

Hermite 形式に対する Siegel 級数について

近畿大理工 長岡昇勇 (Shōyū Nagaoka)

F を totally real な algebraic number field ($\mathbb{Q}$ 上有限次) とし, K を F の totally imaginary quadratic extension とする. ρ を K の F 上 non-trivial automorphism とし, $\alpha \in M_m(K)$ に対して $\alpha^* = {}^t \alpha^\rho$ とおく. $\mathfrak{f}$ を F の non-archimedean primes の集合を表し, ∞ を F の archimedean primes の集合を表すことにする. $v \in \mathfrak{f} \cup \infty$ に対して F の v -completion を F_v とし, さらに $K_v = K \otimes_F F_v$ とおく. 同じく $v \in \mathfrak{f} \cup \infty$ に対して

$$G_v = \{ \alpha \in SL_{2m}(K_v) \mid \alpha^* \eta \alpha = \eta \}, \quad \eta = \begin{pmatrix} 0 & -1_m \\ 1_m & 0 \end{pmatrix}$$

と定義する. G_v の元 x を $x = \begin{pmatrix} a_x & b_x \\ c_x & d_x \end{pmatrix}$, $a_x, b_x, \dots \in M_m(K_v)$ と表すことにする.

$$S = \{\alpha \in M_m(K) \mid \alpha^* = \alpha\}, \quad S_v = S \otimes_F F_v$$

と置く. χ_v 関数 χ_v を χ_v の様に定義する. また $\theta(s) = e^{2\pi i s}$ for $s \in \mathbb{C}$ と略記するに出来る. 有理素数 p を固定し. additive group $\mathbb{Q}_p$ 上の character θ_p を

$$\theta_p(t) = \theta(-t \text{ a fractional part}) \quad \text{for } t \in \mathbb{Q}_p$$

と定義する. さらに. $v \in \mathbb{f} \cup \infty$ に対して additive group F_v 上の character θ_v を

$$\theta_v(t) = \begin{cases} \theta_p(\text{Tr}_{F_v/\mathbb{Q}_p}(t)) & \text{for } t \in F_v \text{ if } v|p \\ \theta(t) & \text{for } t \in F_v = \mathbb{R} \text{ if } v \in \infty \end{cases}$$

と定義する. そして $x_v, y_v \in S_v$ に対して

$$\chi_v(x_v y_v) = \theta_v(t_v(x_v y_v))$$

によって χ_v を定義するに出来る.

$\mathfrak{h}$ を K の maximal order とし. $v \in \mathbb{f}$ に対して $\mathfrak{h}_v$ は $\mathfrak{h}$ の K_v 内の v -closure を表すに出来る. 次に S 内の lattice L を

$$L = S \cap M_m(\mathfrak{h})$$

で定義し, さらに $v \in \mathbb{F}$ に対して S_v 内の lattice L_v を

$$L_v = S_v \cap M_m(\mathbb{H}_v)$$

で定義しておく. そのときの dual lattice を L', L'_v で表わす.

$$L' = \{ y \in S \mid t(yL) \subset d^{-1} \}, \quad L'_v = \{ y \in S_v \mid t(yL_v) \subset d_v^{-1} \}$$

ここで, d は F の $\mathbb{Q}$ 上の different d_v は F_v の $\mathbb{Q}_p$ 上の different を表わす.

次に表題の Siegel 級数を定義していく. 以下 $v \in \mathbb{F}$ とする. ($v \in \infty$ の場合は, 超幾何関数に対応する.)
まず, S_v 上の function $\nu(x)$ を次のように定義する.

$$G_v \supset P_v = \{ \alpha \in G_v \mid \alpha = 0 \}$$

$$C_v = G \cap GL_{2m}(\mathbb{H}_v)$$

とおく.

そして, $x \in S_v$ に対して, $\tau(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G_v$ とおき,

$$\tau(x)^* = yw, \quad y \in P_v, \quad w \in C_v$$

と分解する

このとき.

$$\nu(x) = |\det(dw)^{-1}|_v, \quad ||_v \text{ は } F_v \text{ の normalized valuation.}$$

と定義すると, この値は, 分解の仕方によらず一意に決まる.

π_v を F_v の素元とし, $g_v = |\pi_v|_v^{-1}$ とおく. 任意の

$h \in L'$ に対して, t を不定元とつ formal power series $\alpha(v, h, t)$ が存在して

$$\alpha(v, h, g_v^{-s}) = \sum_{y \in S_v/L_v} \chi_v(-hy) \nu(y)^{-s}$$

とわかる. この級数を Siegel 級数と呼ぶ. 前述の様.

$v \in \infty$ の時に対応するものは, 一般化された超幾何

関数であり, non-holomorphic Eisenstein series の

Fourier 係数は, 本質的に上記のものに記述される.

例. $m=1$ のとき, $0 \neq h \in \mathbb{Q}_p$ に対して

$$\begin{aligned} \alpha(p, h, p^{-s}) &= \sum_{y = \frac{a}{p^n} \in \mathbb{Q}_p \bmod \mathbb{Z}_p} p^{-ns} \mathbb{Q}_p(-hy) \\ &= (1-p^{-s})(1+p^{1s}+p^{2(1-s)}+\dots+p^{r(1-s)}) \end{aligned}$$

$$r \in \mathbb{N} \quad p^r \parallel h.$$

問題として,

『Siegel 級数 $\alpha(v, h, t)$ の形を具体的に求めよ.』
 の考えられる. 一般に $\alpha(v, h, t) \in \mathbb{Q}(t)$ ばかりで
 いる. さらに

予想 (Shimura [S2])

$v \in \mathfrak{f}$ は K 上 不分支. r は h の rank.

F の prime P に対して $\theta = \theta(P) = \left(\frac{K/F}{P} \right)$ とおくと

$$\alpha(v, h, t) \text{ の分母 } = \prod_{i=0}^{m-r-1} (1 - \theta^{m+i-1} g_v^{m+i} t)$$

とわかる.

この予想は. P. Feit によって解かれている. (P. Feit:
 Poles and residues of Eisenstein series for symplectic
 and unitary groups. A.M.S. Memoirs 346)
 quadratic form の場合にも同様の予想があるか.

これは. Kitaoka によって解かれている. [Ki]

この目標は.

$m=2$, K は類数 1 の虚 2 次体,

与る条件のもと $\alpha(v, h, t)$ の形を. 具体的に決定
 するところにある.

いくつかの記号を準備する.

d_K を K の判別式 と すると.

$$L' = \{ h^* = h = (h_{ij}) \in M_2(K) \mid h_{ii} \in \mathbb{Z}, \sqrt{d_K} h_{ij} \in \mathfrak{h} \}$$

(2×2 の semi-integral hermitian matrices
の集合)

と かける.

$v = p$: 有理素数 を 固定 する.

まず, $0 \neq h \in L'$ に対して

$$d_1 = \max \{ m \in \mathbb{Z} \mid m^{-1} h \in L' \} \quad p^\alpha \parallel d_1$$

によって, integers d_1, α を 定義 する.

さらに, $\det(h) \neq 0$ なる $h \in L'$ に対して

$$d = \det(\sqrt{d_K} h) \quad , \quad d = p^a d_0 \quad (p, d_0) = 1$$

によって, integers d, d_0, a を 定義 する.

定理 1. $0 \neq h \in L'$ に対し, χ_K を K の Kronecker 記号 と
する.

(1) $\det h \neq 0$ の とき.

$$\alpha(p, h, t) = (1-t)(1-\chi_K(p)pt)\beta_p(t)$$

$\mathbb{E} \mathbb{E} \mathbb{L}$

$$\beta_p(t) = \begin{cases} \sum_{\ell=0}^{\alpha} p^{3\ell} t^{\ell} \sum_{m=0}^{\alpha-2\ell} \chi_k(p)^m p^{2m} t^m & \text{if } \chi_k(p) \neq 0 \\ \sum_{\ell=0}^{\alpha} p^{3\ell} t^{\ell} \left(1 + \chi_k(p) \left(1 - \chi_k^2\left(\frac{d}{p^{2\ell}}\right)\right) p^{2(\alpha-2\ell)} t^{\alpha-2\ell}\right) & \text{if } \chi_k(p) = 0. \end{cases}$$

(2) $\det h = 0$ のとき.

$$\alpha(p, h, t) = (1-t)(1-\chi_k(p)pt)(1-\chi_k(p)p^2t)\beta_p(t)$$

$\mathbb{E} \mathbb{E} \mathbb{L}$. $\beta_p(t) = \sum_{\ell=0}^{\alpha} p^{3\ell} t^{\ell}$

注意 $h=0$: 2次の零行列のとき.

$$\alpha(p, 0, t) = \frac{(1-t)(1-\chi_k(p)pt)}{(1-\chi_k(p)p^2t)(1-p^3t)}$$

を得る. しかし, これは, すでに [S2] で一般的式として
得られている.

次に, Siegel 級数 $\alpha(p, h, p^{-s})$ に対して

$$\alpha(s, h) = \prod_{p: \text{prime}} \alpha(p, h, p^{-s})$$

となくと, 前述の様に, non-holomorphic な Eisenstein

級数の Fourier 係数は $\alpha(s, h)$ と超幾何関数で表示できる。

系. $0 \neq h \in L'$ に対して, $\alpha(s, h)$ は $\operatorname{Re} s > 4$ で holomorphic かつ,

$$\alpha(s, h) = \begin{cases} \zeta(s)^{-1} L(s-1, \chi_k)^{-1} f(s, h) & \text{if } \det h \neq 0 \\ \zeta(s)^{-1} L(s-1, \chi_k)^{-1} L(s-2, \chi_k) f(s, h) & \text{if } \det h = 0 \end{cases}$$

と定まる。

$$f(s, h) = \begin{cases} \prod_{p|d} \beta_p(p^{-s}) & \text{if } \det h \neq 0 \\ \prod_{p|d_1} \beta_p(p^{-s}) & \text{if } \det h = 0 \end{cases}$$

さらに, $f(s, h)$ は, ① 全体に解析接続される。

$$f(s, h) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(d) |d|^{2-s} f(4-s, h) & \text{if } \det h \neq 0 \\ d_1^{3-s} f(6-s, h) & \text{if } \det h = 0 \end{cases}$$

この関数等式を満たす。

以上に述べた結果の応用を考える. H_n を n 次 n Hermite
上半空間とし, H_n の Z に対して

$$I(Z) = (2i)^{-1} (Z - {}^t \bar{Z})$$

とおく

$Z \in \mathbb{H}_n$

$$\phi^{(2)}(Z, s) = \det(I(Z))^{\frac{s}{2}} \sum_{\{C, D\}} |\det(CZ + D)|^{-s}$$

$$(Z, s) \in \mathbb{H}_n \times \mathbb{C}$$

なる Dirichlet 級数を考える. $Z \in \mathbb{H}_n$, [S1] で研究された
一般化された超幾何関数に関する結果と定理 1, 系の結果を
組合せれば, 次の結果を得る.

定理 2 $\rho(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma(\frac{s}{2}) \zeta(s)$, $\rho_{\chi_k}(s) = 2^s \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma(\frac{s+1}{2}) L(s, \chi_k)$

とおく. ($\zeta(s)$ は Riemann zeta 関数, $L(s, \chi)$ は character χ
に関する Dirichlet L -function, $\Gamma(s)$ は通常 γ gamma
function). $Z \in \mathbb{H}_n$

$$\xi(s) = \rho(s) \rho_{\chi}(s-1) \phi^{(2)}(Z, s)$$

と定義すると, $\xi(s)$ は全 $\mathbb{C}$ 平面に meromorphic function
として解析接続する

$$\zeta(4-s) = \zeta(s)$$

なる関数等式を満たす.

文献

- [S1] G. Shimura: Confluent hypergeometric functions on tube domains, Math. Ann. 260 (1982).
- [S2] G. Shimura: On Eisenstein series. Duke Math. 550 (1983).
- [Ka]. G. Kaufhold.: Dirichletsche Reihe mit Funktionalgleichung in der Theorie der Modulfunktion 2. Grades, Math. Ann. 137 (1959).
- [Ki]. Y. Kitaoka: Dirichlet series in the theory of Siegel modular forms, Nagoya Math. J 95 (1984).