

リーノルムに関するいくつかの予想

国際基督教大学

森本光生

1999年8月16日から21日に福岡で開催された第2回ISAAC会議において、筆者は藤田景子と共同で、双対リー球上の正則関数の2重級数展開について発表した([2])。その結果を見ると、リーノルムと双対リーノルムを繋ぐノルムの連続な系列が存在すると予想できる。

1 リーノルムと双対リーノルム

$\|x\|$ で $\mathbb{R}^n$ 上のユークリッドノルムを表す。 $\mathbb{R}^n$ の複素化 $\mathbb{C}^n$ 上に定義される $\|x\|$ の交差ノルムを $L(z)$ で表すことにする。

$$L(z) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^M |\lambda_j| \|x_j\|; z = \sum_{j=1}^M \lambda_j x_j, \lambda_j \in \mathbb{C}, x_j \in \mathbb{R}^n \right\}$$

$L(z)$ はリーノルムといい、次のようにも表示できる。

$$L(z) = \sqrt{\|z\|^2 + \sqrt{\|z\|^4 - |z^2|^2}} \quad (1)$$

ここで、 $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ としたとき、

$$\|z\|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2, \quad z^2 = z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2$$

である。

一方、双対リーノルム $L^*(z)$ は次式で定義される。

$$L^*(z) = \sup\{|z \cdot \zeta|; L(\zeta) \leq 1\}$$

ここで、 $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ と $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$ に対して、

$$z \cdot \zeta = z_1 \zeta_1 + z_2 \zeta_2 + \dots + z_n \zeta_n$$

である。 $L^*(z)$ は次のようにも表示できる。

$$L^*(z) = \sqrt{(\|z\|^2 + |z^2|)/2} = \frac{1}{2} \left(L(z) + \frac{|z^2|}{L(z)} \right)$$

さて、

$$\frac{|z^2|}{L(z)} = \sqrt{\|z\|^2 - \sqrt{\|z\|^4 - |z^2|^2}}$$

に注意すれば、

$$L^*(z) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\|z\|^2 + \sqrt{\|z\|^4 - |z^2|^2}} + \sqrt{\|z\|^2 - \sqrt{\|z\|^4 - |z^2|^2}} \right) \quad (2)$$

とも表示できる。(以上については、[1] および [4] を参照。)

また、 $\mathbb{C}^n$ 上のユークリッドノルム $\|z\|$ は次のように表示できる。

$$\|z\| = \left\{ \frac{1}{2} \left((\|z\|^2 + \sqrt{\|z\|^4 - |z^2|^2}) + (\|z\|^2 - \sqrt{\|z\|^4 - |z^2|^2}) \right) \right\}^{1/2} \quad (3)$$

2 予想

$p \geq 1$ に対して、 $\mathbb{C}^n$ 上の関数 $N_p(z)$ を次のように定義する。

$$N_p(z) = \left\{ \frac{1}{2} \left((\|z\|^2 + \sqrt{\|z\|^4 - |z^2|^2})^{p/2} + (\|z\|^2 - \sqrt{\|z\|^4 - |z^2|^2})^{p/2} \right) \right\}^{1/p}$$

(2) より $N_1(z) = L^*(z)$ であり、(3) より $N_2(z) = \|z\|$ である。また、(1) より $N_\infty(z) = L(z)$ と自然に解釈できる。そこで次のように予想を立てる。

予想 (A) $p \geq 1$ に対して、 $N_p(z)$ は $\mathbb{C}^n$ 上のノルムである。

予想 (B) $1/p + 1/q = 1$ とすると、 $N_q(z)$ の双対ノルムは $N_p(z)$ である。
すなわち、

$$N_p(z) = \sup\{|z \cdot \zeta|; N_q(\zeta) \leq 1\}$$

注意 1 上述のように、 $p = 1, 2, \infty$ のときには、予想 (A) (B) 共に正しい。

注意 2 $n = 2$ のときは、 $z = (z_1, z_2)$ に対し、

$$N_p(z) = \left\{ \frac{1}{2} (|z_1 + iz_2|^p + |z_1 - iz_2|^p) \right\}^{1/p}$$

$$z \cdot \zeta = z_1 \zeta_1 + z_2 \zeta_2 = \frac{1}{2} ((z_1 + iz_2)(\zeta_1 - i\zeta_2) + (z_1 - iz_2)(\zeta_1 + i\zeta_2))$$

が成り立つので、予想 (A)(B) 共に正しい。

注意 3 予想 (A) は上智大学の木邨拓哉によって、2000 年 2 月に肯定的に解決された ([3])。しかし、予想 (B) は 2000 年 5 月現在未だ解決されていない。

参考文献

- [1] L.Drużkowski: Effective formula for the cross norm in the complexified unitary space, *Zeszyty Nauk Uniw. Jagiellon. Prace Mat.*, **15**(1974), 47 – 53.
- [2] K. Fujita and M. Morimoto: Holomorphic functions on the dual Lie ball, to appear in the Proceedings of the second ISAAC congress, Fukuoka, 1999
- [3] T. Kimura: Norms related to the Lie norm, (preprint) (この論文は、2000 年 2 月に上智大学に提出された修士論文の一部である。)
- [4] M. Morimoto: Analytic Functionals on the Sphere, *Translations of Mathematical Monograph*, Vol.178, American Mathematical Society, 1998, Providence, Rhode Island.