

安定写像の特異点集合の連結成分の数と 特異値の配置について

東工大・理・小杉真人
(Mabito Kobayashi)

§1. 問題の設定

滑らかな多様体が2つ与えられたとき、その間にどれだけ簡単な写像が存在するのか考えてみよう。 相対関係の難しさを除くために、^{ます}値域となる多様体が Euclid 空間であると仮定する。

たとえば、多様体 M と $\mathbb{R}$ の間にはモース関数がたくさん存在するが、もし M 上に特異点が2点しかないような「簡単」なモース関数が存在したら、実は M は球面 S^N と位相同型である。 この良く知られた例が物語るように、多様体 M のホモトピー型、位相型、 C^∞ -構造を写像を用いて調べるとき、できるだけ簡単な写像を探すことは、とても重要である。

さて、傍頭にかけた基本姿勢に沿って、ここでは次のように問題を設定しよう。 閉じた4次元単連結多様体の族 $\mathcal{M}_1$ を次のように定義する。

定義: $M^4 \in \mathcal{M}_1 \Leftrightarrow \exists f: M \rightarrow D^2 \subset \mathbb{R}^2, \text{ onto, stable,}$

s.t 1) $\forall a$, regular value に対して $f^{-1}(a)$ は
torus or sphere.

2) f の cusp point は 高々 1 点.

この多様体の族 $\mathcal{M}_1$ から平面への写像について調べること
にする. とくに 4次元多様体の族を選んだのは, M の C^∞ -構
造はよく判. っていないが, 一般ファイバー, 即ち曲面の C^∞ -
構造は解明されているからである. この族 $\mathcal{M}_1$ の「広さ」につ
いてはまだ判然としないが, 次のことが云える: S^1 , $\mathbb{C}P^1$,
 $S^2 \times S^2$, $S^2 \times S^2$ (S^2 上の non-trivial S^2 bundle), 及びこれら
の連結和は, $\mathcal{M}_1$ の元である.

問題: $M \in \mathcal{M}_1$ から D^2 への安定写像はどれだけ「簡単,
になるか.

さて次に, どのような写像を簡単と呼ぶのか, 提言しなけ
ればならない. 多様体を調べるという目的に沿って, 対
($f(M)$, $C(f)$) の位相型が簡単であることを要求したい.

定義: $f: M \rightarrow D^2$, stable が "simple"

$\Leftrightarrow$ 1) $\# \text{ cusp of } f \leq 1$

2) $f|_{S(f) \setminus \{\text{cusp}\}}: S(f) \setminus \{\text{cusp}\} \rightarrow D^2 \subset \mathbb{R}^2$
が embedding.

3) 全ての f -map fibre $f^{-1}(a)$ が連結.

このような写像に対して $(f(M), C(f))$ は ^{すなわち} 簡単であるとい
って良いだろう.

事実: $M \in \mathcal{M}_1 \Leftrightarrow \exists f: M \rightarrow D^2$, simple, かつ
regular な f -fibre は T^2 か S^2 .

簡単のために, 「 f の regular な fibre が T^2 か S^2 」のとき,
「 $g_f \leq 1$ 」と書くことにしよう. 上の事実をふまえて,
 $M \in \mathcal{M}_1$ 上の “simple” かつ $g_f \leq 1$ の写像の間で “より” 簡
単, ということを次のように考える. (simple かつ $g_f < 1$
な map は, そうでない map より簡単だと思う). すなわち
 $f, g: M \rightarrow D^2$, simple, $g_f \leq 1, g_g \leq 1$. のとき, f が g
より簡単 $\Leftrightarrow \#S(f) \leq \#S(g)$. すると問題は次のように
書き換えられる.

問題: $M \in \mathcal{M}_1, f: M \rightarrow D^2$ simple, $g_f \leq 1$
 $\#S(f)$ はどこまで減らせるか?

注意 $f: M^+ \rightarrow \mathbb{R}^2$, stable の特異値集合 $S(f)$ は,
 M に埋込まれた何本かの simple closed curves となる. 特異
点のタイプは, “fold” と “cusp” のみが見える.

§ 2. 結果 (M_0)

定理 A: $M \in \mathcal{M}_1$, $f: M \rightarrow D^2$, simple, $g_f \leq 1$.

$$\Rightarrow \# S(f) \geq \begin{cases} \frac{1}{2} b_2(M) + 3 & (b_2(M), \text{偶数, non } 0) \\ \frac{1}{2}(b_2(M) + 1) & (b_2(M), \text{奇数}) \end{cases}$$

ただし $\# S(f)$ は $S(f)$ の連結成分の数, $b_2(M)$ は M の 2 Betti 数とあらわす.

多様体 M を homeo. に変形することを許せば、さらに詳しく次のことが示せる.

定理 B: $M \in \mathcal{M}_1$, に対し $\exists N \in \mathcal{M}_1$, s.t. $N \approx M$ (homeo)

$\exists g: N \rightarrow D^2$, simple, $g_g \leq 1$ s.t.

$$(1) \quad \# S(g) \begin{cases} = 1 & (b_2(M) = 0) \\ \leq \frac{3}{2} b_2(M) + 1 & (b_2(M), \text{偶数, non } 0) \\ \leq \frac{3}{2}(b_2(M) + 1) & (b_2(M), \text{奇数}) \end{cases}$$

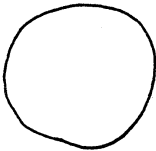
(2) g の特異値の配置は“自明”, すなわち D^2 内の T^2 -fibred な連結領域の内側に、別の T^2 -fibred な領域はない.

この 2 つの定理から、多様体 $M \in \mathcal{M}_1$ の各 homeo 類に対して、次のような特異値集合を持つ写像の存在が示される.

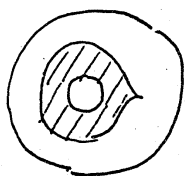
簡単は

例 $[M] \in \mathcal{M}_1 / \text{homeo}$. 上には, 次のような簡単な写像が存在する.

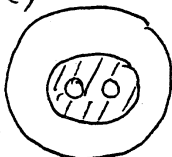
1) $b_2(M) = 0$ case,

$$\exists f: [M] \rightarrow \text{circle}$$


2) $b_2(M) = 1$ case,

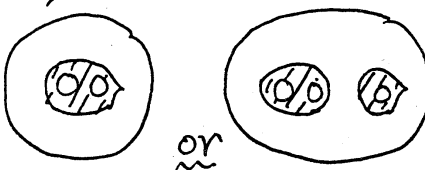
$$\exists f: [M] \rightarrow \text{circle with shaded disk}$$


3) $b_2(M) = 2$ case,

$$\exists f: [M] \rightarrow \text{circle with two shaded disks}$$


*斜線部は, Σ の上の fibre $f^{-1}(a)$ が Torus となる領域.
残りの一般 fibre は S^2 .

4) $b_2(M) = 3$ case,

$$\exists f: [M] \rightarrow \text{circle with two shaded disks} \text{ or } \text{circle with three shaded disks}$$


5) -----

注意1: 定理 A, B の等号を成立させる多様体と写像が存在する.

注意2: 多様体 M が $M = M' \# S^1 \times S^2$, $M' \in \mathcal{M}_1$ と分解できるなら, M の diffeo. 型を保, たまたま定理 B (より強めたもの) が示せる.

以下の § で 証明の概略を述べる.

§3 写像の改変. ([Ma])

写像を取りかえる、いくつかの具体的な方法を説明しよう.

I. 写像の連結和 $f \# g$

$f: M \rightarrow D^2$, $g: N \rightarrow D^2$, いずれも stable, onto とする. このとき ∂D^2 は definite な fold points $(u, x, y, z) \mapsto (u, x^2 + y^2 + z^2)$ の像にほゞ 2 いる. f の像となる $D^2 \in D_1$, g のえき $D^2 \in D_2$ と区別して書くことにしよう. 図 2.1 のように ∂D_i の山さな弧と、その両端を結ぶ弦とで囲まれる D_i 内の領域 E_i を取ると Levine, ([R²]) の議論から、 $f^{-1}(E_1)$, $g^{-1}(E_2)$ は 4次元円板 D^4 と diffeo. になる. そこで M, N から $f^{-1}(E_1)$, $g^{-1}(E_2)$ をとり除いて連結和を取れば、写像

$$f \# g: M \# N \rightarrow D_1 \cup D_2 = D^2$$

が定義できる. $f \# g$ も stable である.

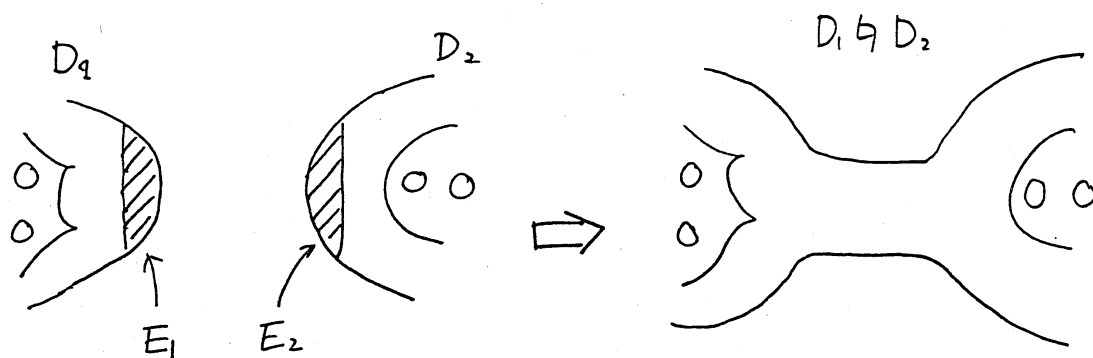


図 2.1.

次の記号を用意しておく.

記号: $f: M \rightarrow D^2$, $f_i: M_i \rightarrow D^2$, all stable.

$$(M, f) = (M_1, f_1) \natural (M_2, f_2)$$

$$\Leftrightarrow 1) M \cong M_1 \# M_2 \text{ (diffeo)}$$

$$2) f \text{ と } f_1 \# f_2 \text{ が } A\text{-同値 (} M \subset D^2 \text{ の diffeos で移りあう)}$$

II. $f: M \rightarrow D^2$ から $\tilde{f}: M \# S^2 \times S^2 \rightarrow S^2$ をつくる.

$f: M \rightarrow D^2$ が stable のとき, 先に述べたように $\exists C \subset S(f)$, $\partial D^2 = f(C)$, である. ∂D の小さなカウ-近傍 $\tau(\partial D)$ を取ると $f^{-1}(\tau(\partial D))$ は C の tubular nbhd. となる. これを $\nu(C)$ とかく.

このとき $\overline{M \setminus \nu(C)}$ と $S^2 \times D^2$ を貼り合わせで得られた多様体を $\tilde{M}$ と書こう. 今, M が単連結と仮定すれば, Wall ([W]) の議論によ, $\tilde{M} = M \# S^2 \times S^2$ or $M \# S^2 \tilde{\times} S^2$ となる. いま, ある貼り合わせで $\tilde{M}$ が後者になったとしよう.

$\nu(C) \cong \overset{h}{D^3} \times S^1$ の diffeo^h の類は $\pi_1 SO(3) = \mathbb{Z}_2$ に応じて 2 つあるので, non-Trivial な元に対応する diffeo. を 1 つ取って, それと先の貼り合わせを合成する. この合成写像で貼り直すと, 今度は $\tilde{M} = M \# S^2 \times S^2$ となる. そこで, $\tilde{M}$ が $M \# S^2 \times S^2$ となるように貼り合わせることにする.

さて, 多様体の改変に応じて写像 $f|: \overline{M \setminus \nu(C)} \rightarrow \overline{D \setminus \tau(\partial D)}$

と $\text{proj}: S^2 \times D^2 \rightarrow D^2$ も貼り合わせることでできると.

$$\hat{f}: M \# S^2 \times S^2 \rightarrow S^2 (= D^2 \cup D^2)$$

が定義される.

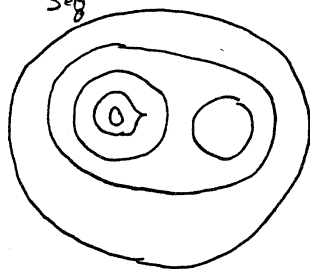
III S-operation

定義 $f: M \rightarrow D^2$, $g: N \rightarrow D^2$, stable, $\pi_1(M) = \pi_1(N) = 1$.

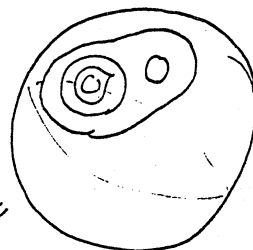
(M, f) と (N, g) が S-equivalent $\Leftrightarrow$ 1) $M \# S^2 \times S^2$ と $N \# S^2 \times S^2$ が diffeo. 2) $\hat{f}$ と $\hat{g}$ が A-同値.

例, $(M, f) \sim_{S\text{-eq}} (N, g)$

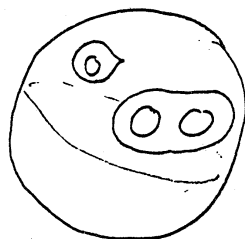
$f: M \rightarrow$



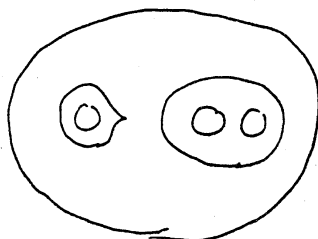
$\hat{f}: \hat{M} \rightarrow$



$g: N \rightarrow$



$g: N \rightarrow$



定義: (S-operation) 多様体と写像の組 (M, f) に

S-operation を施す $\Leftrightarrow$

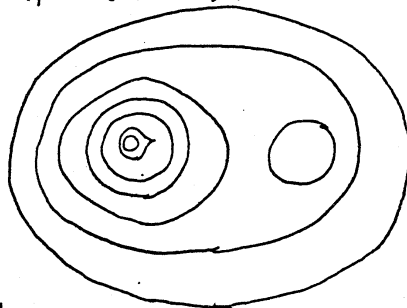
$$(M, f) = (M_1, f_1) \natural (M_2, f_2) \natural \cdots \natural (M_k, f_k)$$

と分解して, ある (M_i, f_i) を S-equivalent な (N_i, f_i) で置き換える.

この操作の効果を示そう.

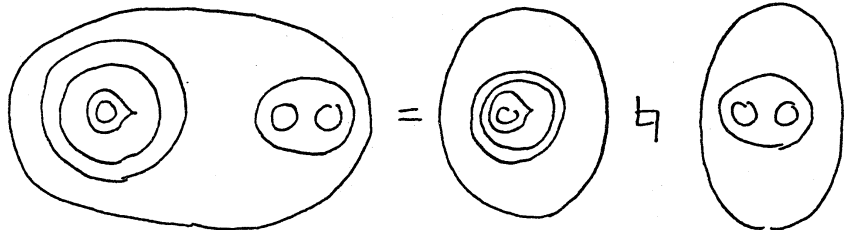
例

$$f: M \rightarrow$$



S-equivalent

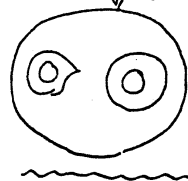
$$g: N \rightarrow$$



$$(g, N) = (g_1, N_1) \natural (g_2, N_2)$$

S-eg.

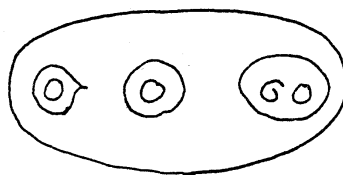
$$h_1: L_1 \rightarrow$$



$$(M, f) \sim_{S-op} (L_1, h_1) \natural (g_2, N_2)$$

s.t.

$$h_1 \# g_2: L_1 \# N_2 \longrightarrow$$



ここで $\pi_1(M), \pi_1(N) = 1$ ならば, $M \# S^1 \times S^1 \cong N \# S^1 \times S^1$ のとき $M \cong N$ となることに注意すれば;

S-operation の効果: 多様体の homeo type を保ち、特異値の配置を “自明” にする.

IX C-operation.

補題 (Teragaito, ^{Levine,} $\pi_1(M^4) = 1, \exists f: M \rightarrow D^2$ stable,

$$q_f \leq 1, \text{ s.t. } (f(M), C(f)) = \text{Diagram}$$

$$\Rightarrow M \cong S^4$$

と S^4 上には, $(f(M), C(f)) = (D^2, \partial D^2)$ となるような simple map が存在する. そこで S^4 上で写像を取り換えれば, この 2 本の特異点のなる曲線が除去される.

定義: (C-operation) 多様体 $M \in \mathcal{M}_1$ と ^{安定} 写像の組 (M, f) で次を満たすものを考える.

$$(M, f) = (M_1, f_1) \sqcup (M_2, f_2), \quad f_2: M_2 \rightarrow \text{Diagram}, \quad q_{f_2} \leq 1$$

このとき (M, f) に C-operation を施す

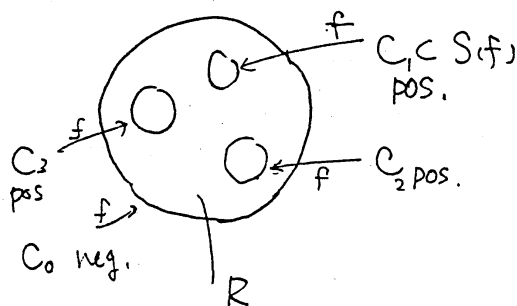
$$\Leftrightarrow (M, f) \in (M_1, f_1) \text{ に取りかえる.}$$

C-operation の効果: 多様体の diffeo. type を保ち, 2 対の fold curves を cancel する.

§4. 証明の輪郭

あと 1, 2 の準備をすれば証明は, (いくともその輪郭は) 簡単にできる. 面倒なので, 以下 $b_2(M) = \text{even}$ とする.

R を正則値 $f(M) \setminus C(f)$ の連結成分で, その上の fibre がトーラスになり, 2 いるものとする. R の外側の境界に対応する曲線 $C \subset S(f)$ を negative curve, 内側のものを positive curve と呼ぼう. R は必ず穴を持つことが示される.



$S(f)$ の各成分は, $\partial f(M)$ に対応する 1 つを除いて全 2, positive か negative になり, 2 いる. この $S(f)$ の “向き付け” に対し 2 次の Levine の式が成立する.

$$b_2(M) = 2 (N_+ (\# \text{ of all positive curves}) - N_- (\# \text{ of neg. curves}))$$

定理 A の証明. ($b_2(M) = 4$ のとき)

$$N_+ - N_- = 2, \quad S(f) = N_+ + N_- + 1 \quad \text{だから}$$

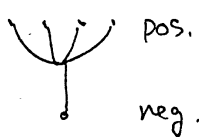
$S(f) = 2N_- + 3$ となる. ここで N_- の最小値を求めれば良いが, $N_- = 0$ だと, 前述の領域 R は存在しないことになる. (したが, $2S(f)$ は $\partial f(M)$ に対応する 1 本だけとなり, 矛盾を生ずる. よって $\min N_- = 1$ となり,

$$S(f) \geq 2 + 3 = 5.$$

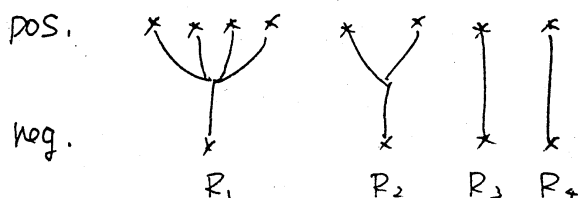
($f=$) を満たす M と f は具体的に作れる) $\square$

定理 B の証明 ($b_2(M) = 4$ のとき)

まず勝手に $f: M \rightarrow D^2$, simple, $g_f \leq 1$ を取, てくる.
 (M, f) に S-operation を施して特異値の配置が「自明」な組 (N, h) を作る. $N \approx M$ と $\#S(f) = \#S(h)$ に注意しておく.

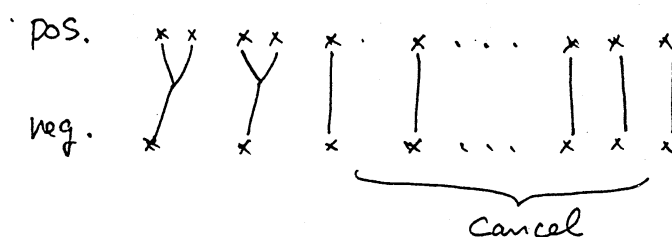
「トースターパイパー」の領域 R は, 1 つの negative curve に対し 2 複数の pos. curve, を対応させているが, これを模式的に  と表しえう. 全ての pos. $\times$ は neg. curves の

間の対応関係を同じように表しえう.



さて、上図の R_3, R_4 に対応する部分は、C-operation が適要であることを示している。従って (N, c) に C-oper. を施してこの4つの $S(f)$ の成分は除去できる。

$N_+ - N_- = 2$ を用いて、Cancel 出来る $S(f)$ の成分が最小となる組合わせを調べると、



従って、どんなに「まじり」組合わせでも、 $\# S(f)$ は $4 + 2 + 1 = 7$ 以下には減らせる。(最後の $+1$ は $\partial f(M)$ の分)
この「 $=$ 」を成立させる M と f が具体的に作れる。□

§5. 明らかになつた問題

問題1 定理Bで求められた簡単な写像から $M \in \mathcal{M}_1$ の位相型を求めよ。

問題2 $C(f)$ の配置は M の C 構造と本質的に関係するか。

たとえば、 $M \xrightarrow{f} \text{diagram 1} \xrightarrow{\sim} N \xrightarrow{g} \text{diagram 2}$ $N \approx M$.
 (Note: The diagrams are circles with internal structures. The first diagram has a central circle with a dot, surrounded by a ring with a dot. The second diagram has two concentric circles, each with a dot. The arrow between them is labeled with a symbol that looks like a lambda or a similar character.)

であるが、 $M \cong N$ が云えるか？

参考文献

- [Ma] Mahito, K, Simplifying mappings from certain simply connected 4-manifolds into the plane, (preprint)
- [R¹] H. Levine, Mappings of manifolds into the plane Amer. J. Math. 88 (1966), 357-365.
- [W] C.T.C. Wall, Diffeomorphisms of 4-manifolds, Journal. London Math. Soc. 39 (1964) 131-140.
- M. Teragaito, Fibred $\bar{2}$ -knots and lens spaces, Osaka J. Math. 26 (1989), 57-63, 953.