

孤立特異点をもつ超曲面の
有限鏡映群による商空間

東大 理 大学院 川崎 徹郎

一般にある超平面を不動にする線型変換を鏡映という。
 $G \subset U(n+1)$ を鏡映から生成される有限部分群とする。その時、
 G -不変な多項式のつくる環は $(n+1)$ -変数の多項式環と同型
で、生成元として齊次多項式がとれる。 $\sigma_1, \dots, \sigma_{n+1}$ を代数的
に独立な生成元とすると写像

$$\mathbb{C}_z^{n+1} / G \xrightarrow{(\sigma_1, \dots, \sigma_{n+1})} \mathbb{C}_w^{n+1}$$

は解析空間としての同型を与える。

今、原点に孤立特異点をもつ G -不変な多項式 f を考えよう。
すると f は $\mathbb{C}_w^{n+1}$ 上の多項式 f' で分解される。

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}_z^{n+1} & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \\ \pi \downarrow & & \nearrow f' \\ \mathbb{C}_z^{n+1} / G \cong \mathbb{C}_w^{n+1} & & \end{array}$$

df は原点でのみ 0 になるから, df' もそ ~~も~~ である。 f' の定義する孤立特異点と f の定義する孤立特異点の関係を調べよう。

1. 回転可能構造と Seifert 形式

定義. 閉多様体 M^n の回転可能構造とは

- 1) M の分解 $M = E \cup_{\partial E = \partial N} N$.
- 2) E の S' 上の繊維束としての構造 $\varphi: E \rightarrow S'$
(この繊維 F を回転可能構造の生成元という。)
- 3) N の積への分解 $N \cong X \times D^2$. 但し X は $(n-2)$ -次元の閉多様体, D^2 は 2 次元円板。(X を回転可能構造の軸という。)
- 4) 次の図式は可換である。

$$\begin{array}{ccc}
 E \cap \partial E = \partial N \cong X \times S' & & \\
 \searrow \varphi & & \swarrow \text{射影} \\
 & S' &
 \end{array}$$

で定義される構造

一般に原点に孤立特異点をもつ多項式 f がある。

$$\begin{cases} S_\varepsilon^{2n+1} = \overline{S_\varepsilon^{2n+1} - \bar{f}'(D_\delta)} \cup S_\varepsilon^{2n+1} \cap \bar{f}'(D_\delta) \\ \arg f : \overline{S_\varepsilon^{2n+1} - \bar{f}'(D_\delta)} \longrightarrow S' \end{cases}$$

$$(0 < \delta \ll \varepsilon \ll 1)$$

は S^{2n+1} 上の回転可能構造を与える。これと f の定める回転可能構造という。(ε, δ のとり方に依らない。)

繊維空間 $S_\varepsilon^{2n+1} - \bar{f}'(D_\delta) \longrightarrow S'$ は Milnor 繊維空間と同型であることを示そう。回転可能構造とは Milnor 繊維空間の定める構造を微分位相的に一般化、厳密化したものである。

$S^{2n+1} = E \bigcup_{\partial E = \partial N} N$, $\varphi: E \longrightarrow S'$ と S^{2n+1} 上の回転可能構造とする。さらにその生成元 F は S^n の花束と同じホモトピー型をもつとする。繊維空間 $E \longrightarrow S'$ と $\exp: \mathbb{R} \longrightarrow S'$ によって引戻そう。

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{E} & \longrightarrow & E \\ \downarrow \exp^* \varphi & & \downarrow \varphi \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{\exp} & S' \end{array}$$

$\mathbb{R}$ 上の繊維空間は自明だから、自明化 $\theta: F \times \mathbb{R} \longrightarrow \widetilde{E}$ がある。 $t \in S^1$ 上の φ の繊維を F_t と書く時、

$\theta_t: F \longrightarrow F_t$ を θ の $F \times \{t\}$ への制限としよう。 $\theta_{2\pi} \circ \theta_0^{-1}$ は幾何的モノドロミーである。

この時、Seifert形式とは $H_n(F)$ 上の双一次形式 $\gamma: H_n(F) \otimes H_n(F) \longrightarrow \mathbb{Z}$ で

$$\gamma(x, y) = L_{S^{2n+1}}((\theta_0)_* x, (\theta_\pi)_* y)$$

($L_{S^{2n+1}}(,)$ は S^{2n+1} でのまわり数)

で定義されるものである。詳しくは

$$\beta: H_n(F) \xrightarrow{(\theta_0)_*} H_n(F_0) \xleftarrow{\cong} H_n(S^{2n+1}, F_0) \xleftarrow{\cong} H(S^{2n+1} - F_0) \xrightarrow{i^*} H^n(F_\pi) \xrightarrow{(\theta_\pi)^*} H^n(F)$$

と書くとき (D は Poincaré-Lefschetz 双対 $i: F_\pi \subset S^{2n+1} - F_0$)

$$\gamma(x, y) = \langle \beta x, y \rangle$$

である。

定理 (Kato). $n \geq 3$ の時、 S^{2n+1} 上の生成元が S^n の花束と同じホモトピー型をもつ回転可能構造と、有限生成自由 $\mathbb{Z}$ -加群上のユニモジュラー双一次形式 ($\det = 1$ の行列で代表される双一次形式) とは、Seifert形式によって双射的に対応する。

さらに $H_n F$ のある基底について、交わり行列 S ,

モノドロミ一行列 S は Seifert 行列 Γ によって次の様に表わされる。

$$S = -\Gamma + (-1)^{n+1} {}^t\Gamma$$

$$\Phi = (-1)^{n+1} {}^t\Gamma \cdot \Gamma^{-1}$$

系. f と原点に孤立特異点をもつ多項式とする。 f の定める回転可能構造は f の Seifert 形式により完全に定まる。
(微分同型を除いて)

注意. 与えられたユニモジュラー行列がいつ多項式の Seifert 行列になるかはわからない。但し多項式で定まる Seifert 行列はある基底をとると対角成分が $(-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$ の上三角行列になることがわかる (Durfee)

2. G -不変多項式の Seifert 形式

$G \subset U(n+1)$ を鏡映から生成される有限部分群, f と原点に孤立特異点をもつ G -不変多項式, $f = f' \circ \pi$ と f の分解とする。

命題. S^{2n+1}/G は S^{2n+1} に位相同型。

証明. S^{2n+1} と $\mathbb{C}_z^{n+1} - \{0\}$ の線型な $\mathbb{R}^+$ -作用による商空間と考える。すると

$$S^{2n+1}/G = (\mathbb{C}_z^{n+1} - \{0\}/\mathbb{R}^+)/G$$

ところが $\mathbb{C}_z^{n+1} - \{0\}$ 上の $\mathbb{R}^+$ -作用と G -作用は交換するから、

$$S^{2n+1}/G = (\mathbb{C}_z^{n+1} - \{0\}/G)/\mathbb{R}^+$$

そこで、 $\mathbb{C}_z^{n+1} - \{0\}/G \cong \mathbb{C}_w^{n+1} - \{0\}$ である。 $\mathbb{C}_w^{n+1}$ 上に導入される $\mathbb{R}^+$ -作用は

$$t \cdot (w_0, \dots, w_n) = (t^{d_1} w_0, \dots, t^{d_{n+1}} w_n), \quad t \in \mathbb{R}^+$$

($d_1, \dots, d_{n+1}$ は $\sigma_1, \dots, \sigma_{n+1}$ の次数)

である。ところがこの作用は線型な $\mathbb{R}^+$ -作用と位相的に同型である。従って結論を得る。

今 f を G -不変としたから、 f の定める回転可能構造

$$\left\{ \begin{array}{l} S'_\varepsilon = \overline{S_\varepsilon^{2n+1} - \bar{f}'(D_\delta)} \cup S_\varepsilon^{2n+1} \cap \bar{f}'(S'_\delta) \\ \arg f: \overline{S_\varepsilon^{2n+1} - \bar{f}'(D_\delta)} \longrightarrow S' \end{array} \right.$$

は G -安定なことに注意しよう。 G -作用による商空間を

る。

$$\left\{ \begin{array}{l} S_\varepsilon^{2n+1}/G = \overline{S_\varepsilon^{2n+1} - \bar{f}(D_\delta)} / G \cup (S_\varepsilon^{2n+1} \cap \bar{f}(D_\delta)) / G \\ S_{II} \\ S^{2n+1} \\ \arg f/G : \overline{S_\varepsilon^{2n+1} - \bar{f}(D_\delta)} / G \longrightarrow S' \end{array} \right.$$

は再び S^{2n+1} 上の (位相的万) 回転可能構造を定義する。

ここで $\arg f$ の t 上の繊維を F_t , $\arg f/G$ の t 上の繊維を F'_t とおこう。 G -作用は繊維を保存するから $F'_t = F_t/G$ である。

今、 $\mathbb{C}_w^{n+1}$ の中の ε -球面 $S_{w,\varepsilon}^{2n+1}$ と $S_{z,\varepsilon}^{2n+1}/G$ とは違うことに注意しよう。しかし $S_{w,\varepsilon}^{2n+1}$ と $S_{z,\varepsilon}^{2n+1}/G$ の間の位相同型でその上の函数 f' と f/G の値の偏角を一致させるものがある。このことは S_ε^{2n+1}/G 上の回転可能構造が、 f' の定める回転可能構造と、位相的に同型であることを示している。以後我々は両者を同一視する。

定理. G, f, f' は今までの通り、 F, F' とそれぞれ f, f' の Milnor 繊維空間の繊維とする。 $\pi: F \rightarrow F/G \cong F'$ を自然な射影とする。この時、 f, f' の定める Seifert 形式 γ, γ' につき、次のことが成立する。 $x \in H_n(F)^G, y \in H_n(F)$ とすると

$$\gamma'(\pi_* x, \pi_* y) = |G| \cdot \gamma(x, y)$$

系. F, F' の交わり形式 S, S' の間には次の関係が成立つ。

$x \in H_n(F)^G, y \in H_n(F)$ について

$$S'(\pi_* x, \pi_* y) = |G| \cdot S(x, y)$$

定理の証明. 次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccccccc} \beta: H_n(F) \xrightarrow[\cong]{(\partial_0)^*} H_n(F_0) \xleftarrow[\cong]{\partial} H_{n+1}(S_\varepsilon^{2n+1}, F_0) \xleftarrow[\cong]{D} H^n(S_\varepsilon^{2n+1} - F_0) \xrightarrow[\cong]{i^*} H^n(F_\pi) \xrightarrow[\cong]{(\partial_\pi)^*} H^n(F) \\ \downarrow \pi_* \circlearrowleft \downarrow \pi_* \circlearrowleft \downarrow \pi_* (*) \uparrow \pi^* \circlearrowleft \uparrow \pi^* \circlearrowleft \uparrow \pi^* \\ \beta': H_n(F') \xrightarrow[\cong]{(\partial'_0)^*} H_n(F'_0) \xleftarrow[\cong]{\partial} H_{n+1}(S', F'_0) \xleftarrow[\cong]{D'} H^n(S' - F'_0) \xrightarrow[\cong]{i'^*} H^n(F'_\pi) \xrightarrow[\cong]{(\partial'_\pi)^*} H^n(F') \end{array}$$

ここで $S' = S_\varepsilon^{2n+1}/G (\cong S^{2n+1})$, とする。

$$\gamma(x, y) = \langle \beta x, y \rangle, \quad \gamma'(x', y') = \langle \beta' x', y' \rangle$$

である。上列のすべての写像は G -同変, $(*)$ を除いてすべて

可換である。 $(*)$ の部分と調べよう。 S_ε^{2n+1} の基本類と

$[S] \in H_{2n+1}(S_\varepsilon^{2n+1})$, S_ε^{2n+1}/G の基本類と $[S'] \in H_{2n+1}(S_\varepsilon^{2n+1}/G)$

とする。

$$\pi_* [S] = |G| \cdot [S']$$

である。従って

$$\pi_* \circ D \circ \pi^* = |G| \cdot D'$$

今、 $H^n(S_\varepsilon^{2n+1} - F_0)$, $H^n(S' - F'_0)$ は共に $\mathbb{Z}$ の直和 $\mathbb{Z}^n$,

$$\pi_* : H^n(S' - F'_0; \mathbb{Q}) \xrightarrow{\cong} H^n(S_\varepsilon^{2n+1} - F_0; \mathbb{Q})^G$$

は同型だから、 $x \in H_n(F)^G$ に対し

$$D'^{-1} \circ j^{-1} \circ (\theta_0)_* x = \pi^* \alpha$$

となる $\alpha \in H^n(S' - F'_0; \mathbb{Q})$ がある。従って

$$\pi^* \beta' \pi_* x = |G| \cdot \beta x$$

これより直ちに結論が得られる。

注意. 特に f が重みつき冪次の時、 f のモノドロミーと G の作用は交換する。従って次の図式は可換である。

$$\begin{array}{ccc} H_n(F) & \xrightarrow{\pi_*} & H_n(F') \\ \downarrow \Phi & & \downarrow \Phi' \\ H_n(F) & \xrightarrow{\pi_*} & H_n(F') \end{array} \quad (\Phi, \Phi', \text{はモノドロミー})$$

3. 例

I. $G \in (n+1)$ -文字 $\{0, 1, \dots, n\}$ の置換のつくる対称群 $\mathfrak{S}_{n+1}$ とする。 $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}$ の $\mathbb{C}^{n+1}$ 上の作用は

$$\sigma \cdot (z_0, \dots, z_n) = (z_{\sigma^{-1}(0)}, \dots, z_{\sigma^{-1}(n)})$$

である。 f として Fermat 型の多項式

$$f(z) = z_0^d + \dots + z_n^d$$

をとる。 $\mathfrak{S}_{n+1}$ で不変な多項式の全体は基本対称式 $\sigma_1, \dots, \sigma_{n+1}$ で生成されるから、 f' は重みが $(d; 1, 2, \dots, n+1)$ の重みつき斉次多項式である。 f' の Milnor 数は $\binom{d-1}{n+1}$ である。 f, f' の Milnor 繊維空間の繊維 F, F' はそれぞれ $V_d = \{z \in \mathbb{C}_z^n \mid f(z) = 1\}$ $V'_d = \{w \in \mathbb{C}_w^n \mid f'(w) = 1\} = V_d / \mathfrak{S}_{n+1}$ と同一視される。

結果 1. V'_d は標準 $(d-1)$ -単体の n -切片 (次元 $\leq n$ の単体の作る部分複体) と同じホモトピー型をもつ。標準写像 $\pi: V_d \rightarrow V_d / \mathfrak{S}_{n+1} = V'_d$ はホモロジー群の全射と等しく。

証明. Brieskorn 型の超曲面の研究により

$$U_d = \{z \in V_d \mid z_i^d : \text{real} \geq 0, i = 0, 1, \dots, n\}$$

とみると, U_d は V_d の変形レトラクトで

$$U_d \cong \mathbb{Z}_d * \cdots * \mathbb{Z}_d \quad (d\text{-点の}(n+1)\text{-個の結})$$

であることがわかり, さらにその変形レトラクションを見ると

$$V_d / \mathcal{G}_{n+1} \cong U_d / \mathcal{G}_{n+1} \cong \mathbb{Z}_d * \cdots * \mathbb{Z}_d / \mathcal{G}_{n+1}$$

($\mathcal{G}_{n+1}$ の $\mathbb{Z}_d * \cdots * \mathbb{Z}_d$ への作用は因子の置換)

がわかる。あとは純粋に組合わせ位相幾何的な考察で

$$\mathbb{Z}_d * \cdots * \mathbb{Z}_d \cong (\Delta^{d-1})^n$$

を得る。同時に鎖複体の対応もわかり, ホモロジーに関する結果を得る。

$H_n(V_d)$ 上の Seifert 形式, 交わり形式によって次のことが知られている。

$$r = (r_0, \dots, r_n), \quad 0 \leq r_i \leq d-2, \quad i=0, 1, \dots, n$$

に対して, $l_r \in H_n(V_d)$ があって, $\{l_r\}$ は $H_n(V_d)$ の基底となる。この時, Seifert 形式, 交わり形式は次のようになる。

$$\gamma(l_r, l_s) = \begin{cases} (-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} & s_i \leq r_i \leq s_i + 1 \\ & (i=0, 1, \dots, n) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

$$S(l_r, l_s) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n(n+3)}{2}} & s_i \leq r_i \leq s_i + 1 \\ (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} & s_i - 1 \leq r_i \leq s_i \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

このこと, 前の節の考察を合わせると次の結果を得る。

結果 2. $H_n(V_d')$ の階数は $\binom{d-1}{n+1}$ で

$$R = \{r_0, \dots, r_n\} \quad 0 \leq r_0 < r_1 < \dots < r_n \leq d-2$$

なる R に対して $H_n(V_d')$ の元 l'_R が存在して $\{l'_R\}$ は $H_n(V_d')$ の基底となる。この時 Seifert 形式, 交わり形式は次のようである。

$$\sigma(l'_R, l'_S) = \begin{cases} (-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} & s_i \leq r_i \leq s_i + 1 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

$$S(l'_R, l'_S) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n(n+3)}{2}} & s_i \leq r_i \leq s_i + 1 \\ (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} & s_i - 1 \leq r_i \leq s_i \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

II. G が D_{n+1} 型の Weyl 群 $W(D_{n+1})$ とする。群 $W(D_{n+1})$ は $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}$ と $\varepsilon = (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n)$, $\varepsilon_i = \pm 1$, $\sum \varepsilon_i \equiv 0 \pmod{2}$

で生成され、その $\mathbb{C}^{n+1}$ 上の作用は

$$\sigma \cdot (z_0, \dots, z_n) = (z_{\sigma(0)}, \dots, z_{\sigma(n)})$$

$$\varepsilon \cdot (z_0, \dots, z_n) = (\varepsilon_0 z_0, \dots, \varepsilon_n z_n)$$

である。今 f として

$$f = z_0^{2d} + \dots + z_n^{2d}$$

をとると $W(D_{n+1})$ で不変である。この時 f' は重みが

$(2d; 2, 4, \dots, 2n, n+1)$ の重みをもつ斉次多項式で、その Milnor 数は $\binom{d-1}{n+1} + \binom{d}{n+1} = 2\binom{d-1}{n+1} + \binom{d-1}{n}$ である。

結果 1.

$$V_{2d}/W(D_{n+1}) \cong (\Delta^{d-1})^n \cup_{(\Delta^{d-1})^{n-1}} (\Delta^{d-1})^n$$

(標準 $(d-1)$ -単体の n -切片 2 つを
($n-1$)-切片のところで貼り合わせたもの)

$$H_n(V_{2d}) \xrightarrow{\pi_*} H_n(V_{2d}/W(D_{n+1})) ; \text{全射.}$$

結果 2.

$$\left\{ R = \{r_0, r_1, \dots, r_n\} \mid \begin{array}{l} \text{i) } 0 \leq r_0 < r_1 < \dots < r_n \leq d-1 \\ \text{または} \\ \text{ii) } \begin{cases} 0 \leq r_{n-d} < r_0 < r_1 < \dots < r_{n-1} \leq d-2 \\ r_{n-1} < r_n < r_0 + d \end{cases} \end{array} \right\}$$

なる R に対して $H_n(V_{2d}/W(D_{n+1}))$ の元 l_R'' があって $\{l_R''\}$ は $H_n(V_{2d}/W(D_{n+1}))$ の基底。Seifert 形式, 交わり形式は

$$f(l_R'', l_S'') = \begin{cases} (-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} & s_i \leq r_i \leq s_i + 1 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

$$S(l_R'', l_S'') = \begin{cases} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} & s_i \leq r_i \leq s_i + 1 \\ (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} & s_{i-1} \leq r_i \leq s_i \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

である。