

曲線と Grassmann 多様体

名大理 岡井 茂

種数 8 の一般の曲線は丁度 14通りの方法で射影直線 $\mathbb{P}^1$ の 6 重被覆と一致えられる。(例えば [GH] 第2章 §5) 一方、5次元射影空間 $\mathbb{P}^5$ 内の直線全体の有す (8次元)

Grassmann 多様体の次数も 14 である。この数の一致は曲線と Grassmann 多様体の深い関係のひとつの身近な現われである。ここでは、これに関し 12 次の 2つのことについて述べる。

(0.1) 曲線上の線型1次束の個数

(0.2) 種数 8 の曲線の分類

上の 8次元 Grassmann 多様体は 1つ固定された 6次元ベクトル空間 k^6 の 2次元部分空間の全体有ので $G(2, 6)$ で表わす。これは Plücker 座標でも、射影多様体 $G(2, 6) \subset \mathbb{P}^{14}$ に有る。これを 7回超平面切断す、即ち、横断的有 7次元線型部分空間 $\mathbb{P}^7$ で切ることに有て曲線

(0.3) $[C \subset \mathbb{P}^7] = [G(2, 6) \subset \mathbb{P}^{14}] \cap H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_7$

が得られる。 $G(2,6)$ の標準因子類 K_G は超平面の断数 H の (-6) 倍 方 の γ -adjunction に γ

$$K_C = (K_G + H_1 + H_2 + \cdots + H_7)|_C = H|_C$$

が成立する。 両辺の次数を c と c に γ

$$2g(C) - 2 = \deg [G(2,6) \subset \mathbb{P}^4] = 14,$$

即ち、 C の種数 g である c がわかる。

問題 (0.4) 種数 g の曲線はいつ Grassmann 多様体の線型切断 $G(2,6) \cap \mathbb{P}^7$ と同型か?

この問題に完全な解答を与え、これを使って種数 g の曲線 (の標準環) を分類するのは (0.2) である。(資料2)

$G(2,6)$ と横断的所有 γ -次元線型部分空間全体は Grassmann 多様体 $G(\mathbb{P}^7 \subset \mathbb{P}^4)$ の開集合 Ξ でパラメトライズされる。 PGL_6 の $G(2,6) \subset \mathbb{P}^4$ への作用で移り合う $\mathbb{P}^7 \subset \mathbb{P}^4$ は同型の曲線を切り出すから、対応

$$[\mathbb{P}^7] \bmod \mathrm{PGL}_6 \longrightarrow [\mathbb{P}^7 \cap G(2,6)]$$

により、分類射

$$(0.5) \quad \gamma: \Xi / \mathrm{PGL}_6 \longrightarrow \mathcal{M}_g$$

を得る。始点の次元は

$$(0.6) \quad \dim G(\mathbb{P}^7 \subset \mathbb{P}^{14}) - \dim PGL_8 = 7 \cdot 8 - 5 \cdot 7 = 21$$

で、これは種数 8 の曲線のモジュライ空間 $\mathcal{M}_8$ の次元に等しい。[M1] において γ は generically finite であること示した。即ち、一般の種数 8 の曲線は $G(2,6) \cap \mathbb{P}^7$ に含まれることができ、しかも、その表わし方は有限通りである。より精密に次が成立する。

主定理 (0.7) 種数 8 の曲線 C に対して次の 2 条件は同値である。

(1) C は 8 次元 Grassmann 多様体の線型切断 $G(2,6) \cap \mathbb{P}^7$ に同型である。

(2) C 上には g_7^1 (次数 7 で $h^0 \geq 3$ する直線束) は存在しない。

また、これらの同値な条件の下で C を $G(2,6) \cap \mathbb{P}^7$ に表わす方法は PGL_8 の作用を除いて一意である。

注意 (0.8) (1) 上の条件 (2) は C の Jacobi 多様体のテータ因子 $\Theta \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^7$ C が 3 重点をもたずいことと同値である。

(2) 8 次元 Grassmann 多様体の替りに 10 次元 スピッセル多様体

$X_{12}^{16} \subset \mathbb{P}^{15}$ と 6 次元シンプレクティック Grassmann 多様体

$X_{12}^{16} \subset \mathbb{P}^{15}$ の線型切断をとることにより種数 7, 9 の一般の
曲線が得られ, (0.7) と同様の定理が成立する。(資料 1)

曲線 C 上の多重微分全体の環

$$R_C = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(\omega_C^n)$$

は 2 次元次数付, Gorenstein 環で, C の標準環と呼ばれる。

Noether の定理 ([GH] 第 2 章 §3) より, C が超楕円的であ

らなければ, R_C 標準環は C の標準モデル $[C_{2g-2} \subset \mathbb{P}^{2g-1}]$

$= \bigcup_{k=1}^g \mathbb{P}^1_k$ の各成分標準環と同型である。 $G(2,6) \cap \mathbb{P}^7$ は

種数 8 の曲線の標準モデルなので必要を得る。

系 (0.9) 種数 8 の曲線 C は g_7^1 をもたないとする。

このとき, 標準環 R_C は

$$k[x_1, \dots, x_8] / (p_{ij} + A^{(ij)} : 1 \leq i < j \leq 8)$$

と同型である。ただし, A は $x_1, \dots, x_8$ の有次 1 次式を

成分とする対称行列で, $A^{(ij)}$ は i, j 行と i, j 列を
取り去って得られる小行列である。

(おと, R_C の $ggggg$ は Grassmann の g の (L, P) と同じである。)

注意 (0.10) g_7^2 を持つ種数 8 の曲線の標準理論も具体的に書きまわす。(資料 2)

(0.1) と (0.2) に共通する考え方は次の通りである。種数 8 の曲線 C が (0.3) で与えられているとする。 $\mathbb{P}^{14}$ の双射影空間を $\check{\mathbb{P}}^{14}$ と表わし、 C を切り出す超平面 $H_1, \dots, H_7$ の座標を $h_1, \dots, h_7 \in \check{\mathbb{P}}^{14}$ とする。ここで与えらる 6 次元線型部分空間 $\mathcal{V}_C = \langle h_1, \dots, h_7 \rangle$ は C を含む超平面 (の座標) 全体の集合である。さて、双射影空間 $\check{\mathbb{P}}^{14}$ の中には 6 次元ベクトル空間 $k^{\oplus 6}$ の 2 次元 商空間 全体のなす Grassmann 多様体 $G(6, 2)$ が Plücker 座標で入っている。 $W \in k^{\oplus 6}$ の 4 次元部分空間とすると、点 $u = [k^{\oplus 6}/W] \in G(6, 2)$ $\subset \check{\mathbb{P}}^{14}$ に対応する超平面 $H_u \subset \mathbb{P}^{14}$ は Grassmann 多様体 $G(2, 6)$ から Schubert 部分多様体

$$S_W = \{ [U] \in G(2, 6) \mid U \cap k^{\oplus 6} \text{ の 2 次元部分空間, } U \cap W \neq 0 \}$$

を切り出す。この特異点集合は 4 次元 Grassmann 多様体

$$G(3, W) = \{ [U] \in G(2, 6) \mid U \subset W \}$$

と一致し、点 $[U]$ に $[U \cap W]$ を対応させることに射

$$\pi_W: S_W \setminus G(2, W) \longrightarrow \mathbb{P}(W) = \mathbb{P}^1$$

が得られる。従って $p \in G(6, 2) \cap \mathcal{P}_C$ ならば、 S_W は C を含む。 $G(6, 2) \cap H_1 \cap \cdots \cap H_7$ が非特異完全交叉であることにより C と $G(2, W)$ は交わらない。よって、 π_W を制限することにより $C \longrightarrow \mathbb{P}^1$ (C 上の線型1次束と見ても同じ) が得られる。これは次数5であることがわかったので、写像

$$(0.11) \quad G(6, 2) \cap \mathcal{P}_C \longrightarrow \left(\begin{array}{l} C \text{ は } \mathbb{P}^1 \text{ の 5 重被覆} \\ \text{と見做す方法の全体} \end{array} \right)$$

が得られる。これより、冒頭で述べた数の一致が偶然でないことがわかる。

定理 (0.12) C は種数が偶数 $g=2n$ の一般滑曲線とする。このとき、 C 上の次数 $n+1$ の線型1次束 g_{n+1}^1 の同型類の集合 W_{n+1}^1 は自然な方法でもって g 次元 Grassmann 多様体 $G(n+2, 2) \subset \mathbb{P}^{(n+1)-1}$ の 0 次元 横断的 線型切断と同型である。特に、 g_{n+1}^1 の個数は $G(n+2, 2)$ の次数に等しい。

注意 (0.13) (1) 一致する2つの数は第 n 番目の Catalan 数 $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ に等しい。

(2) 定理は C が g 個の結節点をもつ有理曲線の時、

(Conclusion [C]) に於て示した。

(3) 一般の線型束 $\mathcal{E}_d^n$ に対しても Brill-Noether 数が必要で同様の結果が成立する。(参照 [AGGH] 第5,7章)

主定理 (0.7) の証明の基本は、ベクトル束 (に付随する一般線型系) を使、2 曲線 C を Grassmann 多様体に埋込むことである。曲線 C 上の階数 2 のベクトル束 E が大域切断で生成される, 即ち, 自然な準同型写像

$$H^0(E) \otimes_k \mathcal{O}_C \longrightarrow E$$

が全射であるとする。 C の各点 γ に対し E の γ における E_γ は $H^0(E)$ の商空間であるから射

$$\Phi_{|E|} : C \longrightarrow G(H^0(E), 2)$$

が得られる。 $h^0(E) = 6$ 個のベクトル束 E を上に選べばこれが埋込みになり、その像が線型切断に与えることを示して (0.7) が示される。埋込み, 線型切断の部分では (0.11) の周辺の考え方が鍵になる。線型切断を与える E の選べ方は安定性を保てて述べられる。

定理 (0.14) C は種数 g の曲線で $\mathcal{E}_d^n$ をもたずとする。

(1) 標準直線束を行列式とする (即ち, $\wedge E \cong \omega_C$ なる) 階数 2 の安定ベクトル束 E の全体にわたる $-h^0(E)$ の最大値は 6 である。

(2) (1) において最大値を与えるベクトル束 $E_{\max}$ は同型を除いて唯一つしか存在する。また、それは $H^0(E_{\max})$ で生成される。

注意 (0.15) $\theta^2 \cong \omega_C$ なる直線束 θ を一つとておく。 $\wedge E \cong \omega_C$ なる安定ベクトル束 E に対し、 $E \otimes \theta^{-1}$ は C の基本群 Γ の表現 $\rho: \Gamma \rightarrow SU(2)$ により得られる。 ([NS]) C は上半平面を Γ で割ったものだから、大域切断の空間 $H^0(E)$ は ρ の係数とする重 ± 1 の保型形式全体の空間と同一視できる。

定理のベクトル束 $E_{\max}$ に対して線型写像

$$\lambda: \wedge^2 H^0(E_{\max}) \longrightarrow H^0(\wedge^2 E_{\max}) \cong H^0(\omega_C)$$

は全射になり、本文の可逆図式を得る。

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\Phi|_{E_{\max}}} & G(H^0(E_{\max}), 2) \\ \text{canonical} \downarrow & & \cap \text{Plücker} \\ \mathbb{P}^*(H^0(\omega_C)) & \xrightarrow[\mathbb{P}^*(\lambda)]{} & \mathbb{P}^*(\wedge^2 H^0(E_{\max})) \end{array}$$

これが cartesian であることが主定理に他ならない。

注意 (10.16) C が g_7^1 をもっている場合でも, g_4^1 をもたない限り, $h^0(E) = 6$ なる半安定ベクトル束 E が存在する。このとき, 射空間は C を 8 次元 Grassmann 多様体に埋込むが, 像は線型切断になる。

主定理 および 種数 $g \leq 12$ におけるその類似は 3 次元 Fano 多様体のベクトル束の研究 ([M2], [M3]) より生みだされてきたもので, 新分類とより強力でみやすくする。
(資料 3。Picard 数 1 の 3 次元 Fano 多様体の分類と比較してみよ。) このことについて述べるのは別の機会にゆづる。序文に述べたが時間の都合でここで筆を置くことにする。

(1991 年 11 月 25 日)

資料 1 種数 7, 8, 9 の曲系

10 次元 スキーム多様体 $X_{12}^{10} \subset \mathbb{P}^{15}$ ([M5]) および, 6 次元 リンク多様体 $X_{16}^6 \subset \mathbb{P}^{13}$ は 各 2 種数 7, 9 の標準曲系を線型切断にもつ。
(後者は 3 次 Siegel 上半空間のコンパクト化)

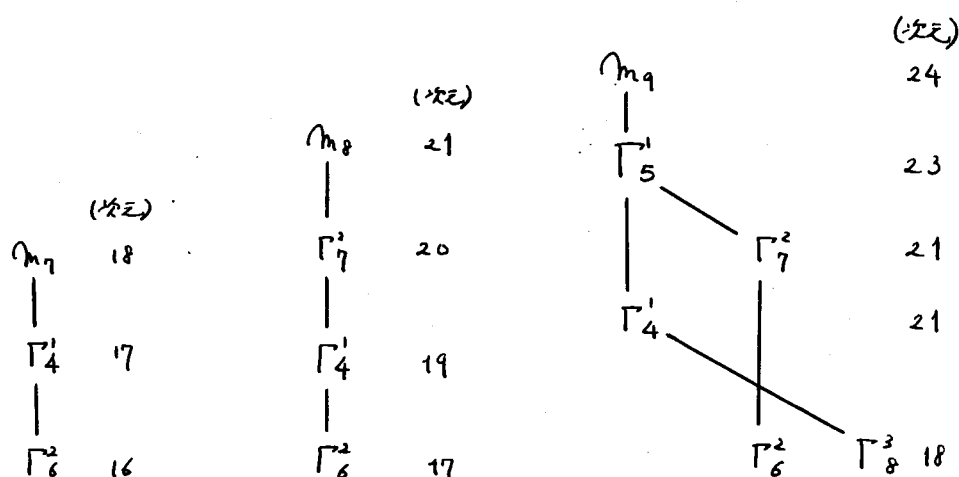
定理 種数 7 (9) の曲線 C に対して次の 2 条件は同値である。

(1) C は $X_{12}^6 \subset \mathbb{P}^{15}$ ($X_{11}^6 \subset \mathbb{P}^{13}$) の線型切断に同型である。

(2) C は g_4^1 (g_5^1) をもたない。

また、これらの同値な条件の下で C を切り出す線型部分空間は $SO(10)$ ($Sp(3)$) の作用を除いて一意である。

種数 g の曲線のモジュライ空間を $\mathcal{M}_g$, g_d^r を g 曲線全体のなす部分集合を Γ_d^r で表わす。 $\mathcal{M}_7, \mathcal{M}_8, \mathcal{M}_9$ は次の様に stratify される。



最大次元 strata は線型切断定理の右のように軌道空間に記述される。

$$\mathcal{M}_9 \setminus \Gamma_4^1 \cong G(9, U^{16}) / Sp(10)$$

$$\mathcal{M}_8 \setminus \Gamma_7^1 \cong G(8, U^{15}) / SL(6)$$

$$\mathcal{M}_9 \setminus \Gamma_5^1 \cong G(9, U^{14}) / Sp(3)$$

資料 2 種数 8 の曲線の分類

	g_3^1 の 個数	g_3^2 の 個数	g_4^1 の 個数	g_7^2 の 個数	標準モデル	平面曲線表示	
非4角的	0	0	0	0	8次元 Grassmann 多様体 $G(2,6) \subset \mathbb{P}^{14}$ の線型切断	8次曲線 (14通り)	
				1	4次元加重射影空間 $\mathbb{P}(1:1:1:2:2)$ の中で右の型の 歪対称行列の 5個の小 Plücker の交点集合. ($[i]$ は i 次斉次式 を意味する。) $\begin{pmatrix} 0 & [1] & [1] & [2] & [2] \\ & 0 & [1] & [2] & [2] \\ & & 0 & [2] & [2] \\ & & & 0 & [3] \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$	3重点の あるいは7次 曲線	
				2	$(1,1) \cap (1,2) \cap (2,1) \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$		
4角的	0	1	1 または 2	8	$(1,1) \cap (1,1) \cap (0,2) \cap (1,2) \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^4$	3重点をもつ 7次曲線	
		∞	∞	∞	7次曲面 $S_7 \subset \mathbb{P}^7$ の2次超曲面切断	S_7 は $\mathbb{P}^2$ の2点 blow up の反標準モデル	3重点をもつ あるいは6次曲線
						S_7 は楕円曲線 $E_7 \subset \mathbb{P}^6$ の全交	
3角的	1	1	∞	∞	$(3,5) \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ または $(3d+8f) \subset \mathbb{P}_2$	4重点をもつ 7次曲線	
超楕円の	∞	∞			$\mathbb{P}(1:1:9)$ 内の18次曲線		

資料 3 Petri-一般な曲線の分類

定義 種数 g の曲線は X 上の全ての直線束 $\mathcal{L}$ に対して $h^0(\mathcal{L}) - h^1(\mathcal{L}) \leq g$ が成立するとする (数値的に) Petri-一般であると言う。

(I) 種数 $g \leq 9$ の Petri-一般な曲線

g	標準モデル $C_{2g-2} \subset \mathbb{P}^{g-1}$
2	$C \xrightarrow{2:1} \mathbb{P}^1$ 6点で分岐
3	$C_4 \subset \mathbb{P}^2$ 平面 4次曲線
4	$C_6 = (2) \cap (3) \subset \mathbb{P}^3$
5	$C_8 = (2) \cap (2) \cap (2) \subset \mathbb{P}^4$
6	$C_{10} = G(2,5) \cap Q^3$ または bielliptic
7	C_{12} は 10次元スピノル多様体 $X_{12}^{10} \subset \mathbb{P}^{15}$ の線型切断
8	C_{14} は 8次元 Grassmann 多様体 $X_{14}^8 \subset \mathbb{P}^{14}$ "
9	C_{16} は 6次元 symplectic Grassmannian $X_{16}^6 \subset \mathbb{P}^{13}$ "

(II) 種数 $g \geq 10$ の時の一般 (generic) な曲線の良き表示は知られていない。 $g=10, 12$ の時、曲線 C が $K3$ 曲面にのりて Petri-一般であることの具体的な表現をもつ。

$g=10$	C_{18} は G_2 -多様体 $X_{18}^5 \subset \mathbb{P}^{13}$ ([MI]) の線型切断
$g=12$	C_{22} は 非退化な net of directions $V^3 \subset \wedge^3 V^7$ に付随した 非特異 3次元 quadric 多様体 $G(V, 3, V) \subset \mathbb{P}^{11}$ の線型切断

参考文献

- [ACGH] Arbarello, E., M. Cornalba, P. Griffiths and J. Harris: Geometry of Algebraic Curves, Vol I, Springer-Verlag, 1985.
- [C] Castelnuovo, G.: Numero delle involuzioni razionali giacenti sopra una curva di dato genere, Rend. R. Accad. Lincei, ser. 4, vol. 5-1 (1889), 130-133.
- [GH] Griffiths, P. and J. Harris: Principle of Algebraic Geometry, John Wiley & Sons, 1978.
- [JP] Józefiak, T. and P. Pragacz: Ideals generated by Pfaffians, J. Algebra 61(1979), 189-198.
- [M1] Mukai, S.: Curves, K3 surfaces and Fano manifolds of genus ≤ 10 , Algebraic Geometry and Commutative Algebra in honor of M. Nagata, Kinokuniya, 1988, pp. 357-377.
- [M2] — : Biregular classification of Fano threefolds and Fano manifolds of coindex 3, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 86(1989), 3000-3002.
- [M3] — : Fano 3-folds, to appear in Proc. Trieste Conf. "Projective Geometry".
- [M4] — : Curves and symmetric spaces, preprint, 1991.
- [M5] — : Curves of genus seven and spinor varieties, preprint, 1991.
- [NS] Narasimhan, M.S. and C.S. Seshadri: Stable and unitary vector bundles on a compact Riemann surface, Ann. of Math. 82(1965) 540-567.