

Isoparametric Finite Elements による

境界の近似と内部での関数の近似について

東大 生研 田 端 正 久

§ 1. 序

楕円型境界値問題を有限要素法を用いて解く事を考える。

Ω を平面上の有界領域として次の 2 階の Dirichlet 問題について話をしよう。

$$(1.1) \quad \begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

Ω を適当に三角形分割し各要素上で linear な近似で (1.1) を解く事により Γ が滑らかな時は $O(h)$ の近似解を得る事ができる。但し h は regular な三角形分割に対応した幾何的な parameter である。又、 Γ が有限個の角を持っていても各角に対応する singularity function を basis に加える事により $O(h)$ の近似を維持する事ができる。[1]

次にもっと良い近似解を得ようとするなら三角形上で 2 次なり 3 次なりの多項式を使う事が考えられるが Γ が多角形で

ない限り三角形分割では、 $\text{dist}(\Gamma, \Gamma_h) = O(h^2)$ を改良する事はできない。但し Γ_h は三角形分割して作った領域の境界を表わす。そこで isoparametric finite element を用いて境界のより良い近似を得るのであるが、この時内部での関数の近似の精度と境界の近似の精度との関係を考えてみよう。

§ 2. Isoparametric finite element

$\hat{\Omega} \in \mathbb{R}^2$ の bounded open set とする時 $\hat{u}(x) \in W_p^m(\hat{\Omega})$ とは

$$\|\hat{u}\|_{m,p,\hat{\Omega}} = \left\{ \sum_{l=0}^m \int_{\hat{\Omega}} \|D^l \hat{u}(x)\|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty \quad (1 \leq p < +\infty)$$

なる時を言う。但し $\|D^l \hat{u}(x)\|$ は $D^l \hat{u}(x) \in \mathcal{L}[(\mathbb{R}^2)^l; \mathbb{R}]$ とした時の作用素ノルムである。

$$|\hat{u}|_{l,p,\hat{\Omega}} = \left\{ \int_{\hat{\Omega}} \|D^l \hat{u}(x)\|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\|\hat{u}\|_{m,\infty,\hat{\Omega}} = \max_{0 \leq l \leq m} \|D^l \hat{u}\|_{\hat{\Omega}}, \quad \|D^l \hat{u}\|_{\hat{\Omega}} = \sup_{\hat{\Omega}} \|D^l \hat{u}(x)\|$$

$\hat{P}(K)$: K 次までの多項式の全体。

$\hat{\Sigma} = \{\hat{a}_i\}_{i=1}^N$ は平面上の相異なる N 個の点からなる集合でその閉包 $\hat{K}$ は $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3$ を頂点とする三角形になっているとする。又、 $\hat{P} \in \hat{K}$ 上で定義された実数値をとる関数からなる有限次元空間 ($\dim \hat{P} = N$) とする。この時

Def. 2.1

Σ が $\hat{P}$ -unisolvent set であるとは

$\{a_i\}_{i=1}^N$ なる任意の実数値の組に対して $\hat{q} \in \hat{P}$ が一意的に存在して $\hat{q}(\hat{a}_i) = a_i \quad (i=1, \dots, N)$ なる時を言う。

$\Sigma = \{a_i\}_{i=1}^N$ が平面上の N 個の点とある時 Σ が $\hat{P}$ -unisolvent set ということより $F(\Sigma) \in \underbrace{\hat{P} \times \dots \times \hat{P}}_N$ が一意的に存在して $F(\hat{a}_i) = a_i \quad (i=1, \dots, N)$ をみたす。 $\hat{K}$ の F による像を K で表わす。 $K = F(\hat{K})$

$\tilde{K}$ を a_1, a_2, a_3 からなる三角形とし $\hat{K}$ を $\tilde{K}$ に写像する linear mapping を $\tilde{F}$ で表わす。この時、 $\hat{K}$ を固定して考えて

Def. 2.2

族 (K_n) が regular であるとは

r_n を $\tilde{K}_n$ の直径, ρ_n を $\tilde{K}_n$ の内接円の直径とした時に n に無関係に $\alpha_0 > 0$ が存在して $\alpha_0 < \frac{\rho_n}{r_n}$ なる時をいう。

$k+1 - \frac{2}{p} > 0$ の時次の interpolation を考える。

$$\hat{\pi} : W_p^{k+1}(\hat{K}) \longrightarrow \hat{P}$$

$$\hat{u}(\hat{x}) \longmapsto \hat{\pi} \hat{u} \quad \text{s.t.} \quad (\hat{\pi} \hat{u})(\hat{a}_i) = \hat{u}(\hat{a}_i) \quad (i=1, \dots, N)$$

この様で $\hat{\pi}$ は Σ が $\hat{P}$ -unisolvent set なるので一意的に存在する。又

$$F : \hat{K} \longrightarrow K \quad \text{が } C^{k+1} \text{-diffeomorphism である}$$

$P(x) = \{ q(x) = \hat{q}(F^{-1}(x)) : \hat{q} \in \hat{P} \}$ として次の interpolation を考える。

$$\pi : W_p^{k+1}(K) \longrightarrow P$$

$$u \mapsto \pi u \quad \text{s.t.} \quad (\pi u)(F(x)) = \bigwedge \{ u(F(x)) \}$$

この時次の定理が得られる。[2]

Theorem 2.1 [P.G. Ciarlet and P.A. Raviart]

- (i) $\hat{\Sigma}$ は $\hat{P}$ -unisolvant set
- (ii) 族 (K_h) は regular
- (iii) $\hat{P}(K) \subset \hat{P} \subset C^{k+1}(\hat{K})$
- (iv) $\|D(F-\tilde{F})\|_K \leq \frac{C_0}{h} h$ $\Rightarrow$ $\hat{h}$: diameter of $\hat{K}$
- (v) $\|D^l(F-\tilde{F})\|_K \leq C_l h^l \quad 2 \leq l \leq k+1, \quad C_l > 0$

上の条件がみえられる時

$0 \leq m \leq k+1, \quad 1 \leq p \leq +\infty$ に対し u, K に indep πu .

存在して $0 < k+1 - \frac{2}{p}$ if $1 \leq p < +\infty$ かつ

$$\|u - \pi u\|_{m,p,K} \leq C h^{k+1-m} \sum_{l=1}^{k+1} \|u\|_{l,p,K} \quad \text{for } \forall u \in W_p^{k+1}(K)$$

が成立する。

Example 2.1

$$\hat{\Sigma} = \{ \hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3, \hat{a}_{12}, \hat{a}_{13}, \hat{a}_{23} \}$$

$$\hat{P} = \{ \hat{p}_i(x), \hat{p}_{ij}(x) \}$$

$$\hat{p}_i(x) = \lambda_i(2\lambda_i - 1), \quad \hat{p}_{ij}(x) = 4\lambda_i\lambda_j$$

但し $\{\lambda_i\}_{i=1,2,3}$ は重心座標

この時 $\|a_{ij} - \tilde{a}_{ij}\| = O(h^2)$ を満足せば

$k=2$ として Thm 2.1 の条件をすべて

みえらる。先の条件は境界が滑らかである

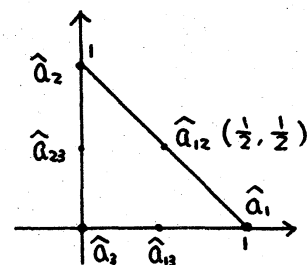


図 2.1

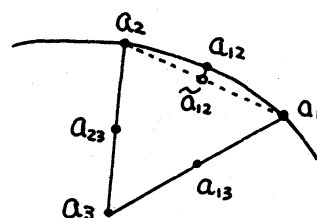


図 2.2

$a_{12} \in a_{12} \tilde{a}_{12} \perp a_1 a_2$ になる様にとつてあるは満足される。

Example 2.2

$$\hat{\Sigma} = \{ \hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3, \hat{a}_{112}, \hat{a}_{221}, \hat{a}_{113}, \hat{a}_{331}, \hat{a}_{223}, \hat{a}_{332}, \hat{a}_{123} \}$$

$$\hat{P}_i = \lambda_i (3\lambda_i - 1)(3\lambda_i - 2)/2$$

$$\hat{P}_{ij} = 9\lambda_i \lambda_j (3\lambda_i - 1)/2$$

$$\hat{P}_{ijk} = 27\lambda_i \lambda_j \lambda_k$$

Thm 2.1 ($k=3$) の条件を調べると

$$\| a_{112} - \tilde{a}_{112} \| = O(h^2)$$

$$\| a_{221} - \tilde{a}_{221} \| = O(h^2)$$

$$\| (a_{112} - \tilde{a}_{112}) - 2(a_{221} - \tilde{a}_{221}) \| = O(h^2)$$

$$\| (a_{221} - \tilde{a}_{221}) - 2(a_{123} - \tilde{a}_{123}) \| = O(h^3)$$

となる。最後の二条件は

$$\| (a_{112} - \tilde{a}_{112}) - (a_{221} - \tilde{a}_{221}) \| = O(h^3)$$

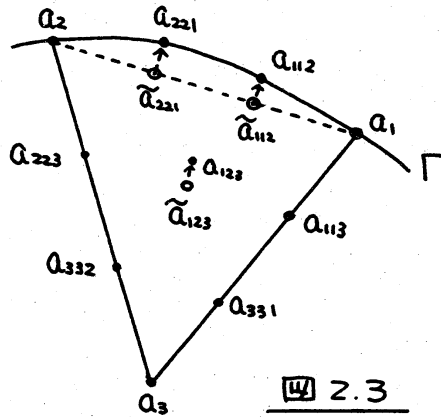
$$\| (a_{123} - \tilde{a}_{123}) - \frac{1}{4} \{ (a_{112} - \tilde{a}_{112}) + (a_{221} - \tilde{a}_{221}) \} \| = O(h^3)$$

と同等であるので境界 Γ が滑らかなとき $a_{112} \tilde{a}_{112} \perp a_1 a_2$ になる

様に Γ 上に a_{112} (a_{221} と同様) をとり更に a_{23} を

$$a_{123} = \tilde{a}_{123} + \frac{1}{4} \{ (a_{112} - \tilde{a}_{112}) + (a_{221} - \tilde{a}_{221}) \}$$

にとればよい。



§3. 境界の近似との関係

Thm 2.1 で $\hat{P}$ として完全 k 次式を用いた場合を考えてみると

$\Omega_h = \cup K_h$ として

$$\|u - \pi u\|_{m,p,\Omega_h} = O(h^{k+1-m})$$

となっており。一方、境界の近似はこの時

$$\text{dist}(\Gamma, \Gamma_h) = O(h^{k+1})$$

であるので境界条件からの情報が使えない m については

$\|u - \pi u\|_{m,p,\Omega-\Omega_h}$ の評価は $\text{dist}(\Gamma, \Gamma_h)$ を使って

$$\|u - \pi u\|_{m,p,\Omega-\Omega_h} = O(h^{\frac{k+1}{p}})$$

になる。したがって $k+1-m > \frac{k+1}{p}$ なる場合には境界の近似をもっとよくする必要がある。(1,1)の例について考えよう。

lemma 3.1

$$\hat{\Sigma} = \{\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3, \hat{a}_{12}, \hat{a}_{13}, \hat{a}_{23}, \hat{b}\}$$

$$\hat{P} = \{\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3, \hat{p}_{12}, \hat{p}_{13}, \hat{p}_{23}, \hat{q}\}$$

$$\hat{p}_1 = 2\hat{x}^2 - \hat{x}, \quad \hat{p}_2 = 2\hat{y}^2 - \hat{y}$$

$$\hat{p}_3 = 2(\hat{x} + \hat{y})^2 - 3(\hat{x} + \hat{y}) + 1, \quad \hat{p}_{12} = 4\hat{x}\hat{y}$$

$$\hat{p}_{13} = -4\hat{x}^2 - 4\hat{x}\hat{y} + 4\hat{x}, \quad \hat{p}_{23} = -4\hat{y}^2 - 4\hat{x}\hat{y} + 4\hat{y}$$

$$\hat{q} = -\frac{32}{3}\hat{x}\hat{y}(\hat{x} - \hat{y})$$

とすると $\hat{\Sigma}$ は $\hat{P}$ -unisolvent set であり regular な族 (K_h) が

$$\|a_{ij} - \tilde{a}_{ij}\| = O(h^2) \quad 1 \leq i < j \leq 3$$

$$\|(b - \tilde{b}) - \frac{3}{4}(a_{12} - \tilde{a}_{12})\| = O(h^3)$$

を満たしているなら $k=2$ として Thm 2.1 の条件は成立する。

(証明)

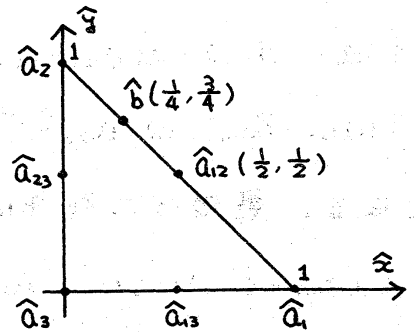


図 3.1

$$\tilde{F} = a_1 \hat{x} + a_2 \hat{y} + a_3 (1 - \hat{x} - \hat{y})$$

$$F = \tilde{F} + (a_{12} - \tilde{a}_{12}) \hat{P}_{12} + (a_{13} - \tilde{a}_{13}) \hat{P}_{13} + (a_{23} - \tilde{a}_{23}) \hat{P}_{23} \\ + \left\{ (b - \tilde{b}) - \frac{3}{4} (a_{12} - \tilde{a}_{12}) \right\} \hat{q}_b$$

より明らか。 ■

lemma 3.1 を用いて $(1, 1)$ の近似解が W_2^1 -norm で $O(h^2)$ の収束が得られる事を示そう。

領域 Ω を三角形分割する。

境界 Γ を含む三角形要素に

ついては (図 3.3)

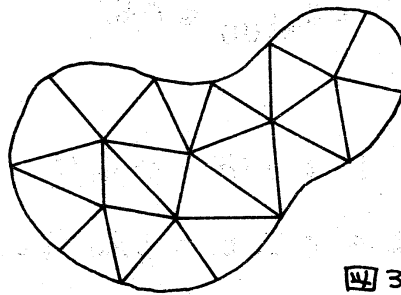


図 3.2

a_1, a_2, a_3 : "頂点"

a_{13} : 辺 $a_1 a_3$ の中点

a_{23} : 辺 $a_2 a_3$ の中点

$\tilde{a}_{12}$: 辺 $a_1 a_2$ の中点

a_{12} : $\tilde{a}_{12}$ で $a_1 a_2$ にたてた垂線と Γ との交点

$\tilde{b}$: $\tilde{a}_{12} a_2$ の中点

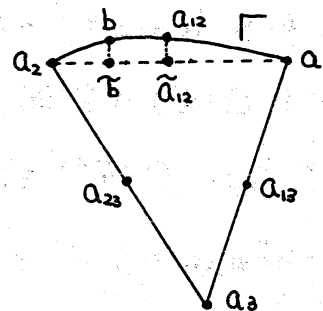


図 3.3

b : $\tilde{b}$ で $a_1 a_2$ にたてた垂線と Γ との交点

として lemma 3.1 の F により K を作る。この様にして作った境界要素の全体 E_T とする。

それ以外の三角形要素については Example 2.1 に従って K を作る。この時 $F = \tilde{F}$ で K は分割の時と不変。この内部要素の

全体を J_2 とする。

$\square$ を上記の要素分割を用いて得た有限要素法の解とする。

この時

Theorem 3.1

Γ が C^3 に属し (1.1) の解 u が $W_2^3(\Omega)$ に属しているとき、次式が成立する。

$$\| \square - u \|_{W_2^1(\Omega)} \leq C h^2 \quad C: \text{indep of } h$$

(証明)

lemma 3.1 より明らかに J_1, J_2 の境界上では vanish しているので J_1 上の base function と、 J_2 上の base function 全体の linear combination は Ω_h 上の許容関数になる。又、 b, a_2 のとり方から lemma 3.1 の条件はすべて成立するので J_1, J_2 上でそれぞれ $O(h^2)$ の評価を得る。 Γ が C^3 に属している事より $\text{dist}(\Gamma, \Gamma_h) = O(h^4)$ を得るがこれを用いて

$$\| \square - u \|_{W_2^1(\Omega - \Omega_h)} \leq C \| u \|_{W_2^3} h^2 \quad \text{を示す事ができる。} \quad \blacksquare$$

Remark

b を用いずに境界要素でも Example 2.1 と同じにすると、

$\text{dist}(\Gamma, \Gamma_h) = O(h^3)$ で、 $\| \square - u \|_{W_2^1(\Omega - \Omega_h)} = O(h^{\frac{3}{2}})$ を得るのみである。しかし、 L^2 の評価では境界で vanish する事を用いて $\| \square - u \|_{L^2(\Omega - \Omega_h)} = O(h^3)$ を得る事ができる。

Reference

[1] M. Tabata, M. Yamaguchi

"Approximate solution of the 2nd order elliptic differential equation in a domain with piecewise smooth boundary by the finite element method using singularity functions" Proceeding of the Japan National Congress for Applied Mechanics 1972 (22) (to appear)

[2] P. G. Ciarlet, P. A. Raviart

"Interpolation Theory over Curved Elements, with Applications to Finite Element Methods" Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 1 (1972) p217~249

[3] P. G. Ciarlet, P. A. Raviart

"The combined effect of curved boundaries and numerical integration in isoparametric finite element methods" The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations. Edited by A. K. Aziz. Symposium at Univ. of Maryland 1972.