

超流動ヘリウム薄膜におけるソリトン

物性研 栗原 進

超流動⁴Heの薄膜における微小な膜厚変化は、第3音波として知られる線型波動であり、超流動研究の重要な手段の一つである。膜厚振動の主要な復元力は、van der Waals力であるが、この力は膜厚の関数として本質的な非線型性をもち、いる。従って、膜厚変化の振中で大きくしてゆく時、第3音波に顕著な非線型性があらわれると期待される。特に、分散効果とうまくつりあえば、ソリトンの存在する可能性がある。この点を調べるために行、た幾つかの計算を、まとめて報告する。

(I) 非線型性が弱い場合の流体力学的な取り扱い⁽¹⁾

この場合は、浅水波の場合と同様の *reductive perturbation* の方法により、膜厚 $\eta(x,t)$ が KdV 方程式 $\eta_t - 6\eta\eta_x + \eta_{xxx} = 0$ を満たす事がわかる。但し、長さ及び時間は適当にスケールしてある。この方程式の初期値問題 $\eta(x,0) \rightarrow \eta(x,t)$ の解は逆散乱法によりすでに得られており、特に $t \rightarrow \infty$ の漸近形は、Schrödinger 方程式 $[-d^2/dx^2 + \eta(x,0)]\psi_n(x) = (-E_n)\psi_n(x)$ の束縛状態の固有値 E_n を用いて $\eta(x,t) = -\sum_n 2E_n \operatorname{sech}^2(x - 4E_nt)$ と書ける。実験で励起しうる波の波長が、膜厚に比べて4倍程度以上も大きいので、 $\{E_n\}$ は準連続スペクトルとなる。この事がヘリウム薄膜の特殊性であり、浅水波と異なる所である。時空の粗視化を行うと、 $\eta(x,t) = -(1/2t)(x/4t)^{1/2} N(x/4t)$ が得られる。但し $N(E)$ は準連続スペクトル $\{E_n\}$ の状態密度である。粗視化された η は、多数のソリトンの *envelope* であり、実験で直接観測可能な量である。粗視化にもかかわらず、この解は KdV 方程式がもつ保存則とスケール不変性を正確に満たしている。この *envelope* 関数を測定する試みが河野等⁽²⁾ によってなされており、理論の予測に近い結果も出ているがまだ確かな事はわからない。

(II) 非線型性が任意に強い場合^{(3),(4)}

この場合、流体力学的な取り扱いは適当でないのて、Rutledge 等⁽⁵⁾ に従い超流体の波動関数 ψ に戻って考える。適当な単位系を用いると、 ψ の運動方程式は

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \left[1 - \left(\frac{1+d}{1+d|\psi|^2} \right)^3 \right] \psi$$

となる。[] の中の第2項が van der Waals 力をあらわす。d は He 固相の厚さで測った平均膜厚である。膜厚の変化分 η は $\eta = |\psi|^2 - 1$ で与えられる。 η の初期形を Gauss 型に選ぶ、時間発展を数値的に求めた結果を図1に示す。振中が膜厚と *comparable* な程大きくなると、衝突の際個性を保ち、非常に安定なソリトンが存在する事がわかる。

1つのソリトンに話を限れば、解析的な解も得られる。速度 v で走るソリトンは、 $\xi = x - vt$, $g_0 = \sqrt{4-v^2}$, $g = (g_0/2)(|\psi|^2 + 1)$, $v_s = (2/v)(d\theta/d\xi)$ とおくと

$$\xi = \frac{1}{g_0} \log(g + \sqrt{g^2 - 1}) + \frac{1}{\sqrt{g_0^2 - 1}} \log \left(\frac{g\sqrt{g_0^2 - 1} - g_0\sqrt{g^2 - 1}}{\sqrt{g_0^2 - 1} + \sqrt{g^2 - 1}} \right), \quad v_s = 1 - \frac{1}{|\psi|^2}$$

で表わせる(但し、煩雑さを避けるため、 $d=1$ とおいた)。図2(a)に、 $|\psi|^2 (=a^2)$ 及び超流動速度 v_s に見られるソリトンを示す。 ψ のソリトンは、振中・位相が作る2つのソリトンの複合体である事がわかる。振中を13.3変えた時の $|\psi|^2$ の形は図2(b)のようになる。

上の解析解は、 $|v| \ll 1$ (i.e. $||\psi|^2 - 1| \ll 1$) の場合には KdV ソリトンに帰着するべきであるが、実際、線型第3音波と共に動く座標系への変換と適当な時空のスケール変換を行、た後

$$\eta = v_s = -2\varepsilon \operatorname{sech}^2 \sqrt{\varepsilon} (x - 4\varepsilon t), \quad v = \sqrt{3} \left(1 - \frac{\varepsilon}{3}\right)$$

が得られ, (I) 場合への帰着が確認される。ここで, ε は非線型性の小さい ε 特徴づける small parameter であり, $\sqrt{3}$ は $d=1$ 場合の線型第3音波の速度である。

以上から, 膜厚変化が必ずしも小さくない場合でも安定なソリトンが存在する事, そして, このソリトンが KdV ソリトンの拡張になっている事が結論される。もちろん, 衝突における安定性に関しては, 解析的に証明できていないので, 最も厳密な意味でのソリトンであるか否かは不明である。

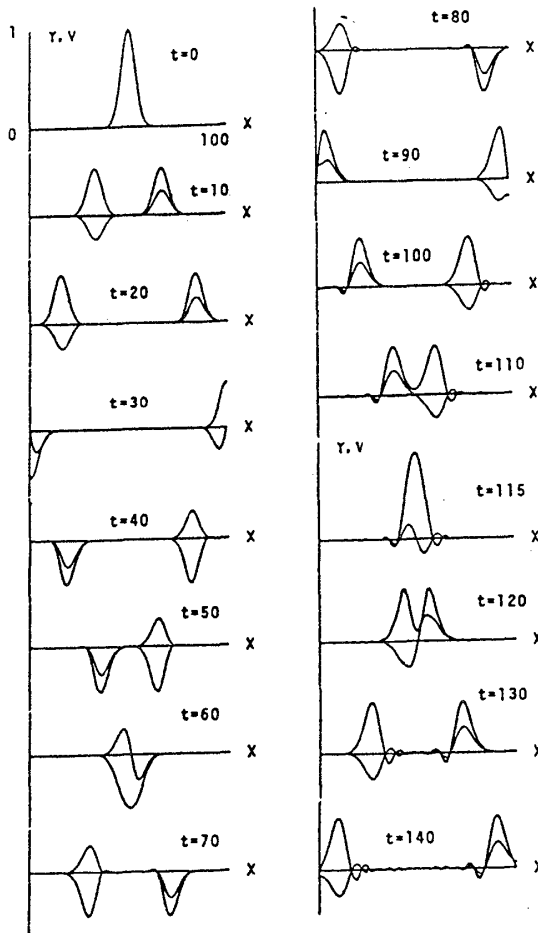


図 1

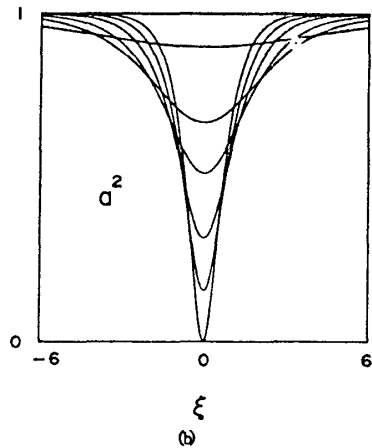
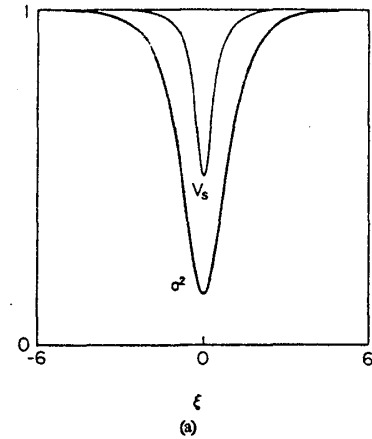


図 2.

文献

- (1) Nakajima, Kurihara & Tohdoh : J. Low Temp. Phys. 39 (1980) 465.
- (2) Kono, Kobayashi, & Sasaki : J. Phys. Soc. Jpn. 50 (1981) 721.
- (3) Kurihara : J. Phys. Soc. Jpn. 50 (1981) 3262.
- (4) Kurihara : J. Phys. Soc. Jpn. 50 (1981) 3801.
- (5) Rutledge, McMillan, Mochel & Washburn : Phys. Rev. B 18 (1978) 2155.