

Toward the classification of holomorphic framed vertex operator algebras of central charge 24

島倉 裕樹 (Hiroki Shimakura)

愛知教育大学
Aichi University of Education
e-mail: shima@aecc.aichi-edu.ac.jp

本稿では中央研究院 (台湾) の C.H. Lam 氏と筆者の共同研究 [LS] の解説を行う.

1 問題背景

1.1 研究目標

最終的な目標は次の解決である.

問題 1.1. 中心電荷 24 の正則頂点作用素代数を分類せよ.

正則頂点作用素代数 (VOA) ¹とは, 既約加群が自分自身と同型となるような頂点作用素代数である. 特にモンスター単純群を自己同型群に持つムーンシャイン VOA は正則である.

正則 VOA の分類は VOA の研究当初からの基本的な問題である. 関連する結果を述べる. [Zh96] より, 正則 VOA の中心電荷は 8 の正の倍数である. さらに, 中心電荷 8 及び 16 の正則 VOA は格子 VOA と同型になることが [DM04b] で示されている. したがって, 次の中心電荷である 24 の場合が最も興味深い.² 特に, 対応する格子理論における問題は階数 24 のユニモジュラ偶格子の分類であり, これは Neimeier によって解決されている.³

しかしながら, 問題 1.1 は非常に難しい. そのことは, 有名な未解決問題であるムーンシャイン VOA の一意性の予想が問題 1.1 に含まれることからわかる.

予想 1.2. [FLM88] 次数 1 の空間が自明な中心電荷 24 の正則 VOA はムーンシャイン VOA に同型である.

この予想は長さ 24 の拡張ゴレイ二元符号の一意性や階数 24 のリーチ格子の一意性の VOA 版と理解できる.

¹本稿では有理的, C_2 -有限, CFT 型も仮定している. VOA の定義は [Bo86, FLM88] を参照せよ.

²階数が高いユニモジュラ偶格子は分類が難しいくらいに多数存在する. したがって, 中心電荷 32 以上の場合は多数の非同型な正則格子 VOA が存在する.

³丁度 24 個の階数 24 のユニモジュラ偶格子が存在し, 各格子はルート格子によって特徴付けられる.

1.2 既知の結果

良く知られている正則 VOA として, ユニモジュラ偶格子 L に付随する正則格子 VOA V_L がある ([FLM88, Do93]). また, それら正則格子 VOA 格子の -1 -自己同型に付随する $\mathbb{Z}_2$ -軌道体構成法によっても正則 VOA $\tilde{V}_L$ が構成されることが知られている⁴ ([FLM88, DGM96])⁵.

定理 1.3. [FLM88, Do93, DGM96]

- 24 個の中心電荷 24 の正則格子 VOA が存在する.
- 15 個の (格子 VOA と非同型な) 正則格子 VOA から $\mathbb{Z}_2$ -軌道体構成法によって得られる正則 VOA が存在する.

これらの合計 39 個の正則 VOA だけが長い間 (数学的に) 知られていた.⁶ 一方で, Schellekens [Sc93] によって正則 VOA の次数 1 の空間に現れるリー環の候補のリストが与えられている⁷. そこで, このリストを参考にして, 次を解決したい.

- 残りの $32 (= 71 - 39)$ 個のリー環をもつ中心電荷 24 の正則頂点作用素代数の構成.
- 各リー環に対して, そのリー環を持つ正則 VOA の分類 (又は一意性の証明).

1.3 得られた結果のまとめ

筆者は Lam 氏と共同で “枠付” の仮定の下で中心電荷 24 の正則 VOA の構成及び分類に取り組んだ. そして得られた結果は次の通りである.

結果 1.4. [La, LS] 中心電荷 24 の枠付正則 VOA のリー環は 56 個のうちのいずれかと同型である. 特に (少なくとも) 17 個⁸ の新しい正則 VOA を得ることが出来た.⁹

新しい 17 個のリー環のリストを表 1 に載せておく. ただし, $X_{r,l}$ は X_r 型の単純リー環でレベル l を意味する. 特に, 本稿で主として解説をする [LS] の方法を用いて 14 個を構成することが出来る.

⁴格子理論との対応で言えば, $\tilde{V}_L$ は V_L の隣接 (Neighbor) と理解できる.

⁵文献についてのコメントを下さった Tuite 氏に感謝します.

⁶Montague や Schellekens による構成を主張する物理の論文はあるが, 筆者は数学的に証明されてはいないと考えている.

⁷筆者は [Sc93] の議論を理解できなかった. この論文のいくつかの結果は [DM04b] によって数学的に正当化されている.

⁸17 個のうち 10 個は [La] で, 7 個は [LS] で得られている.

⁹階数 24 のユニモジュラ偶格子 L に付随する V_L と $\tilde{V}_L$ は枠付である ([HK00, DMZ94]).

表 1: 中心電荷 24 の枠付き正則 VOA のリー環

[Sc93] の番号	次元	リー代数	本稿の番号	参考文献
7	48	$A_{1,2}A_{3,4}^3$	定理 4.6	[La, LS]
10	48	$A_{1,2}D_{5,8}$		[La]
13	60	$D_{4,4}(A_{2,2})^4$	定理 4.6	[LS]
18	72	$A_{1,1}^3A_{7,4}$		[La]
19	72	$A_{1,1}^2C_{3,2}D_{5,4}$	定理 4.7	[La, LS]
22	84	$C_{4,2}(A_{4,2})^2$	定理 4.6	[LS]
26	96	$A_{2,1}^2A_{5,2}^2C_{2,1}$	定理 4.6	[La, LS]
33	120	$A_{3,1}A_{7,2}C_{3,1}^2$	定理 4.6	[La, LS]
35	120	$A_{3,1}C_{7,2}$		[La]
36	132	$A_{8,2}F_{4,2}$	定理 4.7	[LS]
40	144	$A_{4,1}A_{9,2}B_{3,1}$	定理 4.7	[La, LS]
44	168	$E_{6,2}C_{5,1}A_{5,1}$	定理 4.6	[LS]
48	192	$B_{4,1}C_{6,1}^2$	定理 4.6	[La, LS]
52	240	$C_{8,1}(F_{4,1})^2$	定理 4.6	[LS]
53	240	$E_{7,2}B_{5,1}F_{4,1}$	定理 4.6	[LS]
56	288	$B_{6,1}C_{10,1}$	定理 4.7	[La, LS]
62	384	$E_{8,2}B_{8,1}$	定理 4.6	[LS]

2 枠付き頂点作用素代数と構造符号

本節では枠付き VOA の定義と性質について述べる. 詳細は [DGH98] を参照せよ.

$L(1/2, 0)$ を中心電荷 $1/2$ の単純ヴィラソロ VOA とする. $L(1/2, 0)$ は有理的であり, 既約加群は同型を除いて $L(1/2, 0)$, $L(1/2, 1/2)$, $L(1/2, 1/16)$ の三つである.

定義 2.1. [DGH98] V を単純 VOA とする. V が **枠付 (framed)** であるとは **枠**と呼ばれる $L(1/2, 0)^{\otimes r}$ と同型な full 部分 VOA ¹⁰が存在することである.

定理 2.2. [DGH98] 枠付き VOA は有理的, C_2 -有限, CFT 型である.

V を枠付き VOA として, T_r をヴィラソロ枠とする. T_r は有理的なので, V は T_r -加群として完全可約である. また, 任意の既約 T_r -加群は既約 $L(1/2, 0)$ -加群の r 個のテンソル積と同型になる. よって T_r -加群として

$$V \cong \bigoplus_{h_i \in \{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{16}\}} m_{h_1, \dots, h_r} \bigotimes_{i=1}^r L(1/2, h_i)$$

¹⁰部分 VOA が **full** とはヴィラソロ元が一致することをいう.

と分解される. ただし $m_{h_1, \dots, h_r}$ は重複度であり, 有限である ([DMZ94]).

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{Z}_2^r$ に対して, V^α で $h_i = 1/16$ となるのが $\alpha_i = 1$ に限られる V の T_r -部分加群 $m_{h_1, \dots, h_r} \bigotimes_{i=1}^r L(1/2, h_i)$ の和を表すとする. 特に V^0 は部分 VOA となり, V^α は V^0 -加群となる.

命題 2.3. [DGH98] $D := \{\alpha \in \mathbb{Z}_2^r \mid V^\alpha \neq 0\}$ は長さ r の $\mathbb{Z}_2$ 上の線形符号となる.

さらに, V^0 の T_r -加群としての分解を考えて,

$$V^0 \cong \bigoplus_{h_i \in \{0, \frac{1}{2}\}} m_{h_1, \dots, h_r} \bigotimes_{i=1}^r L(1/2, h_i).$$

を得る. そして, 重複度 $m_{h_1, \dots, h_r}$ は 1 または 0 であることが知られている ([DMZ94]). このとき $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_r) \in \mathbb{Z}_2^r$ に対して M^β を V^0 の T_r -部分加群 $m_{h_1, \dots, h_r} \bigotimes_{i=1}^r L(1/2, h_i)$ で $h_i = 1/2$ となるのが $\beta_i = 1$ に限られる加群を表すことにする.

命題 2.4. [DGH98] $C := \{\beta \in \mathbb{Z}_2^r \mid M^\beta \neq 0\}$ は長さ r の $\mathbb{Z}_2$ 上の線形符号となる.

定義 2.5. 符号の組 (C, D) を T_r に関する V の構造符号 (structure codes) という.

注意 2.6. 構造符号はヴィラソロ枠の取り方に依存する.

枠付正則 VOA の構造符号について次の結果がある.

定理 2.7. [LY08] (cf. [DGH98, Mi04]) 構造符号 (C, D) を持つ枠付正則 VOA が存在するための必要十分条件は (1) $C = D^\perp$, (2) 符号の長さが 16 の倍数, (3) $(1, 1, \dots, 1) \in D$, (4) D は三重偶符号¹¹である.

この定理から, 中心電荷 24 の枠付正則 VOA の構造符号の分類は長さ 48 の三重偶符号の分類とほぼ同値である. したがって, (1^{48}) を含む三重偶符号 D を分類し, 各 D に対して $(D^\perp, D)$ を構造符号に持つような枠付正則 VOA の分類を行えば, 目標の達成となる.

3 長さ 48 の三重偶符号の分類

最近, 弘前大学の別宮氏と東北大学の宗政氏によって長さ 48 の三重偶符号が分類された ([BM]). 特に次の定理が成り立つ.

定理 3.1. [BM] 長さ 48 の三重偶符号は次のいずれかの符号の部分符号と同値.

(I) $\mathcal{D}(E) = \mathbb{F}_2 \langle d(e), ((10)^{24}) \mid e \in E \rangle$. (E は長さ 24 の重偶符号¹²)

(II) 9 次元の極大三重偶符号 $\mathcal{D}^{ex}$.

(III) Reed-Muller 符号 $\text{RM}(1, 4)$ の三つの直和.

(IV) $\text{RM}(1, 4) \oplus \mathcal{D}(d_{16}^+)$. (d_{16}^+ は分解不可能な長さ 16 の自己双対重偶符号.)

¹¹ 任意の $d = (d_i) \in D$ に対して, $\text{wt}(d) = |\{i \mid d_i \neq 0\}| \in 8\mathbb{Z}$.

¹² $d : \mathbb{F}_2^{24} \rightarrow \mathbb{F}_2^{48}$, $(e_i) \mapsto (e_1, e_1, e_2, e_2, \dots, e_{24}, e_{24})$ であり, $\mathcal{D}(E)$ は (extended) doubling と呼ばれる.

4 中心電荷 24 の枠付正則 VOA の分類

2章の最後の方針と3章の結果を合わせると、各 (I)–(IV) の部分符号に付随する枠付正則 VOA を分類すればよいことになる。[La] では (I), (II) の場合を、[LS] では (III), (IV) の場合をそれぞれ研究している。本稿では特に (III) の場合を解説する。

4.1 (I) と (II) の場合

命題 4.1. [La] D を (I) の部分符号と同値な二元符号とし、 U を構造符号 $(D^\perp, D)$ を持つ枠付正則 VOA とする。このとき $U \cong V_L$ または $U \cong \tilde{V}_L$ 。

定理 4.2. [La] D を (II) の部分符号と同値な二元符号とし、 U を構造符号 $(D^\perp, D)$ を持つ枠付正則 VOA とする。このとき、次のうちのいずれか一つが成立する。

- (1) $U \cong V_L$ または $U \cong \tilde{V}_L$ 。
- (2) リー環 U_1 は 10 個の半単純リー環のいずれかと同型。¹³

4.2 (III) の場合

D を (III) の部分符号と同値な二元符号とし、 U を構造符号 $(D^\perp, D)$ を持つ枠付正則 VOA とする。すると $D^\perp$ は $(\text{RM}(1, 4)^{\oplus 3})^\perp = \text{RM}(2, 4)^{\oplus 3}$ を含む。ゆえに U は $\text{RM}(2, 4)^{\oplus 3}$ に付随する符号 VOA を含む。すなわち $(V_{\sqrt{2}E_8}^+)^{\otimes 3}$ を含む。 $V_{\sqrt{2}E_8}^+$ の良い性質¹⁴から、 U は $(V_{\sqrt{2}E_8}^+)^{\otimes 3}$ の単純カレント拡大となる。したがって、 $(V_{\sqrt{2}E_8}^+)^{\otimes 3}$ の単純カレント拡大として得られる正則 VOA を分類すればよい。以後 $V = V_{\sqrt{2}E_8}^+$ と置く。

V の既約加群の同型類全体の集合を $R(V)$ と書く。 $R(V)$ 上に分岐則を用いて積構造を入れると、 $R(V)$ は位数 2^{10} の基本可換 2-群となる (cf. [AD04, ADL05])。そこで、 $R(V)$ を 10-次元の $\mathbb{F}_2$ 上の線形空間とみる。このとき $q_V : R(V) \rightarrow \mathbb{F}_2$ を既約加群が整数次数のときに 0、半整数次数のときに 1 と定める。すると、 q_V は $R(V)$ 上の非退化な二次形式となる ([Sh04])。さらに $\text{Aut}(V)$ は $R(V)$ 上に q_V を保つ直交群として忠実に作用し、 $\text{Aut}(V) \cong O^+(10, 2)$ となる。

$(R(V^{\otimes 3}), q_{V^{\otimes 3}})$ と $(R(V), q_V)$ の 3 つのコピーの直交直和である $(R(V)^3, q_V^3)$ を同一視して、次を得る

命題 4.3. [Sh] (cf. [Hu96, Mi04, LY08]) S を $R(V)^3$ の部分集合とする。 $V^{\otimes 3}$ -加群 $\mathfrak{M}(S) = \oplus_{[M] \in S} M$ が ($V^{\otimes 3}$ の単純カレント拡大¹⁵としての) 正則 VOA 構造を持つための必要十分条件は S が極大全特異的部分空間である。

¹³10 個の半単純リー環の型やレベル等の詳細は表 1 を参照せよ。

¹⁴特に、全ての既約加群が単純カレントかつ自己双対であること。

¹⁵位数 2^{15} の基本可換 2-群で次数付けされる拡大である。

ここで, 共役を用いた VOA の同型を思い出す ([SY03]).

補題 4.4. $U = \oplus_{[M] \in \mathcal{S}} M$ を $V^{\otimes 3}$ の単純カレント拡大とし, $g \in \text{Aut}(V^{\otimes 3})$ とする. このとき, $g \circ U = \oplus_{[M] \in \mathcal{S}} g \circ M$ は U と同型な VOA 構造を持つ.

この補題と単純カレント拡大における VOA 構造の一意性 ([DM04a]) から, $(R(V)^3, q_V^3)$ の極大全特異的部分空間の $\text{Aut}(V^{\otimes 3})(\cong \text{Aut}(V) \wr \mathfrak{S}_3$ ([LSY07, Sh])) による軌道を求めればよい. その際には次の補題を用いて計算量を減らすことが出来る.

補題 4.5. $\mathcal{S}$ を $(R(V)^3, q_V^3)$ の極大全特異的部分空間とする. ある非零特異元 $a, b, c \in R$ に対して, $(a, b, 0), (0, b, c) \in \mathcal{S}$ ならば $\mathfrak{U}(\mathcal{S}) \cong V_L$ または $\mathfrak{U}(\mathcal{S}) \cong \tilde{V}_L$.

実際に, この補題の仮定を満たさない $(R(V)^3, q_V^3)$ の極大全特異的部分空間の軌道が丁度 15 個あることを示し, それぞれの場合に $\mathfrak{U}(\mathcal{S})_1$ のリー代数構造の決めた. 特に (III) の場合が次のように解決される.

定理 4.6. [LS] D を (III) の部分符号と同値な二元符号, U を構造符号 $(D^\perp, D)$ を持つ枠付正則 VOA とする. このとき, 次のうちのいずれか一つが成立する.

- (1) $U \cong V_L$ または $U \cong \tilde{V}_L$.
- (2) リー環 U_1 は表 1 における 10(= 6 + 4) 個の半単純リー環のいずれかと同型である.¹⁶

4.3 (IV) の場合

(III) と同様な論法によって, $V_{\sqrt{2}D_{16}}^+ \otimes V_{\sqrt{2}E_8}^+$ の単純カレント拡大として得られる正則 VOA を分類すればよいことになる. $V_{\sqrt{2}D_{16}}^+$ に対応する二次形式を持つ空間を用いると, (III) と同様な議論で分類可能である. さらに, 多くの場合を (III) に帰着させている.

定理 4.7. [LS] D を (IV) の部分符号と同値な二元符号とし, U を構造符号 $(D^\perp, D)$ を持つ枠付正則 VOA とする. このとき, 次のいずれか一つが成立する.

- (1) $U \cong V_L$, $U \cong \tilde{V}_L$, または U は $(V_{\sqrt{2}E_8}^+)^{\otimes 3}$ の単純カレント拡大.
- (2) リー環 U_1 は表 1 における 4(= 1 + 3) 個の半単純リー環のいずれかと同型である.¹⁷

¹⁶4 個は既に [La] にあり, 6 個が新しい.

¹⁷3 個は既に [La] にあり, 1 個が新しい.

5 今後の課題

中心電荷 24 の枠付正則 VOA の分類問題に関して、リー環レベルの分類は完了した。しかし、リー環が同型でも異なる VOA 構造を持つ可能性が残っている。¹⁸

問題 5.1. 中心電荷 24 の枠付正則 VOA の構造はリー代数から一意的に決まるか？

また, [Sc93] のリストによれば, 残り $15 (= 71 - 56)$ 個のリー環を持つ VOA の存在が期待できる。最近, 筑波大学の宮本氏によって, 枠付正則 VOA としては得られないリー環を持つ中心電荷 24 の正則 VOA が $\mathbb{Z}_3$ -軌道体構成法を用いて 1 個構成された ([Mi])。他の正則 VOA も同様に $\mathbb{Z}_3$ -軌道体構成法を用いて構成される可能性が十分にある。

また, 71 はモンスターの位数を割り切る最大の素数であるので, (偶然の一致かもしれないが) この分類問題はモンスターとの関連を期待させる。

参考文献

- [AD04] T. Abe and C. Dong, Classification of irreducible modules for the vertex operator algebra V_L^+ : general case. *J. Algebra* **273** (2004), 657–685
- [ADL05] T. Abe, C. Dong, and H. Li, Fusion rules for the vertex operator algebra $M(1)$ and V_L^+ , *Comm. Math. Phys.* **253** (2005), 171–219.
- [BM] K. Betsumiya and A. Munemasa, On triply even binary codes, preprint, arXiv:1012.4134.
- [Bo86] R.E. Borcherds, Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the Monster, *Proc. Nat'l. Acad. Sci. U.S.A.* **83** (1986), 3068–3071.
- [DGM96] L. Dolan, P. Goddard and P. Montague, Conformal field theories, representations and lattice constructions, *Comm. Math. Phys.* **179** (1996), 61–120.
- [Do93] C. Dong, Vertex algebras associated with even lattices, *J. Algebra* **161** (1993), 245–265.
- [DGH98] C. Dong, R.L. Griess, and G. Höhn, Framed vertex operator algebras, codes and Moonshine module, *Comm. Math. Phys.* **193** (1998), 407–448.
- [DM04a] C. Dong and G. Mason, Rational vertex operator algebras and the effective central charge, *Int. Math. Res. Not.* (2004), 2989–3008.
- [DM04b] C. Dong and G. Mason, Holomorphic vertex operator algebras of small central charge, *Pacific J. Math.* **213** (2004), 253–266.
- [FLM88] I. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman, Vertex operator algebras and the Monster, Pure and Appl. Math., Vol.134, Academic Press, Boston, 1988.

¹⁸例えば, 異なる全特異部分空間の軌道から得られる VOA のリー環が同型の場合がある。現在, 筆者が Lam 氏と共同で研究中である。

- [DMZ94] C. Dong, G. Mason and Y. Zhu, Discrete series of the Virasoro algebra and the moonshine module, *Proc. Sympos. Pure Math.* **56** (1994), 295–316.
- [HK00] M. Harada and M. Kitazume, Z_4 -code constructions for the Niemeier lattices and their embeddings in the Leech lattice, *European J. Combin.* **21** (2000) 473–485.
- [Hu96] Y. Huang, A nonmeromorphic extension of the moonshine module vertex operator algebra, *Contemp. Math.* (1996), 123–148.
- [La] C. Lam, On the constructions of holomorphic vertex operator algebras of central charge 24, to appear in *Comm. Math. Phys.*
- [LSY07] C. Lam, S. Sakuma and H. Yamauchi, Ising vectors and automorphism groups of commutant subalgebras related to root systems, *Math. Z.* **255** (2007), 597–626.
- [LS] C.H. Lam and H. Shimakura, Quadratic spaces and holomorphic framed vertex operator algebras of central charge 24, preprint, arXiv:1010.5303.
- [LY08] C. Lam and H. Yamauchi, On the structure of framed vertex operator algebras and their pointwise frame stabilizers, *Comm. Math. Phys.* **277** (2008), 237–285.
- [Mi04] M. Miyamoto, A new construction of the Moonshine vertex operator algebra over the real number field, *Ann. of Math.* **159** (2004), 535–596.
- [Mi] M. Miyamoto, A Z_3 -orbifold theory of lattice vertex operator algebra and Z_3 -orbifold constructions, preprint, arXiv:1003.0237.
- [SY03] S. Sakuma and H. Yamauchi, Vertex operator algebra with two Miyamoto involutions generating S_3 , *J. Algebra* **267** (2003), 272–297.
- [Sc93] A.N. Schellekens, Meromorphic $c = 24$ conformal field theories, *Comm. Math. Phys.* **153** (1993), 159–185.
- [Sh04] H. Shimakura, The automorphism group of the vertex operator algebra V_L^+ for an even lattice L without roots, *J. Algebra* **280** (2004), 29–57.
- [Sh] H. Shimakura, An E_8 -approach to the moonshine vertex operator algebra, to appear in *J. London Math. Soc.*, arXiv:1009.4752.
- [Zh96] Y. Zhu, Modular invariance of characters of vertex operator algebras, *J. Amer. Math. Soc.* **9** (1996), 237–302.