

Lubin-Tate 群による高木の公式

九大理・末吉 豊 (Yutaka Sueyoshi)

§1. 序

p を奇素数とし、 $\mathbb{Q}_p$ を有理 p 進数体とする。 ζ を 1 の原始 p 乗根を表わし、 $\mathbb{Q}_p(\zeta)$ を素円体とする。 $a, b \in \mathbb{Q}_p(\zeta)^\times$ に対し、
 $(a, b) := \sqrt[p]{b}^{\sigma_a - 1}$, $\sigma_a \in \text{Gal}(\mathbb{Q}_p(\zeta)^{ab} / \mathbb{Q}_p(\zeta))$ を p -th Hilbert symbol
 を定義する。ここで、 $\mathbb{Q}_p(\zeta)^{ab}$ は $\mathbb{Q}_p(\zeta)$ の最大アーベル拡大を表わし、 σ_a はアルティン記号である。 $\sqrt[p]{-1} \in \mathbb{Q}_p(\zeta)$ を $\sqrt[p]{-1} \equiv \zeta - 1 \pmod{(\zeta - 1)^2}$ をみたすようにとる。このとき、 $\text{mod } \mathbb{Q}_p(\zeta)^\times{}^p \mathbb{Z}$ explicit に定められた $\mathbb{Q}_p(\zeta)^\times$ の主単数 $\kappa_1, \dots, \kappa_p$ が存在して、
 $\{\sqrt[p]{-1}, \kappa_1, \dots, \kappa_p\}$ が $\mathbb{Q}_p(\zeta)^\times / \mathbb{Q}_p(\zeta)^\times{}^p$ の 1 組の底を代表し (高木の底とよばれる)、次の explicit formulas が成り立つ。

高木の公式 ([8])

$$(\sqrt[p]{-1}, \kappa_i) = \begin{cases} \zeta & (i = p), \\ 1 & (\text{その他}), \end{cases} \quad (\text{補充法則})$$

$$(\kappa_j, \kappa_i) = \begin{cases} \zeta^{-j} & (i + j = p), \\ 1 & (\text{その他}). \end{cases} \quad (\text{一般法則})$$

この公式は、白谷先生 ([5]) により、Lubin-Tate 群の素分点を付加した体の場合に一般化された。その証明には、Iwasawa-Wiles 公式 ([2, 3, 11]) 及び de Shalit 公式 ([1]) を用いている。ここでは、Vostokov 公式 ([9, 10]) を用いて素分点の体の場合に得られた結果を述べる。詳しくは、[7] をご覧下さい。

§2. k_n^x 及び $F(\mathfrak{f}_n)$ の生成元

p を奇素数とし、 $k/\mathbb{Q}_p$ を有限次拡大とする。 $\mathcal{O}$ を k の整数環、 $\mathfrak{f}$ を $\mathcal{O}$ の素イデアルとする。 π を k の素元とし、 $F(X, Y) \in \mathcal{O}[[X, Y]]$ を π に属する Lubin-Tate 群すなわち、 F は 1 次元可換形式群で π に付随する F の endomorphism $[\pi]_F$ が

$$\begin{cases} [\pi]_F(X) \equiv X^q \pmod{\pi}, \\ [\pi]_F(X) \equiv \pi X \pmod{\deg 2} \end{cases}$$

をみたすとする。ここで、 $q = p^f$ は k の剰余体 $\mathcal{O}/\mathfrak{f}$ の元の個数を表わす。 k_n で k の代数閉包を表わし、 $v_n \in k$ を F の原始 π^n -分点として、 $k_n := k(v_n)$ とおく。 $\mathfrak{f}_n$ を k_n の整数環の素イデアルとし、 $F(\mathfrak{f}_n)$ で付随する formal module を表わす。

$\alpha \in k_n^x$, $\beta \in F(\mathfrak{f}_n)$ に対し、一般化された Hilbert symbol が

$$(\alpha, \beta)_n^F := p^{\sigma_\alpha} \frac{p}{F} p, \quad p \in k_n, \quad [\pi^n](p) = \beta, \quad \sigma_\alpha \in \text{Gal}(k_n^{ab}/k_n)$$

で定義される ([11])。

$\lambda_F: F \xrightarrow{\sim} G_a$ を F の logarithm で $\lambda_F'(0) = 1$ をみたすものとし、

[9, §2 ; 4, §1] に従って 2 つの中級数

$$\begin{cases} E_F(X) := \lambda_F^{-1} \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{X^{q^\ell}}{\pi^\ell} \right) \in X \otimes \mathbb{Z}[X], \\ E(X) := 1 + E_{\mathbb{G}_m}(X) = \exp \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{X^{p^m}}{p^m} \right) \in 1 + X \mathbb{Z}_p[X] \end{cases}$$

を定義する。 $E(X)$ は Artin-Hasse-Safarevič の関数として知られ

てゐる。 F_0 を basic Lubin-Tate 群 i.e. $[\pi]_{F_0}(X) = X^q + \pi X$ に付随

する Lubin-Tate 群とし、 $u_n := (\lambda_{F_0}^{-1} \circ \lambda_F)(v_n)$ を F_0 の原始 π^n -分点と

すると、 $k_n = k(v_n) = k(u_n)$ である。 $\mathcal{R}$ を $\mathcal{O}/\mathfrak{f}$ の乗法的代表系

とし、 e を $k/\mathbb{Q}_p$ の分岐指数とする。次のようにおく。

$$\begin{aligned} R_1 &:= \left\{ E(\theta u_n^j) \mid \theta \in \mathcal{R}, 1 \leq j < \frac{pe(q-1)q^{n-1}}{p-1} \text{ (} p \nmid j \text{) or } j = \frac{pe(q-1)q^{n-1}}{p-1} \right\}, \\ R_2 &:= \left\{ E_F(u_n^i) \mid 1 \leq i < q^n \text{ (} q \nmid i \text{)} \right\} \cup \{\kappa\}. \end{aligned}$$

但し、 $\kappa :=$

$$\lambda_F^{-1} \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\pi^\ell} [\pi^n]_{F_0}(u_n^{q^\ell}) \right)$$

は [9, Proposition 1] で定義されてゐる $F(\mathfrak{f}_n)$ の π^n -primary element

である (i.e. k の $[\pi^n]_F$ -分点は k_n 上に不分岐拡大を生成する)。

[4, §1] により、 R_1 は $k_n^\times$ の主単数群 $1 + \mathfrak{f}_n$ の $\mathbb{Z}_p$ -生成系をなす。

また、 [9, §4, Proposition 及 Remark] により、 R_2 は $\mathcal{O}/(\pi^n)$ -module

$F(\mathfrak{f}_n)/[\pi^n]_F(F(\mathfrak{f}_n))$ の 1 組の底を代表する。更に [9, Proposition 1] に

より、

$$(1) \quad \begin{cases} (u_n, \kappa)_n^F = (\lambda_F^{-1} \circ \lambda_{F_0})(u_n, \kappa)_n^{F_0} = v_n, \\ (E(\theta u_n^j), \kappa)_n^F = 0 \quad (\forall E(\theta u_n^j) \in R_1) \end{cases}$$

が成り立つ。

特に $k = \mathbb{Q}_p$, $n = 1$, $\pi = p$, $F = \mathbb{G}_m = x + y + xy$ とすると, $v_1 = 5-1$, $u_1 = \sqrt[5]{-p}$ となり,

$$\left\{ \sqrt[5]{-p}, E(u_1^i)^{(-1)^{i-1}} (1 \leq i \leq 4), \exp\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^k} [p]_{F_0}(u_1^{p^k})\right) \right\}$$

が $\text{mod } \mathbb{Q}_p(\zeta)^{\times p}$ で高木の底と一致する ([6, Theorem 3.17]). これについて §4 も参照して下さい。

白谷先生の公式は次のように述べられる。

Shiratani の公式 ([5, Theorem 1 及 v. Theorem 2])

$$(2) \quad (u_n, E_F(u_n^i))_n^F = \begin{cases} v_n & (i = \varphi^n), \\ 0 & (1 \leq i < \varphi^n), \end{cases} \quad (\text{補充法則})$$

$$(E(u_1^j), E_F(u_1^i))_1^F = \begin{cases} [j]_F(v_1) & (i + \varphi^m j = \varphi, m \geq 0), \\ 0 & (\text{その他}). \end{cases} \quad (\text{一般法則})$$

$F = \mathbb{G}_m$ とおけば高木の公式が得られる。(2) は仮定 $\varphi > 2n$ の下で証明されたが, §3 で述べる Vostokov 公式を用いれば一般に証明できる。以下で $n \geq 2$ のときの一般法則を与える。

§3. 一般法則

以下で $(E(\theta u_n^j), E_F(u_n^i))_n^F$, $n \geq 2$ を計算する。

$$(E(\theta u_n^j), E_F(u_n^i))_n^F = (\lambda_F^{-1} \circ \lambda_{F_0})((E(\theta u_n^j), E_{F_0}(u_n^i))_n^{F_0})$$

に注意すれば, $F = F_0$ のときに計算できればよいことがわかる。

一般に $\alpha \in k_n^\times$, $\beta \in F_0(\varphi_n)$ に対し,

$$\begin{cases} \alpha = u_n^a \cdot \eta \cdot \varepsilon(u_n), & a \in \mathbb{Z}, \eta \in \mathcal{K}, \varepsilon(x) \in 1 + x \mathcal{O}_T[[x]], \\ \beta = B(u_n), & B(x) \in X \mathcal{O}_T[[x]] \end{cases}$$

とかく。ここに $\mathcal{O}_T$ は $\mathbb{Z}/\mathbb{Q}_p$ の情性体 T の整数環を表わす。

$A(x) := X^a \cdot \eta \cdot \varepsilon(x)$ とおき、

$$\begin{aligned} \Phi(x) := & -\frac{1}{\pi} \left\{ \log \varepsilon(x) - \frac{1}{q} \log \varepsilon(x^q) \right\} \frac{d}{dx} (\lambda_{F_0} \circ B(x^q)) \\ & + \left\{ \lambda_{F_0} \circ B(x) - \frac{1}{\pi} \lambda_{F_0} \circ B(x^q) \right\} A^{-1} \frac{dA}{dx} \in \mathcal{O}_T[[x]] \end{aligned}$$

と定義するとき、

Vostokov の公式 ([10, Theorem 4])

$$(\alpha, \beta)_n^{F_0} = [\text{res}_X \Phi / [\pi^n]_{F_0}]_{F_0}(u_n).$$

但し、

$$\begin{cases} \Phi / [\pi^n]_{F_0} \in \mathcal{O}\{x\} := \left\{ \varphi(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i x^i \mid a_i \in \mathcal{O}, a_i \rightarrow 0 (i \rightarrow -\infty) \right\}, \\ \text{res}_X \varphi(x) := a_{-1}, \quad \varphi(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i x^i \in \mathcal{O}\{x\}. \end{cases}$$

が成り立つ。[9, §1]により、 $\varphi(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i x^i \in \mathcal{O}\{x\}$ が $\mathcal{O}\{x\}$ で可逆

であるための必要十分条件は、 a_i が $\mathcal{O}$ の単元となるような i

が存在することであり、 i_0 をそのような i の最小値とし、

$$\varphi(x) = a_{i_0} x^{i_0} (1 + \psi(x)) \quad \text{とかく。} \quad 1/\varphi = a_{i_0}^{-1} x^{-i_0} (1 - \psi + \psi^2 - \dots)$$

となる。従って特に $[\pi^n]_{F_0}(x) = x^{q^n} + \dots + \pi^n x$ は $\mathcal{O}\{x\}$ において可

逆であり、 $\Phi / [\pi^n]_{F_0}$ は意味をもつ。

さて、 $\alpha = E(\theta u_n^j)$, $\beta = E_{F_0}(u_n^i)$ とすれば

$$\begin{cases} A(x) = \varepsilon(x) = E(\theta x^j) = \exp\left(\sum_{m=0}^{\infty} \theta^{p^m} \frac{x^{p^m j}}{p^m}\right) \in 1 + x \mathcal{O}_T[[x]], \\ B(x) = E_{F_0}(x^i) = \lambda_{F_0}^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{q^k i}}{\pi^{q^k}}\right) \in X \mathcal{O}_T[[x]] \end{cases}$$

ととれるから、

$$\begin{aligned}
 (E(\theta u_n^j), E_F(u_n^i))_n^F &= (\lambda_F^{-1} \circ \lambda_{F_0})(E(\theta u_n^j), E_{F_0}(u_n^i))_{n'}^{F_0} \\
 &= [\text{res}_X \Phi / [\pi^n]_{F_0}]_F(v_n), \\
 (3) \quad \Phi(X) &= - \sum_{m=0}^{f-1} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{q^{\ell+1} i \theta^{p^m}}{p^m \pi^{\ell+1}} X^{p^m j + q^{\ell+1} i - 1} + \sum_{m=0}^{\infty} j \theta^{p^m} X^{i + p^m j - 1}
 \end{aligned}$$

を得る。 $1/[\pi^n]_{F_0}$ を $n=2, 3$ に ついて計算すると、

$$\begin{aligned}
 [\pi^2]_{F_0}(X) &= (X^q + \pi X)^q + \pi(X^q + \pi X) \equiv X^{q^2} + \pi X^q \pmod{\pi^2}, \\
 1/[\pi^2]_{F_0} &\equiv X^{-q^2} (1 - \pi X^{-q^2+q}) \pmod{\pi^2}, \\
 [\pi^3]_{F_0}(X) &\equiv (X^{q^2} + \pi X^q)^q + \pi(X^{q^2} + \pi X^q) \\
 &\equiv X^{q^3} + q\pi X^{q^3-q^2+q} + \pi X^{q^2} + \pi^2 X^q \pmod{\pi^3}, \\
 1/[\pi^3]_{F_0} &\equiv X^{-q^3} (1 - q\pi X^{-q^2+q} - \pi X^{-q^3+q^2} - \pi^2 X^{-q^3+q} + \pi^2 X^{-2q^3+2q^2}) \\
 &\pmod{\pi^3}.
 \end{aligned}$$

従って、 $\text{res}_X \Phi / [\pi^n]_{F_0}$, $n=2, 3$ を計算し、 π 次を得る。

命題 1 $E(\theta u_n^j) \in R_1$, $E_F(u_n^i) \in R_2$ ($q \neq \lambda$) とするとき、

$n=2, 3$ について

$$(E(\theta u_n^j), E_F(u_n^i))_2^F = \begin{cases} [-p\theta]_F(v_2) & (e=f=1, j=p^2, i=p-1), \\ [j\theta^{p^m}]_F(v_2) & (i+p^m j = q^2, \exists m \geq 0), \\ [-j\theta^{p^m}]_F(v_1) & (i+p^m j = 2q^2 - q, \exists m \geq 0), \\ 0 & (\lambda \neq q). \end{cases}$$

$$\begin{cases} [-p^2\theta + \frac{p^2(p-1)}{\pi}\theta]_F(v_3) & (e=f=1, j=p^3, i=p-1), \\ [-p\theta]_F(v_2) & (e=f=1, j=p^3, i=p^2-1), \end{cases}$$

$$(E(\theta u_3^j), E_F(u_3^i))_3^F = \begin{cases} [2p^2\theta]_F(v_3) & (e=f=1, j=p^3, i=2p-2), \\ [j\theta^{p^m}]_F(v_3) & (i+p^m j = q^3, \exists m \geq 0), \\ [-jp\theta^{p^m}]_F(v_2) & (e=f=1, i+j=p^3+p^2-p), \\ [-j\theta^{p^m}]_F(v_2) & (i+p^m j = 2q^3 - q^2, \exists m \geq 0), \\ [-j\theta^{p^m}]_F(v_1) & (i+p^m j = 2q^3 - q, \exists m \geq 0), \\ [j\theta^{p^m}]_F(v_1) & (i+p^m j = 3q^3 - 2q^2, \exists m \geq 0), \\ 0 & (\text{その他}). \end{cases}$$

一般の n について次が成り立つ。

定理 1 $E(\theta u_n^j) \in R_1, E_F(u_n^i) \in R_2$ ($q \nmid i$) とするとき。

$$(i) \begin{cases} (E(\theta u_n^j), E_F(u_n^i))_n^F = [j\theta^{p^m}]_F(v_n) & (i+p^m j = q^n, \exists m \geq 0), \\ (E(\theta u_n^j), E_F(u_n^i))_n^F \in \{[c]_F(v_{n-1}) \mid c \in \mathcal{O}\} & (\text{その他}). \end{cases}$$

(ii) $p \nmid j$ かつ $q \nmid i + p^m j, 0 \leq m \leq f-1$ あるいは $i + p^{f-1} j < q^n$ の

いずれかの条件が成り立ちはず。

$$(E(\theta u_n^j), E_F(u_n^i))_n^F = 0.$$

(証明の概略) $[\pi^n]_{F_0}(X) = \sum_{\lambda=1}^{q^n} a_\lambda X^\lambda$ ($a_{q^n} = 1$) とかくとき、 n に

ついで induction により容易に、 $q \nmid \lambda$ ならば $a_\lambda \equiv 0 \pmod{\pi^n}$ が

わかる。従って $1/[\pi^n]_{F_0} = X^{-q^n} \sum_{\lambda=0}^{\infty} b_\lambda X^\lambda$ ($b_0 = 1$) とかくとき、

$q \nmid \lambda$ ならば $b_\lambda \equiv 0 \pmod{\pi^n}$ が成り立つ。従って (3) より、

$$(4) \quad \text{res}_X \Phi / [\pi^n]_{F_0} \equiv \sum_{\substack{q \nmid \lambda \\ \lambda \geq 0}} \left(- \sum_{\substack{p^m j + q^{l+1} i = q^n + \lambda \\ 0 \leq m \leq f-1, l \geq 0}} \frac{q^{l+1} i \theta^{p^m}}{p^m \pi^{l+1}} + \sum_{\substack{i+p^m j = q^n + \lambda \\ m \geq 0}} j \theta^{p^m} \right) b_\lambda \pmod{\pi^n}$$

となる。(4)の右辺を条件に従って計算することにより、定理の式を得る。

§4. 高木公式の一般化

$k = \mathbb{Q}_p$, $\pi = p$, $F = G_m$, $v_n = j_n - 1$, $k_n = \mathbb{Q}(j_n)$ (j_n : 1 の原始 p^n 乗根) とおく。 $a, b \in k_n^\times$ に対し、 $(a, b)_n := p^n \sqrt[n]{b}^{\sigma_a - 1}$ により、 p^n -th Hilbert symbol を表わす。

$$\varepsilon_i := \begin{cases} E(u_n^i) & (1 \leq i < p^n, p \nmid i), \\ \exp\left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{p^\ell} [p^\ell]_{F_0}(u_n^{p^\ell})\right) & (i = p^n) \end{cases}$$

と定義すれば、 $R := \{u_n, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{p^n}\}$ は $\mathbb{Z}_p/(p^n)$ -module $k_n^\times/k_n^{\times p^n}$ の 1 組の底を代表する。特に $n=1$ のとき、§2 で述べたように、

$$\kappa_i \equiv \varepsilon_i^{(-1)^{i-1}} \pmod{\mathbb{Q}_p(j_1)^{\times p}} \quad (1 \leq i \leq p)$$

となり、 R は高木の底と本質的に同じである。(1), (2) より、

$$(u_n, \varepsilon_i)_n = \begin{cases} j_n & (i = p^n), \\ 1 & (\text{その他}) \end{cases} \quad (\text{補充法則})$$

を得る。一般法則については、 $i = p^n$ のとき、(1) より、

$$(5) \quad (\varepsilon_j, \varepsilon_{p^n}) = 1 \quad (\forall \varepsilon_j \in R)$$

が成り立ち、一般の i, j について次が成り立つ。

命題 2 $1 \leq i, j < p^n$, $p \nmid i, p \nmid j$ とするとき、 $n=2, 3, 4$ に

ついで

$$(\varepsilon_j, \varepsilon_i)_2 = \begin{cases} \gamma_2^j & (i+j = p^2), \\ \gamma_1^{-j} & (i+j = 2p^2 - p), \\ 1 & (\text{その他}). \end{cases}$$

$$(\varepsilon_j, \varepsilon_i)_3 = \begin{cases} \gamma_3^j & (i+j = p^3), \\ \gamma_1^{-j} & (i+j = p^3 + p^2 - p), \\ \gamma_2^{-j} & (i+j = 2p^3 - p^2), \\ \gamma_1^{-j} & (i+j = 2p^3 - p), \\ 1 & (\text{その他}). \end{cases}$$

$$(\varepsilon_j, \varepsilon_i)_4 = \begin{cases} \gamma_4^j & (i+j = p^4), \\ \gamma_1^{-j} & (i+j = p^4 + p^2 - p), \\ \gamma_2^{-j} & (i+j = p^4 + p^3 - p^2), \\ \gamma_1^{-j} & (i+j = p^4 + p^3 - p), \\ \gamma_1^{-\frac{p-1}{2}j} & (i+j = p^4 + 2p^3 - 2p^2), \\ \gamma_3^{-j} & (i+j = 2p^4 - p^3), \\ \gamma_1^{-j} & (i+j = 2p^4 - p^3 + p^2 - p), \\ \gamma_2^{-j} \cdot \gamma_1^{2j} & (i+j = 2p^4 - p^2), \\ \gamma_1^{-j} & (i+j = 2p^4 - p), \\ 1 & (\text{その他}). \end{cases}$$

高木の底の特徴づけ ([8, §1; 6, §3]) が次のように一般化される。 $\eta \in V := \{\eta \in \mathbb{Z}_p^\times \mid \eta^{p-1} = 1\}$ に対し、 $\sigma_\eta \in \text{Gal}(\mathbb{Q}_p(\zeta_n)/\mathbb{Q}_p)$ を

$\sigma_\eta = \tau_\eta$ で定義する。 $H := \{\sigma_\eta \mid \eta \in V\} \subseteq \text{Gal}(\mathbb{Q}_p(\zeta_n)/\mathbb{Q}_p)$ とおく。

$U := 1 + \mathfrak{p}_n \in \mathbb{Q}_p(\zeta_n)^\times$ の主単数群と定める。

$$1_i := \frac{1}{p-1} \sum_{\eta \in V} \eta^{-i} \sigma_\eta \in \mathbb{Z}_p[H] \quad (1 \leq i \leq p-1)$$

と定義すると、

$$1 = \sum_{i=1}^{p-1} 1_i, \quad 1_i \cdot 1_j = \delta_{ij} 1_i \quad (\delta_{ij}: \text{Kronecker のデルタ記号})$$

が成り立ち、 1_i ($1 \leq i \leq p-1$) は群環 $\mathbb{Z}_p[H]$ の原始直交中等元である。従って U は $\mathbb{Z}_p[H]$ -module として次の直積分解をもつ。

$$U = A^{(1)} \times \cdots \times A^{(p-1)},$$

$$A^{(i)} := U^{1_i} = \{ \varepsilon \in U \mid \varepsilon^{\sigma_\eta} = \varepsilon^{\eta^i}, \forall \eta \in V \}.$$

Artin-Hasse logarithm $\lambda_a(x) := \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{x^{p^\ell}}{p^\ell}$ に付随する Lubin-Tate 群を F_a とする。 $\eta \in V$ とすると $\lambda_a \circ [\eta]_{F_a}(x) = \eta \lambda_a(x) = \lambda_a(\eta x)$ が成り立つから、 $[\eta]_{F_a}(x) = \eta x$ を得る。一方、よく知られていようように ([11, Lemma 20]), $[\eta]_{F_0}(x) = \eta x$ である。従って

$$\begin{aligned} \sigma_\eta(u_n) &= (\lambda_{F_0}^{-1} \circ \log)(\zeta_n)^{\sigma_\eta} = (\lambda_{F_0}^{-1} \circ \log)(\tau_n^\eta) = \eta u_n, \\ (6) \quad \varepsilon_j^{\sigma_\eta} &= (\exp \circ \lambda_a)(u_n^j)^{\sigma_\eta} = (\exp \circ \lambda_a)(\eta^j u_n^j) = \varepsilon_j^{\eta^j} \quad (1 \leq j), \\ \varepsilon_{p^n}^{\sigma_\eta} &= \left(\exp \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{p^\ell} [\rho^\ell]_{F_0}(u_n^{p^\ell}) \right) \right)^{\sigma_\eta} = \exp \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{p^\ell} [\rho^\ell]_{F_0}(\eta^{p^\ell} u_n^{p^\ell}) \right) \\ &= \exp \left(\eta \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{p^\ell} [\rho^\ell]_{F_0}(u_n^{p^\ell}) \right) = \varepsilon_{p^n}^\eta = \varepsilon_{p^n}^{\eta^{p^n}} \end{aligned}$$

が成り立つ。

$$A^{(i)} = \langle \varepsilon_j \in R \mid j \equiv i \pmod{p-1} \rangle \quad (1 \leq i \leq p-1)$$

が得られる。これは高木の底の特徴づけの一般化を与える。

注: 高木の底 $\{\kappa_1, \dots, \kappa_p\}$ は次の条件で特徴づけられる。

([8, §1; 6, §3]).

$$(i) \quad \kappa_i^{\sigma_\eta} \equiv \kappa_i^{\eta^i} \pmod{U^p} \quad (1 \leq \nu_i \leq p, \forall \eta \in V),$$

$$(ii) \quad \kappa_i \equiv 1 - (1-\gamma)^i \pmod{(1-\gamma)^{i+1}} \quad (1 \leq \nu_i \leq p),$$

$$(iii) \quad \kappa_1 \equiv \gamma \pmod{U^p}.$$

これにより、 $\kappa_1, \dots, \kappa_p$ は $\pmod{U^p}$ で一意に定まる。

定理 2 $\varepsilon_i, \varepsilon_j \in R$ とするとき、

$$(\varepsilon_j, \varepsilon_i)_n = \begin{cases} \gamma_n^j & (i+j = p^n), \\ 1 & (i+j \not\equiv 0 \pmod{p(p-1)} \text{ 又は } i+j < p^n). \end{cases}$$

(証明) 第 1 の式は定理 1 (i) から得られる。 $j = p^n$ 又は $i = p^n$

のときは、第 2 の式は (5) から従う。 $\nu \nmid i, \nu \nmid i$ とする。 $\eta \in V$

に対し、(6) より

$$(\varepsilon_j, \varepsilon_i)_n^\eta = (\varepsilon_j, \varepsilon_i)_n^{\sigma_\eta} = (\varepsilon_j^{\eta^j}, \varepsilon_i^{\eta^i})_n = (\varepsilon_j, \varepsilon_i)_n^{\eta^{i+j}}$$

となるから、

$$i+j \not\equiv 1 \pmod{p-1} \text{ ならば } (\varepsilon_j, \varepsilon_i)_n = 1$$

となる。一方、定理 1 (iii) より

$$i+j \not\equiv 0 \pmod{p} \text{ 又は } i+j < p^n \text{ ならば } (\varepsilon_j, \varepsilon_i)_n = 1$$

である。これらにより第 2 の式を得る。

References

- [1] E. de Shalit, The explicit reciprocity law in local class field theory, *Duke Math. J.* 53(1986), 163-176.
- [2] K. Iwasawa, On explicit formulas for the norm residue symbol, *J. Math. Soc. Japan* 20(1968), 151-165.
- [3] K. Iwasawa, *Local Class Field Theory*, Oxford University Press, New York, 1986.
- [4] I. R. Šafarevič, A general reciprocity law, *Mat. Sb.* 26(68) (1950), 113-146; English transl. in *Amer. Math. Soc. Transl.* (2) 4(1968), 73-106.
- [5] K. Shiratani, On the exponential series of formal groups, *RIMS Kokyuroku* 658(1988), 85-95.
- [6] K. Shiratani and M. Ishibashi, On explicit formulas for the norm residue symbol in prime cyclotomic fields, *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A* 38(1984), 203-231.
- [7] Y. Sueyoshi, A generalization of Takagi's explicit formulas by Lubin-Tate groups, preprint.
- [8] T. Takagi, On the law of reciprocity in the cyclotomic corpus, *Proc. Phys.-Math. Soc. Japan* 4(1922), 173-182.
- [9] S. V. Vostokov, A norm pairing in formal modules, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 43(1979), 765-794; English transl. in *Math. USSR-Izv.* 15(1980), 25-51.
- [10] S. V. Vostokov, Symbols on formal groups, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 45(1981), 985-1014; English transl. in *Math. USSR-Izv.* 19(1982), 261-284.
- [11] A. Wiles, Higher explicit reciprocity laws, *Ann. of Math.* 107(1978), 235-254.