarrow H_0^\beta(Y)$ は同型である. $(f_*)_0 : H_0(X) \rightarrow H_0(Y)$ は同型なので, $(f_*^\beta)_0 : H_0^\beta(X) \rightarrow H_0^\beta(Y)$ も同型である.

同様にして, 2 番目の可換図式で $(f_*^\alpha)_0 : H_0^\alpha(X) \rightarrow H_0^\alpha(Y)$ が同型であることが示される.

$H_1(X) = 0$ と $(i_*^X)_0 = 0$ より, $(\partial_*^X)_1 : H_1^\beta(X) \rightarrow H_0^\alpha(X)$ は同型である. 同様にして, $(\partial_*^X)_1 : H_1^\alpha(X) \rightarrow H_0^\beta(X)$ も同型である.

$(\partial_*^Y)_1 \circ (f_*^\beta)_1 = (f_*^\alpha)_0 \circ (\partial_*^X)_1$ および $(\partial_*^Y)_1 \circ (f_*^\alpha)_1 = (f_*^\beta)_0 \circ (\partial_*^X)_1$ から, $(f_*^\alpha)_1 : H_1^\alpha(X) \rightarrow H_1^\alpha(Y)$ と $(f_*^\beta)_1 : H_1^\beta(X) \rightarrow H_1^\beta(Y)$ は非自明な準同型であることがわかる.

X に関する homology 群の仮定より, $1 \leq q \leq n$ に対して, $(\partial_*^X)_q : H_q^\beta(X) \rightarrow H_{q-1}^\alpha(X)$ および $(\partial_*^X)_q : H_q^\alpha(X) \rightarrow H_{q-1}^\beta(X)$ は同型となり, 帰納的に $(f_*^\alpha)_q : H_q^\alpha(X) \rightarrow H_q^\alpha(Y)$ と $(f_*^\beta)_q : H_q^\beta(X) \rightarrow H_q^\beta(Y)$ が $0 \leq q \leq n$ で非自明な準同型であることが示される. Proposition 2.3 より, $H_{n+1}^\alpha(Y) \cong H_{n+1}(Y/C_p)$ であり, $H_{n+1}(Y/C_p) = 0$ なので, $\text{Ker}(j_*^Y)_n = \text{Im}(\partial_*^Y)_{n+1} = 0$. したがって, $(j_*^Y)_n : H_n^\beta(Y) \rightarrow H_n(Y)$ は単射である. 故に $(j_*^Y)_n \circ (f_*^\beta)_n$ は非自明な準同型である.

一方, $(j_*^Y)_n \circ (f_*^\beta)_n = (f_*)_n \circ (j_*^X)_n$ で $H_n(X) = 0$ なので, $(j_*^Y)_n \circ (f_*^\beta)_n = 0$ となる. これは矛盾である. 以上で定理が証明された. ■

参考文献

- [1] G. Bredon, *Introduction to compact transformation groups*, Academic Press, (1972).
- [2] K. Kawakubo, *The theory of transformation groups*, Oxford Univ. Press, (1991).
- [3] T. Kobayashi, *The Borsuk-Ulam theorem for a $\mathbb{Z}_q$ -map from a $\mathbb{Z}_q$ -space to S^{2n+1}* , Proc. Amer. Math. Soc. 97 (1986), 714–716.
- [4] M. Masuda, 講座 数学の考え方 〈15〉 代数的トポロジー, 朝倉書店 (2002).
- [5] I. Nagasaki, T. Kawakami, Y. Hara and F. Ushitaki, *The Smith homology and Borsuk-Ulam type theorems*, preprint.
- [6] J.W. Walker, *A homology version of the Borsuk-Ulam theorem*, Amer. Math. Monthly 90 (1983), 466–468.