

問題解決の多様性 ～ランダムウォークの問題を事例として～

奈良教育大学・数学教室 河上哲 (Satoshi Kawakami)

Department of Mathematics

Nara University of Education

大阪府立大学大学院・理学系研究科 釣井達也 (Tatsuya Tsurii)

School of Science

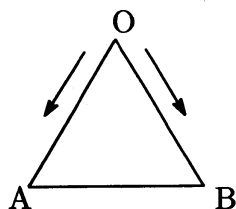
Osaka Prefecture University

1. はじめに

大学受験を前提とする高校での数学では、ひとつの問題に対してひとつの正解があれば良いという風潮がある。数学の教師を志望する教員養成の多くの学生達にも、これらの傾向が垣間見えるのは誠に残念である。本来の数学のもつ自由さや楽しさや美しさをほんの少しでも体感してから大学を卒業して欲しいという淡い願いと希望を抱いて、本稿では、「数学の問題の解決の多様性」について、ランダムウォークの問題を事例にとり、考察を進める。ひとつの問題に対し、色々な解法が存在することを知り、それぞれの解法の特徴、例えば、その解法の特異性、普遍性、意外性、美しさなどの観点から分析してみる経験を積み重ねておくことが、自分で教材を開発する上で重要である。

2. ランダムウォークの問題の解法

正三角形の辺上の対称ランダムウォーク。1 辺の長さが 1 である正三角形の 1 つの頂点を原点 O とする。原点を出発点として、正三角形の辺上を、頂点から頂点へ移動することを考える。右に移動する確率と左に移動する確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$ とする。



ランダムウォークの問題。上記の状況において、 n -ステップ後に、原点 O にいる確率 p_n を求めよ。

この問題に対する解法について考察する. n -ステップ後に頂点 A または頂点 B にいる確率 (頂点 O から距離 1 にいる確率) を q_n とする. ランダムウォークの動きは,

$$p_n = \frac{1}{2}q_{n-1} \cdots (1)$$

$$q_n = p_{n-1} + \frac{1}{2}q_{n-1} \cdots (2)$$

と記述できる. また,

$$p_n + q_n = 1 \cdots (3)$$

の関係がいつでも成立している.

解法その 1. 数列 $\{p_n\}$ に関する 2 項間漸化式に帰着させる.

関係式 (1) と (3) より,

$$p_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - p_n)$$

を得る. この漸化式を解くことで,

$$p_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

を得る.

解法その 2. 数列 $\{p_n\}$ に関する 3 項間漸化式に帰着させる.

関係式 (1) と (2) から q_n を消去すると, $\{p_n\}$ に関する 3 項間漸化式

$$2p_{n+2} - p_{n+1} - p_n = 0$$

を得る. この漸化式を解くことで, $p_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ を得る.

解法その 3. 行列の n 乗を求める問題に帰着させる.

関係式 (1) と (2) より,

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{n-1} \\ q_{n-1} \end{pmatrix}$$

を得る. $\mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ とおくと, $\mathbf{x}_n = A\mathbf{x}_{n-1}$. 従って,

$$\mathbf{x}_n = A^n \mathbf{x}_0$$

を得る. 行列 A の対角化を実行することで,

$$A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + 2(-\frac{1}{2})^n & 1 - (-\frac{1}{2})^n \\ 2 - (-\frac{1}{2})^n & 2 + (-\frac{1}{2})^n \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ であることから,}$$

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = A^n \mathbf{x}_0 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + 2(-\frac{1}{2})^n & 1 - (-\frac{1}{2})^n \\ 2 - (-\frac{1}{2})^n & 2 + (-\frac{1}{2})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(-\frac{1}{2})^n \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{3}(-\frac{1}{2})^n \end{pmatrix}.$$

従って, $p_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(-\frac{1}{2})^n$ を得る.

解法その 4. ハイパー群の発想を導入した解法.

正三角形の边上, 距離 0 動く (動かない) 動きを c_0 , 距離 1 動く動きを c_1 と表す. このとき, 正三角形の边上の動きの集合を K とすると, $K = \{c_0, c_1\}$ である. ここで, ランダムウォークの動きを考える. 距離 1 動いてさらに距離 1 動くとき, 結果として, 原点にいる確率が $\frac{1}{2}$ で, 原点から距離 1 離れたところにいる確率が $\frac{1}{2}$ なので, それを

$$c_1^2 = \frac{1}{2}c_0 + \frac{1}{2}c_1$$

と表す. このとき,

$$c_1^n = p_n c_0 + q_n c_1$$

で, p_n は, n -ステップ後に原点にいる確率となっている. ここで, $c_0 = 1$, $c_1 = x$, $c_1^2 = x^2$ とおくと,

$$x^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x$$

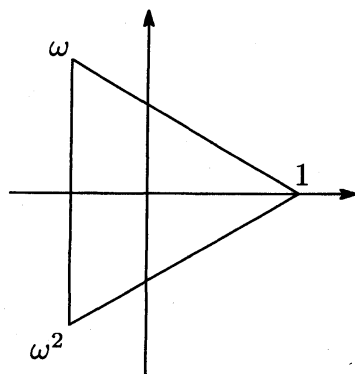
となる. この解 x は, $x = 1$, $x = -\frac{1}{2}$ である. $x^n = p_n + q_n x$ が成り立つので,

$$\begin{aligned} 1 &= p_n + q_n \\ \left(-\frac{1}{2}\right)^n &= p_n + q_n \left(-\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

を得る. q_n を消去することで, $p_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(-\frac{1}{2})^n$ を得る.

解法その 5. ケーリー・グラフの発想を導入した解法.

$C_3 = \{z \in \mathbb{C}; z^3 = 1\} = \{1, \omega, \omega^2\}$ ($\omega = e^{\frac{2}{3}\pi i}$) は位数 3 の巡回群である. $\Sigma = \{\omega, \omega^2\}$ にとると, 正三角形は (C_3, Σ) から決まるケーリー・グラフとなっている.



このとき, C_3 上の関数 $f(z)$ は, $z^3 = 1$ により, 一般に

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2$$

と表される. $f(z) = \left(\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z}\right)\right)^n$ にとるとき,

$$\left(\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z}\right)\right)^n = p_n + q_n z + r_n z^2$$

とおく. ここで, $z = 1, \omega, \omega^2$ を代入して, 和をとると,

$$1 + \omega + \omega^2 = 0$$

より,

$$\begin{aligned} 3p_n &= 1 + \left(\cos \frac{2}{3}\pi\right)^n + \left(\cos \frac{4}{3}\pi\right)^n \\ &= 1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

なので, $p_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ を得る. ここで, $z = \omega$ のとき, $c_1 = \frac{1}{2}(\omega + \omega^2)$ となり,

$$c_1^n = p_n + q_n \omega + r_n \omega^2$$

なので, p_n は, n -ステップ後に原点 $z = 1$ にいる確率である.

3. 考察

問題の解法を実行した後に, その解法において何が本質的であったのか, また, その数学的な背景に何があったのかを反省しておくことが, 次の発展に繋がるという点からも重要である.

- (1) ランダムウォークという動きをどのように数学的に表現したのか.

(2) 解法その 2 で必要となる特性方程式と解法その 3 で必要となる行列 A の固有方程式と解法その 4 で用いたハイパー群の指標の計算において, 全く同じ 2 次方程式

$$x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$$

が出現する. その数学的背景について考察してみる.

(3) 正五角形の辺上のランダムウォークの問題の解法としては, どの解法がより適切であるのか. また, 正 m 角形の辺上のランダムウォークの解はどうなっているのか. このケースの n -ステップ後に原点にいる確率 p_n は,

$$p_n = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \left(\cos \frac{2k\pi}{m} \right)^n$$

であることが, 解法その 5 と同様の考えで容易に求まる.

(4) 解法その 4 と解法その 5 の数学的背景に, 可換ハイパー群や有限アーベル群の上の関数のフーリエ変換という調和解析の分野の数学が潜んでいる.