

リーマン面のモジュライ空間上のある実数値関数について
ON A REAL-VALUED FUNCTION
ON THE MODULI OF RIEMANN SURFACES

河澄 響矢 (東大数理)

NARIYA KAWAZUMI

(UNIV. OF TOKYO, DEPT. OF MATH. SCI.)

写像類群の研究において Johnson 準同型は重要な役割を演じている。たとえば森田 [M] が示したように第一拡大 Johnson 準同型によってすべての森田マンフォード類が得られる。Johnson 準同型を手がかりとして種数 g コンパクト・リーマン面のモジュライ空間 M_g の微分幾何的な研究を行いたい。 $\mathcal{L}$ をモジュライ空間 M_g 上の Hodge 直線束とする。Hain と Reed [HR] は第一 Johnson 準同型の Hodge 理論における対応物を用いてモジュライ空間 M_g 上に $\mathcal{L}^{\otimes(8g+4)}$ と同型な直線束 $\mathcal{B}$ とその上の Hermite 計量を構成し、この計量を $\mathcal{L}$ 上の standard な計量と比較することでモジュライ空間 M_g 上の実数値関数 $\beta_g : M_g \rightarrow \mathbb{R}$ を構成している。

種数 $g \geq 1$ のコンパクト・リーマン面の普遍族 $\pi : C_g \rightarrow M_g$ について、相対接束 T_{C_g/M_g} から 0 切断を取り除いたものを $M_{g,1}$ とする。以前の論文 [K1] において空間 $M_{g,1}$ 上のあるベクトル束の平坦接続であって、その holonomy が (すべての次数の) Johnson 準同型 (を集めたもの) となるものを定義した。この接続形式 (η と書く) の一番目 (η_1 と書く) は、以前から知られており、(点つき) 調和体積の第一変分 [H] に他ならない。 η から森田 Mumford 類を表す微分形式をつくることができる。とくに森田 [M] のやり方を用いて、相対接束の Chern 類を表す微分形式 $e^J \in A^2(C_g)$ および第一森田 Mumford 類を表す微分形式 $e_1^J \in A^2(M_g)$ を一通りのやり方で作ることができる。ここで A^q は q -形式全体の空間をあらわす。(なお、高次の森田 Mumford 類では微分形式を作るやり方は一通りではなく、Stasheff 結合多面体や実安定 (点つき) 有理曲線の moduli 空間が関わってくる。)

本稿ではまず微分形式 e^J に着目する。これを普遍族 $\pi : C_g \rightarrow M_g$ の各ファイバー、すなわち種数 g の任意のコンパクト・リーマン面 C の上で見ると

$$e^J|_C = (2 - 2g)B \in A^2(C)$$

となる。ここで B は C 上の正則 1-形式の正規直交基底 $\{\psi_i\}_{i=1}^g$, $\frac{\sqrt{-1}}{2} \int_C \psi_i \wedge \overline{\psi_j} = \delta_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq g$, について $B = \frac{\sqrt{-1}}{2g} \sum_{i=1}^g \psi_i \wedge \overline{\psi_i}$ によって与えられ、正規直交基底のとり方によらない C の面積要素である。このことは e^J が Arakelov 認容計量と関係することを示唆している。

コンパクト・リーマン面 C 上の Arakelov-Green 関数 G_C をすべて集めたもの G を fiber 積 $C_g \times_{M_g} C_g$ 上の関数と考える。fiber 積における対角集合の法束は相対接束 T_{C_g/M_g} に他ならない。そこで関数 G は相対接束の曲率形式

$$e^A := \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \partial\bar{\partial} \log G|_{(\text{diagonal})} \in A^2(C_g)$$

を定める。Arakelov [A] が指摘しているように、各 C について

$$e^A|_C = (2 - 2g)B \in A^2(C)$$

が成立つ。したがって、差 $e^A - e^J$ は普遍族 π の各ファイバーの上では 0 になっている。しかし、差 $e^A - e^J$ は null-cohomologous だが $\mathbb{C}_g$ 上の微分形式としては 0 ではない。この差を表すモジュライ空間 $\mathbb{M}_g$ 上の関数を与えることができた。

$$a_g(C) := - \sum_{i,j=1}^g \int_C \psi_i \wedge \overline{\psi_j} \widehat{\Phi}(\overline{\psi_i} \wedge \psi_j)$$

とおく。ここで、 $\widehat{\Phi} : A^2(C) \rightarrow A^0(C)$ は面積要素 B に関する Green 作用素である。 $*$ によって Hodge $*$ -作用素をあらわす。任意の 2-形式 $\Omega \in A^2(C)$ について $d * d\widehat{\Phi}(\Omega) = \Omega - (\int_C \Omega)B$ および $\int_C \widehat{\Phi}(\Omega)B = 0$ が成立つ。 $a_g(C)$ が、正則 1-形式の正規直交基底 $\{\psi_i\}$ のとり方によらずリーマン面 C だけで決まること、つまりリーマン面 C の等角不変量であることがわかる。また、 $g \geq 2$ のとき $a_g(C)$ は正の実数である。

本稿の 1 番目の結果は次の通りである。

定理 1.

$$e^A - e^J = \frac{-2\sqrt{-1}}{2g(2g+1)} \partial \bar{\partial} a_g.$$

証明では、まず関数 $a_g : \mathbb{M}_g \rightarrow \mathbb{R}$ の第一変分 a_g を具体的な二次微分として表す。要点は、 e^J が上述の接続形式 η の二番目 η_2 の外微分によって表されることである。これによって (より複雑な 2-形式ではなく) 1-形式のレベルで e^A, e^J および a_g を比較することが可能となる。

つぎに微分形式 e_1^J を考える。さらに $e_1^F := \int_{\text{fiber}} (e^J)^2$ とおくと、これも第一森田 Mumford 類を表す微分形式である。ここでも、差 $e_1^J - e_1^F \in A^2(\mathbb{M}_g)$ は null-cohomologous だが微分形式としては 0 ではない。こんどは a_g の第二変分、 e_1^J および e_1^F を具体的に書き下し、比較することによって次の結果がえられる。

定理 2.

$$\frac{-2\sqrt{-1}}{2g(2g+1)} \partial \bar{\partial} a_g = \frac{1}{(2g-2)^2} (e_1^F - e_1^J).$$

差 $e_1^F - e_1^J$ は $\mathbb{M}_g$ 上の null-cohomologous な実 $(1,1)$ -形式である。また、 $g \geq 3$ のとき $\mathbb{M}_g$ 上の正則関数は定数しかない。そこで、少なくとも $g \geq 3$ のときは、実数値関数 $a : \mathbb{M}_g \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して、差は $\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \partial \bar{\partial} a$ と表されなければならないことは一般論からも分かる。関数 a は実数値定数関数の差を除いて一意的である。したがってこの結果の要点は、すべての $g \geq 1$ について関数 a が「具体的に」表示されるという点である。

以上二つの定理の系として次の結果が得られる。

系 3.

$$e^A - e^J = \frac{1}{(2g-2)^2} (e_1^F - e_1^J).$$

なお、関数 a_g についてここに述べた以上のことは全く不明である。本稿に関する詳細は [K2] を参照してください。

文献

- [A] S. Ju. Arakelov, Intersection theory of divisors on an arithmetic surface, *Math. USSR Izvestija*, 8 (1974) 1167-1180.
- [HR] R. Hain and D. Reed, On the Arakelov geometry of moduli space of curves, *J. Diff. Geom.*, 67 (2004) 195-228.
- [H] B. Harris, Harmonic volumes, *Acta Math.*, 150 (1983), 91-123.
- [K1] N. Kawazumi, Harmonic Magnus expansion on the universal family of Riemann surfaces, preprint `math.GT/0603158`.
- [K2] ———, Johnson's homomorphisms and the Arakelov-Green function, preprint `arXiv.0801.4218`.
- [M] S. Morita, A linear representation of the mapping class group of orientable surfaces and characteristic classes of surface bundles, in *Topology and Teichmüller Spaces*, World Scientific, 1996, 159-186.