

二次元 Euler- α 方程式の弱解の特異極限解とその性質 A singular limit of weak solutions of 2D Euler- α equations

坂上 貴之 (Takashi Sakajo)
北海道大学大学院理学研究院, JST CREST
E-mail: sakajo@math.sci.hokudai.ac.jp

1 研究の背景と動機

Kolmogorov による三次元一様等方乱流の理論においてなされている仮定の一つに、流体の粘性ゼロ極限においてエネルギー散逸率がゼロでない正の値に収束するというものがある。この仮定は単純に考えれば奇妙なものである。というのも、粘性ゼロ極限の流れに対応する非粘性流体の運動を記述する Euler 方程式において、その解が滑らかであればエネルギーは保存されエネルギー散逸率はゼロとなるからである。この不思議な仮定に対して、Onsager は非粘性の流れに指数 $1/3$ のヘルダー連続性程度の滑らかさがあればエネルギーは散逸しないと、数学的に厳密な証明なしに言明している。逆に言えば、それより滑らかさのない Euler 方程式の解はエネルギーを散逸させる可能性がある。この予想は **Onsager 予想** と呼ばれ、数学的な解明が必要なものである [12, 31].

Onsager 予想が出されて約半世紀が経過して、Constantin ら [6] は、周期境界条件を持つ三次元 Euler 方程式の弱解が Besov 空間 $B_{3,\infty}^\alpha$ に入っている時、 $\alpha > 1/3$ ならばエネルギーが保存することを証明した。この Besov 空間の指数 α は関数のヘルダー連続性に相当する指数なので、この定理は Onsager 予想の現代的記述となっている。もちろん、このような弱解の存在は証明されていないので、数学的には予想の範囲を出ていない。その後、Duchon と Robert [9] は、超関数の意味でエネルギー散逸率が非負になるような三次元オイラー方程式の弱解を散逸的弱解と定義して、ヘルダー指数が $1/3$ より少し滑らかな弱解に対してエネルギー散逸率がゼロになることを示した。関数の性質としては、若干 Constantin らの結果よりは弱い。この散逸的弱解を使うと三次元一様等方乱流場の三次モーメントに対する統計法則が、ある種のエルゴード仮説の下で再現されることが示されている [9, 11]. このように、Euler 方程式の滑らかでない弱解でエネルギー散逸率がゼロにならないものが三次元乱流を構成する流れの数学的実体であるという指摘は重要なものである。しかしながら、これらの議論では多くの仮定がなされた「物語」に過ぎず、これに数学的な肉付けを行い、そのような流れの性質を明らかにすることが今後の問題であろう。また、物理的な観点からも、こうした滑らかでない流れがどのような力学的特性を持つかについて明らかにすることも重要であるが、これも簡単な問題ではない。

さて、Euler 方程式の弱解を構成する方法の一つは、方程式を何らかの意味で正則化して、その上で時間大域解を構成し、その解の正則化パラメータのゼロ極限を考えることである。Euler 方程式の正則化には様々な方法がある。もちろん粘性項を加えた Navier-Stokes 方程式もその正則化方程式の一つではあるが、この論文では Holm ら [4, 16, 17, 18] によって導入された Euler- α

方程式を考える。この方程式は非粘性・非圧縮流れにおいて、スケール α 以下の情報を平均化して繰り込むことによって得られる Euler 方程式の（分散型）正則化方程式である [25]。この Euler- α 方程式は乱流物理と関係が深い。例えば、粘性項を加えた Navier-Stokes- α 方程式の数多くの数値的研究において、 α が小さい時、この解が三次元乱流と同様の性質を持つことが示されている [5, 13, 14, 26]。加えて、Euler- α 方程式に対しては後述するように多くの数学的な結果が得られており、こうした解を厳密に構成して $\alpha \rightarrow 0$ の極限をとることで Euler 方程式の弱解を捉えられる可能性がある。

一方で、三次元 Navier-Stokes- α 方程式については解の存在と一意性について知られている [23] が、三次元 Euler- α 方程式については時間大域的な弱解の存在は未だ証明されていない [15] ため、上記の戦略で Euler 方程式の弱解を捉えることを数学的に厳密にはできない状態である。そのことを踏まえて、この論文では問題を少し簡単にし、以下のような非圧縮速度場 $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$, $(t \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2)$ に対する二次元の Euler- α 方程式を考える。

$$(1 - \alpha^2 \Delta) \partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla (1 - \alpha^2 \Delta) \mathbf{u} - \alpha^2 (\nabla \mathbf{u})^T \cdot \Delta \mathbf{u} = -\nabla p, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}).$$

もちろん、二次元の流れと三次元の流れは本質的に異なるので、この簡略化は大胆なものであるが、ここで提起されている問題に答える上では、理論的なアドバンテージがいくつかあるとともに乱流と特異な弱解との間に同様のアナロジーがある。まず、Lunasin ら [24] の二次元 Navier-Stokes- α の数値計算によれば、 α が小さい時に解のエネルギー密度スペクトルの中にエネルギーカスケードおよびエンストロフィーの逆カスケードに対応する領域が現れる。エンストロフィーの逆カスケードおよびそれを生み出すエンストロフィー散逸は二次元乱流を特徴づける性質 [2, 21, 22] なので、二次元 α 正則化流体方程式もまた三次元と同様に乱流のモデル方程式として妥当なものの一つと見なせる。数学的には、滑らかな初期値に対する時間大域解の存在 [33] は勿論のこと、Sobolev 空間 $H^m(\mathbb{R}^2)$ に初期値を持つ場合には、時間大域的な一意解を持ち、その解は $\alpha \rightarrow 0$ の時、 $L^\infty([0, \infty); H^m)$ で Euler 方程式の解に収束することが知られている。さらに、初期データがもっと弱く、初期渦度が平面上にサポートを持つラドン測度で与えられるような場合でも、時間大域的な一意弱解が存在することも示されている [30]。こうした大域解の存在は、Euler 方程式の弱解を Euler- α 方程式の解から $\alpha \rightarrow 0$ の極限によって捉えるという方針において顕著な役割を果たすものである。

さて、Duchon と Robert [9] によれば、二次元 Euler 方程式に対しても（エネルギー）散逸的弱解なるものが定義され、初期渦度が $L^p(\mathbb{R}^2)$, $p > 3/2$ にある時には散逸的にならないことが示されている。初期渦度が $L^p(\mathbb{R}^2) \cap L^1(\mathbb{R}^2)$, $1 < p < \infty$ に入っている場合は、時間大域弱解が存在することが DiPerna と Majda [7] によって示されている一方で、Eyink [10] はこうした解のクラスではエンストロフィーの散逸が起こらないことを示している。そのため、散逸的弱解でかつエンストロフィーの散逸を起こすような弱解を二次元 Euler 方程式で構成するためには、もっと弱い初期渦度を考える必要がある。そこで本論文では渦度が二次元平面上にサポートを持つラドン測度、とりわけそのサポートが一点 (δ 関数) であるような「点渦」初期値を考え、それに対する Euler- α 方程式の時間大域的弱解（この解の存在は [30] で数学的に保証されている）を構成し、 $\alpha \rightarrow 0$ とすることでその挙動を調べる。これにより散逸的弱解と乱流の関係、特にこうした Euler- α 方程式の極限における滑らかでない解がエンストロフィーを散逸するか、またこのような解がどのような流れ特性を持つかについて調べる。

本論文は以下のように構成される。まず、二章では、初期渦度が δ 関数与えられる時の二次元 Euler- α 解を構成するために α 点渦系と呼ばれる常微分方程式系を導出する。第三章では、

α 点渦系で $\alpha \rightarrow 0$ の極限において特異な挙動を示す解を捕まえるため、 α 点渦三体問題を考え、その解を具体的に構成し、その $\alpha \rightarrow 0$ 極限解に対してエネルギーやエントロピーがどう時間変動するかを調べる。最後の章は、この結果を踏まえた将来展望について書く。なお、本稿は論文 [32] の概要をまとめて、今後の展望を書き加えたものである。

2 α 点渦系

初期渦度が δ 関数で与えられるような Euler- α 方程式の解を構成するために、Euler- α 方程式の渦度に対する α 渦度方程式を導出する。 α 渦度 $q(t, \mathbf{x})$ を $q = (1 - \alpha^2 \Delta) \nabla^\perp \cdot \mathbf{u}$ によって導入して、これを Euler- α 方程式に代入すると次の q に対する方程式を得る。

$$q_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) q = 0, \quad \mathbf{u} = K^\alpha * q, \quad q(0, \mathbf{x}) = (1 - \alpha^2 \Delta) \nabla^\perp \cdot \mathbf{u}_0(\mathbf{x}). \quad (1)$$

渦度から速度場を構成する積分核は $K^\alpha(\mathbf{x}) = G^\alpha(\mathbf{x}) * \frac{1}{2\pi} \nabla^\perp \log |\mathbf{x}|$ であり、関数 $G^\alpha(\mathbf{x})$ は Helmholtz 作用素 $(1 - \alpha^2 \Delta)$ のグリーン関数を表し、次のように与えられる。

$$G^\alpha(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi\alpha^2} K_0\left(\frac{|\mathbf{x}|}{\alpha}\right).$$

ここで、 $K_0(x)$ は第二種変形ベッセル関数 [35] を表している。

今、 α 渦度 $q(t, \mathbf{x})$ が N 個の δ 関数の一次結合 (α 点渦と呼ぶ) で書かれていると仮定する。すなわち、 $n = 1, \dots, N$ に対して、位置 $\mathbf{x}_n(t) = (x_n(t), y_n(t)) \in \mathbb{R}^2$ および強さ Γ_n を持つ点渦に対して、次のように与えられる。

$$q(t, \mathbf{x}) = \sum_{n=1}^N \Gamma_n \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)). \quad (2)$$

また、(1) における積分核 $K^\alpha(\mathbf{x})$ は具体的に以下のように書ける [19]:

$$K^\alpha(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi} \nabla^\perp \left[\log |\mathbf{x}| + K_0\left(\frac{|\mathbf{x}|}{\alpha}\right) \right].$$

点渦度 (2) を $\mathbf{u} = K^\alpha * q$ に代入して、位置 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_m(t)$ における速度場を計算することで、 α 点渦に対する常微分方程式が得られる。

$$\frac{dx_m}{dt} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{n \neq m}^N \Gamma_n \frac{y_m - y_n}{l_{mn}^2} B_K\left(\frac{l_{mn}}{\alpha}\right), \quad \frac{dy_m}{dt} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \neq m}^N \Gamma_n \frac{x_m - x_n}{l_{mn}^2} B_K\left(\frac{l_{mn}}{\alpha}\right). \quad (3)$$

ただし、 $l_{mn} = |\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_n|$ は m 番目と n 番目の α 点渦の距離、 $B_K(x) = 1 - xK_1(x)$ である。ここで、関数 $K_1(x)$ も第二種変形ベッセル関数の一つである [35]。このような常微分方程式系 (3) を我々は α 点渦系と呼ぶことにする。ベッセル関数の性質 $K_1(x) \rightarrow e^{-x}$, $x \rightarrow \infty$ から、 $B_K(x) \rightarrow 1$ が成り立つので、 α 点渦系は $\alpha \rightarrow 0$ とすると形式的には Euler 方程式に対して得られる点渦系 [27] と等価になる。また、 $B_K(x) \rightarrow 0$, $x \rightarrow 0$ なることが $K_1(x) \sim 1/x$, $x \rightarrow 0$ よりわかるので、二つの α 点渦の距離がゼロになった時の速度場はゼロに収束していく。もとの点渦系においては、二点の距離がゼロに近づくと、誘導速度場は発散することから、関数 $B_K(x)$ のおかげで点渦方程式は正則化されていることもわかる。ここで、一つ注意しておきたいのは

α 点渦系の運動は Euler- α 方程式の時間大域弱解になっているが、点渦系は Euler 方程式の弱解ではないということである。実際、ラドン測度を持つ初期値に対する弱解の存在は Delroît[8] で示されているが、点渦測度はそこで示されている初期条件に関する条件を満たさない。

我々はこの α 点渦系の解を構成するわけだが、本稿の目的に合わせてこの α 点渦の運動から系のエネルギーやエンストロフィーを計算する必要がある。点渦の運動からエネルギーを導出する方法は Novikov[28] によって与えられている。エネルギーもエンストロフィーも導出方法は同じなので、ここではエンストロフィーを導くことにする。まず、系の渦度 $q(t, \mathbf{x})$ は (2) をフーリエ変換して、次のようになる。

$$\hat{q}(t, \xi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^N \Gamma_m e^{-i\xi \cdot \mathbf{x}_m(t)}.$$

これより、渦度 $\hat{q}$ の二乗は以下で与えられる。

$$|\hat{q}(t, \xi)|^2 = \frac{1}{4\pi^2} \left[\sum_{m=1}^N \Gamma_m^2 + 2 \sum_{m=1}^N \sum_{n=m+1}^N \Gamma_m \Gamma_n \cos(\xi \cdot (\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_n)) \right]. \quad (4)$$

今、系の渦度 ω と q は $q = (1 - \alpha^2 \Delta)\omega$ で関係づけられるで、 $\hat{q}(t, \xi) = (1 + \alpha^2 \xi^2) \hat{\omega}(t, \xi)$ となる。

$$|\hat{\omega}(t, \xi)|^2 = \frac{1}{4\pi^2(1 + \alpha^2 \xi^2)^2} \left[\sum_{m=1}^N \Gamma_m^2 + 2 \sum_{m=1}^N \sum_{n=m+1}^N \Gamma_m \Gamma_n \cos(\xi \cdot (\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_n)) \right]. \quad (5)$$

この時、系の全エンストロフィーは

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\omega(t, \xi)|^2 d\xi = \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi |\hat{\omega}(t, \xi)|^2 \xi d\xi d\theta = \int_0^\infty \pi \xi \langle |\hat{\omega}(t, \xi)|^2 \rangle d\xi$$

で与えられる。ここで、 $\xi = |\xi|$ であり、 $\langle f(\cdot) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi f(\theta) d\theta$ は、関数 $f(\theta)$ の変数 θ に関する平均を表している。この結果、エンストロフィー-密度関数は

$$\mathcal{Z}_N^{(\alpha)}(t, \xi) \equiv \frac{\pi \xi}{(1 + \alpha^2 \xi^2)^2} \langle |\hat{q}(t, \xi)|^2 \rangle = \frac{\xi}{4\pi(1 + \alpha^2 \xi^2)^2} \left[\sum_{m=1}^N \Gamma_m^2 + 2 \sum_{m=1}^N \sum_{n=m+1}^N \Gamma_m \Gamma_n J_0(\xi l_{mn}) \right].$$

ここで、 $J_0(x)$ はベッセル関数である。実際に小スケール $0 < l \ll 1$ から大スケール $1 \ll L < \infty$ まで積分すると、次のような評価がえられる。

$$\int_{L^{-1}}^{L^{-1}} \mathcal{Z}_N^{(\alpha)}(t, \xi) d\xi = \frac{1}{4\pi} \sum_{m=1}^N \Gamma_m^2 \int_{L^{-1}}^{L^{-1}} \frac{\xi}{(1 + \alpha^2 \xi^2)^2} d\xi + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^N \sum_{n=m+1}^N \Gamma_m \Gamma_n \int_{L^{-1}}^{L^{-1}} \frac{\xi J_0(\xi l_{mn})}{(1 + \alpha^2 \xi^2)^2} d\xi.$$

ここで得られた第一項はスケールを固定すると定数であることに注意すれば、 α 点渦の運動によって時間変動するのは第二項である。これを $\mathcal{Z}^{(\alpha)}(t)$ と書くことにすると、以下のように計算できる。

$$\mathcal{Z}^{(\alpha)}(t) = \frac{1}{4\pi\alpha^2} \sum_{m=1}^N \sum_{n=m+1}^N \frac{l_{mn}(t)}{\alpha} K_1\left(\frac{l_{mn}(t)}{\alpha}\right). \quad (6)$$

ただし、以下のベッセル関数の積分に関する公式を使っている [35].

$$\int_0^\infty \frac{x J_0(ax)}{1+x^2} dx = K_0(a), \quad \int_0^\infty \frac{x^{\nu+1} J_\nu(ax)}{(1+x^2)^{\mu+1}} dx = \frac{a^\mu K_{\nu-\mu}(a)}{2^\mu \Gamma(\mu+1)}, \quad \mu + 3/2 > \nu > -1. \quad (7)$$

同様のアイデアで (7) を再び使うと、エネルギーの時間変動部分 $E^{(\alpha)}(t)$ は以下のように与えられる。導出は [32] を参照のこと。

$$E^{(\alpha)}(t) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^N \sum_{n=m+1}^N \Gamma_m \Gamma_n \left[\log l_{mn}(t) + K_0 \left(\frac{l_{mn}(t)}{\alpha} \right) + \frac{l_{mn}(t)}{2\alpha} K_1 \left(\frac{l_{mn}(t)}{\alpha} \right) \right]. \quad (8)$$

さて、 α 点渦系 (3) の解析をはじめるにあたり、我々は $\alpha \rightarrow 0$ 極限を取ることを念頭に α によらない方程式を導出する。新しい変数 $\mathbf{X}_m(t) = (X_m(t), Y_m(t))$ と $L_{mn}(t)$ を以下のように定義する。

$$X_m(t) = \frac{1}{\alpha} x_m(\alpha^2 t), \quad Y_m(t) = \frac{1}{\alpha} y_m(\alpha^2 t), \quad L_{mn}(t) = |\mathbf{X}_m(t) - \mathbf{X}_n(t)| = \frac{1}{\alpha} l_{mn}(\alpha^2 t). \quad (9)$$

このとき、方程式 (3) は以下ようになる。

$$\frac{d\mathbf{X}_m}{dt} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{n \neq m}^N \Gamma_n \frac{Y_m - Y_n}{L_{mn}^2} B_K(L_{mn}), \quad \frac{dY_m}{dt} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \neq m}^N \Gamma_n \frac{X_m - X_n}{L_{mn}^2} B_K(L_{mn}). \quad (10)$$

これを以後 α 点渦系に対する標準方程式と呼ぶことにする。ちなみに、(10) は元の方程式 (3) で $\alpha = 1$ としたものである。以後、標準方程式に対して解析を進めるが、その解 $X_m(t)$, $Y_m(t)$, $L_{mn}(t)$ から (3) の解は

$$x_m(t) = \alpha X_m(t/\alpha^2), \quad y_m(t) = \alpha Y_m(t/\alpha^2), \quad l_{mn}(t) = \alpha L_{mn}(t/\alpha^2), \quad (11)$$

によって再現される。これら関係式が、後ほど $\alpha \rightarrow 0$ の極限を取るときに重要な役割を果たす。

この標準方程式に対して、一般的に成立する事実を述べておく。まず、この標準方程式は以下のような $H = H_0(t) + H_1(t)$ および Poisson 括弧に対するハミルトン系となっている。

$$H_0(t) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^N \sum_{n=m+1}^N \Gamma_m \Gamma_n \log L_{mn}(t), \quad H_1(t) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^N \sum_{n=m+1}^N \Gamma_m \Gamma_n K_0(L_{mn}(t)), \quad (12)$$

$$\{f, g\} = \sum_{m=1}^N \frac{1}{\Gamma_m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_m} \frac{\partial g}{\partial y_m} - \frac{\partial g}{\partial x_m} \frac{\partial f}{\partial y_m} \right). \quad (13)$$

ここで、ハミルトニアン H は保存量であるが、それを構成する H_0 と H_1 は時間とともに変動する。この第一項は点渦系のハミルトンエネルギーと同じであることに注意しよう。以後の解析に使うので、 α 点渦系の方程式 (10) のいくつかの別表現を与えておく。これらの導出は Euler 方程式に対する点渦系の場合と同様である。(Newton[27] などを見よ。) まず、二次元空間と複素平面を同一視して、 $Z_m(t) = X_m(t) + iY_m(t)$ と書くと以下の複素表現を得る。

$$\frac{dZ_m^*}{dt} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n \neq m}^N \frac{\Gamma_n}{Z_m - Z_n} B_K(|Z_m - Z_n|), \quad (14)$$

次に、二つの α 点渦の距離 L_{mn} の従う方程式は以下で与えられる。

$$\frac{d}{dt} L_{mn}^2 = \frac{2}{\pi} \sum_{k \neq m \neq n}^N \Gamma_k \sigma_{mnk} A_{mnk} \left(\frac{1}{L_{nk}^2} B_K(L_{nk}) - \frac{1}{L_{km}^2} B_K(L_{km}) \right). \quad (15)$$

ここに現れる σ_{mnk} は, α 点渦の配置を表し, $\mathbf{X}_m, \mathbf{X}_n, \mathbf{X}_k$ のなす三角形の頂点の指数 m, n, k が反時計回りに並んでいるときは $+1$, 時計回りの時は -1 で与えるものとする. A_{mnk} は, これらの三点によってなされる三角形の面積を与えており, ヘロンの公式から各 α 点渦の距離 L_{mn} を使って以下のように与えられる.

$$A_{mnk} = \frac{1}{4} [2(L_{mn}^2 L_{nk}^2 + L_{nk}^2 L_{km}^2 + L_{km}^2 L_{mn}^2) - L_{mn}^4 - L_{nk}^4 - L_{km}^4]^{\frac{1}{2}}. \quad (16)$$

点渦系の問題と同様の解析 [1, 27] に従って, α 点渦系のハミルトン系としての可積分性について議論しておく. そのために Linear impulse L と角運動量 I を以下のように定義する.

$$L = Q + iP = \sum_{m=1}^N \Gamma_m z_m, \quad I = \sum_{m=1}^N \Gamma_m |z_m|^2. \quad (17)$$

これらの量は点渦系に対する保存量であるが, α 点渦系でも保存量であることは以下のようにしてすぐにわかる.

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \sum_{m=1}^N \Gamma_m \frac{dz_m}{dt} = - \sum_{m=1}^N \Gamma_m \sum_{n \neq m}^N \frac{\Gamma_n}{2\pi i} \frac{1}{Z_m^* - Z_n^*} B_K(|Z_m - Z_n|) \\ &= - \sum_{m=1}^N \sum_{n=m+1}^N \frac{\Gamma_m \Gamma_n}{2\pi i} \frac{1}{Z_m^* - Z_n^*} B_K(|Z_m - Z_n|) + \sum_{n=1}^N \sum_{m=n+1}^N \frac{\Gamma_m \Gamma_n}{2\pi i} \frac{1}{Z_n^* - Z_m^*} B_K(|Z_m - Z_n|) \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= -\frac{1}{2\pi i} \left(\sum_{m=1}^N \sum_{n=m+1}^N \frac{\Gamma_m \Gamma_n Z_m^*}{Z_m^* - Z_n^*} B_K(|Z_m - Z_n|) - \sum_{n=1}^N \sum_{m=n+1}^N \frac{\Gamma_m \Gamma_n Z_m^*}{Z_n^* - Z_m^*} B_K(|Z_m - Z_n|) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \left(\sum_{m=1}^N \sum_{n=m+1}^N \frac{\Gamma_m \Gamma_n Z_m}{Z_m - Z_n} B_K(|Z_m - Z_n|) - \sum_{n=1}^N \sum_{m=n+1}^N \frac{\Gamma_m \Gamma_n Z_m}{Z_n - Z_m} B_K(|Z_m - Z_n|) \right) \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \sum_{m=1}^N \sum_{n=m+1}^N \Gamma_m \Gamma_n B_K(|Z_m - Z_n|) + \frac{1}{2\pi i} \sum_{m=1}^N \sum_{n=m+1}^N \Gamma_m \Gamma_n B_K(|Z_m - Z_n|) = 0. \end{aligned}$$

ここで, $M = \Gamma I - Q^2 - P^2 = \sum_{m=1}^N \sum_{n=m+1}^N \Gamma_m \Gamma_n L_{mn}^2$ も保存されることに注意しよう. この M は後の解析で重要な役割を果たす. これらの量とポアソン括弧を使って, $\{P^2 + Q^2, I\} = 0$, $\{Q, P\} = \Gamma$, $\{Q, I\} = P$, $\{P, I\} = Q$ が成り立つから, $N \leq 3$ の時は α 点渦系は, すべての Γ_m に対して可積分である. さらに, α 点渦の強さの総和がゼロ, すなわち $\Gamma = 0$ の時に限り四体問題は可積分である.

命題 1 α 点渦系 (3) の二体・三体問題はすべての Γ_m に対して可積分である. さらに, 点渦の強さの総和がゼロ, すなわち $\Gamma = 0$ の時, 四体問題も可積分である.

この可積分性に関する結果は点渦系と全く同じものである. つまり, 点渦 α 正則化によって可積分性は変化しない.

3 三体問題

3.1 三点 α 点渦運動の解析

前章の議論から、三点 α 点渦系は可積分であることがわかったが、本章では以下のような条件の下における三体問題を考える。

$$\frac{1}{\Gamma_1} + \frac{1}{\Gamma_2} + \frac{1}{\Gamma_3} = 0, \quad (18)$$

$$M = \Gamma_1 \Gamma_2 L_{12}^2 + \Gamma_2 \Gamma_3 L_{23}^2 + \Gamma_3 \Gamma_1 L_{31}^2 = 0. \quad (19)$$

これらの条件でオリジナルの点渦系の問題を解くと、有限時間で一点に衝突する自己相似衝突解が得られる [1, 20, 29]。木村 [20] によると、ある定数 $\lambda_n \in \mathbb{C}$ および $A, B \in \mathbb{R}$ が存在して、 n 番目の点渦の運動 $(x_n(t), y_n(t))$ は以下のように与えられる。

$$x_n(t) + iy_n(t) = \lambda_n \sqrt{2At} \exp\left(i \frac{B}{2A} \log(2At)\right) \quad (20)$$

これによると $A > 0$ の時、この関数は $t > 0$ で定義ができ、原点からわき出て自己相似的に無限遠点に発散してゆく自己相似発散解を表し、 $A < 0$ の時は $t < 0$ で定義できて、無限遠点から自己相似的に近づき $t = 0$ で一点に衝突する自己相似衝突解を表している。この解の表示は $t > 0$ と $t < 0$ の双方で同時に定義できず、 $t = 0$ 超えて解を接続することはできないことを注意しておく。同じ条件 (18) と (19) で三点 α 点渦系を考えた時、 $\alpha \neq 0$ であればこのような衝突解は存在しない。というのも、Oliver と Shkoller [30] によって、点渦初期値に対しても解は超関数の意味で時間大域的な一意解を持つことが示されているからである。しかし、このような大域解に対して $\alpha \rightarrow 0$ の極限を取った時には、(20) のような特異解に近づくことが予想されるので、この極限解がどのようなになり、その極限解に対してエネルギーやエンストロフィーがどのような時間変動をするかを調べる。

三体 α 点渦系の解析手法は、基本的には過去の研究 [1, 27, 34] で用いられた三体可積分系で用いられたものと同様である。条件 (18) から、一般性を失うことなく $\Gamma_1 \geq \Gamma_2 > 0 > \Gamma_3$ とすることができる。解析は α 点渦の距離 $L_{mn}(t)$ に対する方程式 (15) を用いる。具体的には以下のように与えられる。

$$\frac{d}{dt} L_{12}^2 = \frac{2}{\pi} \Gamma_3 A \left[\frac{1}{L_{23}^2} B_K(L_{23}) - \frac{1}{L_{31}^2} B_K(L_{31}) \right], \quad (21)$$

$$\frac{d}{dt} L_{23}^2 = \frac{2}{\pi} \Gamma_1 A \left[\frac{1}{L_{31}^2} B_K(L_{31}) - \frac{1}{L_{12}^2} B_K(L_{12}) \right], \quad (22)$$

$$\frac{d}{dt} L_{31}^2 = \frac{2}{\pi} \Gamma_2 A \left[\frac{1}{L_{12}^2} B_K(L_{12}) - \frac{1}{L_{23}^2} B_K(L_{23}) \right]. \quad (23)$$

ここで、三体の作る三角形は同じなので $A = \sigma_{123} A_{123} = \sigma_{231} A_{231} = \sigma_{312} A_{312}$ と符合付き面積を定義している。この量はヘロンの公式から計算することができる。

$$A^2 = r(r - L_{12})(r - L_{23})(r - L_{31}), \quad r = \frac{1}{2}(L_{12} + L_{23} + L_{31}). \quad (24)$$

その大きさ $|A|$ は (16) から

$$|A| = \frac{1}{4} [2(L_{12}^2 L_{23}^2 + L_{23}^2 L_{31}^2 + L_{31}^2 L_{12}^2) - L_{12}^4 - L_{23}^4 - L_{31}^4]^{\frac{1}{2}} \geq 0 \quad (25)$$

と書き下せる. この符合付き面積 A も, 三体 α 点渦の運動とともに時間発展するので, その方程式を求める必要があるが, これは (24) を微分して (21) – (23) を代入することで以下のように与えられる.

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} = & \frac{1}{4\pi} \sum \Gamma_1 L_{23}^{-1} [L_{31}^{-2} B_K(L_{31}) - L_{12}^{-2} B_K(L_{12})] \\ & \cdot \left[(r - L_{23})(r - L_{31})(r - L_{12}) + r \sum (r - L_{31})(r - L_{12}) \right] \\ & - \frac{r}{2\pi} \sum \Gamma_1 L_{23}^{-1} [L_{31}^{-2} B_K(L_{31}) - L_{12}^{-2} B_K(L_{12})] (r - L_{31})(r - L_{12}). \end{aligned} \quad (26)$$

ここで $\sum$ の記号は 1, 2, 3 の記号の二つの数字の cyclic な組み合わせ全体で取るものとする. 例えば, $\sum L_{12} = L_{12} + L_{23} + L_{31}$ のような和を取る. 以上から, 方程式 (21) – (23) および (26) によって, 変数 $(L_{12}, L_{23}, L_{31}, A)$ に対する 4 次元の力学系が得られる. 前章で示したように, この方程式に対して M は保存量であるので, この保存量を使えば運動は変数 L_{23} と L_{31} に対する二次元系に縮約され, あとはハミルトニアンが不変であるということから, この変数に関する二次元空間の上でハミルトニアン of 等高線を書くことで, 三体 α 点渦の挙動を明らかにすることができる.

この方針で解析を進めるために, まずはハミルトニアン of 等高線をかく二次元相空間 (L_{23}, L_{31}) における, これらの変数の動ける範囲を調べる.

補題 1 $L_{23}^2/L_{31}^2 = k$ とする. このとき, ある実数 k_1 と k_2 で $0 < k_1 < 1 < k_2$ なるものが存在して, $|A| \geq 0$ は $k_1 \leq k \leq k_2$ と同値である.

証明: 条件 (18) と (19) から, 次を得る.

$$L_{12}^2 = -\frac{\Gamma_3}{\Gamma_1} L_{23}^2 - \frac{\Gamma_3}{\Gamma_2} L_{31}^2 = \frac{\Gamma_1 + k\Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2} L_{31}^2. \quad (27)$$

これを (25) に代入して,

$$k^2 + 1 + \left(\frac{\Gamma_1 + k\Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2} \right)^2 - 2k - 2 \frac{\Gamma_1 + k\Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2} - 2k \frac{\Gamma_1 + k\Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2} \leq 0,$$

これより, 以下の k に対する二次方程式を得る.

$$f(k) \equiv \Gamma_1^2 k^2 - 2(2\Gamma_1^2 + 3\Gamma_1\Gamma_2 + 2\Gamma_2^2)k + \Gamma_2^2 \leq 0.$$

二次方程式 $f(k) = 0$ の判別式は $4(\Gamma_1 + 2\Gamma_1\Gamma_2 + \Gamma_2^2)(\Gamma_1^2 + \Gamma_1\Gamma_2 + \Gamma_2^2) > 0$ なので, 二つの実数解 k_1 と k_2 が存在する. さらに, $f(0) = \Gamma_2^2 > 0$ および $f(1) = -3(\Gamma_1 + \Gamma_2)^2 < 0$ から $0 < k_1 < 1 < k_2$ も従う. したがって, $k_1 \leq k \leq k_2$ を得る. $\square$

次に, 二次元相空間における等高線の挙動を調べるため, 方程式 (21) – (23) と (26) の定常解を調べる. そのためにまずは, 以下を示す.

補題 2 三体 α 点渦一直線配置に対して, $\frac{dA}{dt} \neq 0$ が成り立つ.

証明は, 一直線配置であるという条件を (26) に代入して直接計算すれば得られる. 詳しくは論文 [32] を見よ. この事実から, 次を得る.

命題 2 標準方程式 (21)–(23) と (26) は、条件 (18) と (19) に対して、正三角形配置だけを定常解としてもつ。

証明は簡単である。 $\frac{dL_{23}^2}{dt} = \frac{dL_{31}^2}{dt} = \frac{dL_{12}^2}{dt} = 0$ から、配置は正三角形配置 $L_{12} = L_{23} = L_{31}$ あるいは一直線配置 $A = 0$ である。もし $L_{12} = L_{23} = L_{31}$ ならば、 $\frac{dA}{dt} = 0$ なので、正三角形配置は定常解である。一方で、 $A = 0$ ならば、 $\frac{dA}{dt} \neq 0$ であることが補題 2 からわかるので、一直線配置は定常解ではない。 □

既を示したように三体 α 点渦問題は可積分なので、その運動はハミルトニアン (12) の等高線を補題 1 で示した範囲内で描くことで記述することができる。Newton[27] の本に書かれているのと同様に、条件 (19) を考慮して、以下の変数を導入する。

$$b_1 = \frac{L_{23}^2}{\Gamma_1}, \quad b_2 = \frac{L_{31}^2}{\Gamma_2}, \quad b_3 = \frac{L_{12}^2}{\Gamma_3},$$

これを使うと、ハミルトニアンは b_1, b_2, b_3 を用いて以下のように書ける。

$$H_0 = -\frac{\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3}{4\pi} \left[\frac{1}{\Gamma_1} \log \frac{\Gamma_1 b_1}{\Gamma_3 b_3} + \frac{1}{\Gamma_2} \log \frac{\Gamma_2 b_2}{\Gamma_3 b_3} \right],$$

$$H_1 = -\frac{\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3}{4\pi} \left[\frac{2}{\Gamma_1} \left(K_0 \left(\sqrt{\Gamma_1 b_1} \right) - K_0 \left(\sqrt{\Gamma_3 b_3} \right) \right) + \frac{2}{\Gamma_2} \left(K_0 \left(\sqrt{\Gamma_2 b_2} \right) - K_0 \left(\sqrt{\Gamma_3 b_3} \right) \right) \right].$$

条件 (19) から、 $b_1 + b_2 + b_3 = 0$ であるから、 b_3 は b_1, b_2 から求められるので、我々は二次元相平面 (b_1, b_2) に等高線を書く。補題 1 で得られた条件はこの相平面上では、原点を通る二直線に囲まれたくさび型の領域 $k_1 \leq \frac{L_{23}^2}{L_{31}^2} = \frac{\Gamma_1 b_1}{\Gamma_2 b_2} \leq k_2$ を表している。このくさび型領域の境界上の点は、 $A = 0$ となっているので、一直線配置を表現していることに注意する。一方で、原点を通る直線 $\frac{\Gamma_1 b_1}{\Gamma_2 b_2} = 1$ も等高線となっているが、この上の点は正三角形定常配置に対応している。補題 2 から、三体 α 点渦系の定常配置は正三角形配置しかないの、くさび領域の内部 $k_1 \leq \frac{\Gamma_1 b_1}{\Gamma_2 b_2} < 1$ および $1 < \frac{\Gamma_1 b_1}{\Gamma_2 b_2} \leq k_2$ の上にある点に対応する三つの α 点渦は、その等高線にそって時間発展する。

図 1 は、点渦の強さが $\Gamma_2 = 1$ を固定して、(a) $\Gamma_1 = 1$ および (b) $\Gamma_1 = 5$ とした時の等高線の様子である。等高線のうち原点につながっているのは $\frac{\Gamma_1 b_1}{\Gamma_2 b_2} = 1$ に相当する直線だけであり、この直線上の点はすべて（相似な）正三角形定常配置の集合に対応している。それ以外の等高線はすべて原点にはつながらず、境界の直線につながっている。これらの図において相空間が (b_1, b_2) の上で等高線を見ているので、それらの上の各点は合同だが、向き付け面積の向き A が異なる三体 α 点渦の二つの配置 $(L_{12}, L_{23}, L_{31}, A)$ と $(L_{12}, L_{23}, L_{31}, -A)$ を表していることに注意する。このことから、この等高線図は同じ二枚の等高線図をくさび型領域の境界で貼り合わせたようなものと見なせる。すなわち表側の等高線は $A > 0$ に対応する配置、裏側は $A < 0$ に対応する配置を表している。したがって、今、ある等高線上の表側に一点を定めると、その点に対応する三体 α 点渦の時間発展とともに等高線の上を移動し、くさび型領域の境界に達して一直線配置になったあと、裏側にある同じ等高線の上を進んでいく。このくさび型領域の境界に対する等高線の対称性は、三体 α 点渦の運動の一直線配置に対する対称性に対応するので、一般性を失うことなく我々は三体 α 点渦の初期値を一直線配置、すなわち $A(0) = 0$ としてよい。この時、任意の t に対して、 $L_{mn}(t) = L_{mn}(-t)$ および $A(t) = -A(-t)$ が成立することがすぐにわかる。

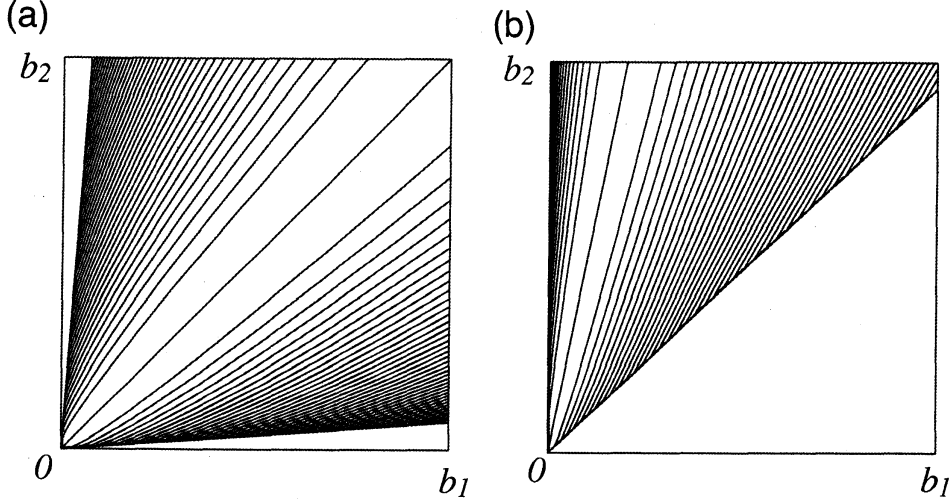


図 1: 二次元相平面 (b_1, b_2) におけるハミルトニアン²の等高線図の例. α 点渦の強さは $\Gamma_2 = 1$ は固定し, (a) $\Gamma_1 = 1$ および (b) $\Gamma_1 = 5$ としている.

以上より, α 点渦の $t \rightarrow \pm\infty$ での運動は, ハミルトニアン²の等高線の $b_1 \rightarrow \infty$ での振る舞いを調べることで特徴づけられる. まず, $b_1 \neq 0$ であることから, $b_2 \neq 0$ であることは等高線からすぐにわかる. 次に, $b_1 \rightarrow \infty$ の時に $b_2 \rightarrow \infty$ であることを示す. 今, $b_2 \rightarrow b < \infty$ であると仮定すると, $b_1 + b_2 + b_3 = 0$ から $b_3 \rightarrow -\infty$ とならなければならないが, 保存量であるハミルトニアン H における H_1 が有界である一方で

$$\Gamma_3 b_3 = \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2} (b_1 + b_2)$$

から, H_0 は $b_1 \rightarrow \infty$ かつ $b_2 \rightarrow b < \infty$ の時

$$H_0 = -\frac{\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3}{4\pi} \left[\frac{1}{\Gamma_1} \log \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{\Gamma_2(1 + b_2/b_1)} + \frac{1}{\Gamma_2} \log \frac{(\Gamma_1 + \Gamma_2)b_2/b_1}{\Gamma_1(1 + b_2/b_1)} \right] \rightarrow \infty \quad (28)$$

となる. これはハミルトニアンが保存量であることと矛盾する. よって, $b_2 \rightarrow \infty$ でなければならない. 次に, $b_1 \rightarrow \infty$ の時, b_1 と b_2 の比が有限 $b_2/b_1 \rightarrow \infty$ であると仮定する. このとき, 第一項 (28) は $-\infty$ に発散するが, これもまたハミルトニアン²の保存性に矛盾するので, b_2/b_1 はあるゼロでない定数に収束する. このことはハミルトニアン²の等高線が $b_1, b_2 \rightarrow \infty$ となるとき, 漸近的に直線 $\frac{L_{23}^2}{L_{31}^2} = \frac{\Gamma_1 b_1}{\Gamma_2 b_2} = \text{const.}$ に収束することを主張している. したがって, α 点渦の運動は $t \rightarrow \pm\infty$ で自己相似解に漸近することがわかる. 同時に $b_1 \rightarrow \infty$ および $b_2 \rightarrow \infty$ から $L_{mn} \rightarrow \infty$ なので, 方程式 (21) – (23) は $B_K(x) \rightarrow 1, x \rightarrow \infty$ であることから, 点渦の方程式に近づく. さらに, ハミルトニアン²の第二項 H_1 は $K_0(x) \rightarrow 0, x \rightarrow \infty$ であることからゼロに収束するので, 第一項 H_0 に関する以下の収束を得る.

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} H_0(L_{mn}(t)) = H. \quad (29)$$

まとめると, $t \rightarrow \pm\infty$ で, 三体 α 点渦の運動は漸近的に自己相似的な三体点渦問題²の自己相似解に収束することがわかる. 言い換えると (20) および $L_{mn}(t) = L_{mn}(-t)$ に注意すると, あ

る定数 $C_\infty > 0$ が存在して $L_{mn}(t)$ は漸近的に以下のように収束する.

$$L_{mn}(t) \longrightarrow C_\infty \sqrt{|t|}, \quad t \rightarrow \pm\infty. \quad (30)$$

3.2 $\alpha \rightarrow 0$ の極限

前節で与えられた三体 α 点渦の運動に基づいて, α がゼロに近づくときの挙動について調べ, それに伴ってエネルギー $E^{(\alpha)}$ やエンストロフィー $\mathcal{Z}^{(\alpha)}$ がどう変化するかを調べる. まず, 三体 α 点渦の $\alpha \rightarrow 0$ の極限の軌道はスケーリング則 (11) から求められる. $\alpha \rightarrow 0$ の極限において, $t \neq 0$ に対して $|t|/\alpha^2 \rightarrow \infty$ であることに注意すると, (30) から,

$$l_{mn}(t) = \alpha L_{mn}\left(\frac{t}{\alpha^2}\right) \longrightarrow C_\infty \alpha \frac{\sqrt{|t|}}{\alpha} = C_\infty \sqrt{|t|}, \quad \alpha \rightarrow 0$$

を得る. このことは三体 α 点渦のなす三角形の運動は $t < 0$ で, 無限遠点から自己相似的に原点に衝突する軌道に $t > 0$ に対しては, 原点から湧き出して無限遠点に自己相似的に拡大していく解に収束していく.

エネルギーの時間変動 $E^{(\alpha)}$ は標準方程式の解 $L_{mn}(t)$ から以下のように書くことができる.

$$\begin{aligned} E^{(\alpha)}(\alpha^2 t) &= -\frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^3 \sum_{n=m+1}^3 \Gamma_m \Gamma_n \left[\log \frac{l_{mn}(\alpha^2 t)}{\alpha} + K_0 \left(\frac{l_{mn}(\alpha^2 t)}{\alpha} \right) + \frac{l_{mn}(\alpha^2 t)}{2\alpha} K_1 \left(\frac{l_{mn}(\alpha^2 t)}{\alpha} \right) \right] \\ &= -\frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^3 \sum_{n=m+1}^3 \Gamma_m \Gamma_n \left[\log L_{mn}(t) + K_0(L_{mn}(t)) + \frac{1}{2} L_{mn}(t) K_1(L_{mn}(t)) \right] \\ &= H - \frac{1}{4\pi} \sum_{m=1}^3 \sum_{n=m+1}^3 \Gamma_m \Gamma_n L_{mn}(t) K_1(L_{mn}(t)). \end{aligned} \quad (31)$$

したがって, $\tau = \alpha^2 t$ に対して, 以下を得る.

$$E^{(\alpha)}(\tau) = H - \frac{1}{4\pi} \sum_{m=1}^3 \sum_{n=m+1}^3 \Gamma_m \Gamma_n L_{mn}\left(\frac{\tau}{\alpha^2}\right) K_1\left(L_{mn}\left(\frac{\tau}{\alpha^2}\right)\right) \equiv H + H_K\left(\frac{\tau}{\alpha^2}\right). \quad (32)$$

このことから, τ を一つ固定した時, エネルギー $E^{(\alpha)}(\tau)$ は $\alpha \rightarrow 0$ の極限において, H に収束する一方で, $\tau = 0$ の近傍でエネルギー変動はローカライズして, $\tau = 0$ の点 (つまり三点渦が衝突する時刻) では不連続になり, その不連続変動量は以下ようになる.

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} E^{(\alpha)}(0) - H = -\frac{1}{4\pi} \sum_{m=1}^3 \sum_{n=m+1}^3 \Gamma_m \Gamma_n L_{mn}(0) K_1(L_{mn}(0)) = H_K(0).$$

図 2(a) は, $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 1$ の時の, 様々な α に対して, エネルギー $E^{(\alpha)}(\tau)$ をプロットしたものである. エネルギーが点渦の衝突時刻における $t = 0$ 近傍にローカライズして, $\tau = 0$ で有限の「飛び」を持つ不連続関数になっている様子がわかる. この現象は α 正則化によるフィルタリング効果が α 点渦が衝突するに従って大きくなることで起こる現象である. 収束関数の $t = 0$ における不連続変動量 $H_K(0)$ を図 2(b) に示す. 衝突時刻 $t = 0$ における解は, 初期値における一直線配置に対応しているので, そのすべての配置に対して $H_K(0)$ を計算できる. いずれの

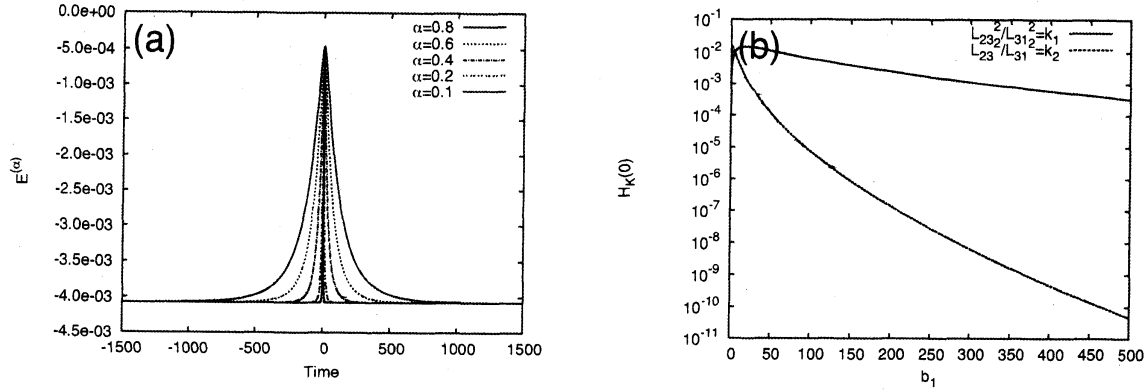


図 2: (a) 様々な α に対する, エネルギー $E^{(\alpha)}$ の様子. $\alpha \rightarrow 0$ につれて, $t \neq 0$ では一定値に近づく一方で, $t = 0$ の近傍にエネルギー変動がローカライズしており, 不連続関数に収束していることがわかる. (b) 時刻 0 における, エネルギーの変動量 $H_K(0)$ の様子. 三体 α 点渦の強さは $\Gamma_1, \Gamma_2 = 1$ である.

場合も変動量は正であることから, 初期値によらずエネルギーの不連続変動は正であることがわかる.

散逸的弱解であるかどうかを見るためにエネルギー散逸率を考える. エネルギー散逸率 $\mathcal{D}_E^{(\alpha)}(\tau)$ は (32) を微分して得られる.

$$\mathcal{D}_E^{(\alpha)}(\tau) = \frac{1}{4\pi\alpha^2} \sum_{m=1}^3 \sum_{n=m+1}^3 \Gamma_m \Gamma_n \frac{dL_{mn}}{d\tau} \left(\frac{\tau}{\alpha^2} \right) L_{mn} \left(\frac{\tau}{\alpha^2} \right) K_0 \left(L_{mn} \left(\frac{\tau}{\alpha^2} \right) \right) \equiv \frac{1}{\alpha^2} F \left(\frac{\tau}{\alpha^2} \right).$$

ただし, 関数 $F(\tau)$ は次のように定義されている.

$$F(\tau) = \frac{1}{4\pi} \sum_{m=1}^3 \sum_{n=m+1}^3 \Gamma_m \Gamma_n \frac{dL_{mn}}{d\tau}(\tau) L_{mn}(\tau) K_0(L_{mn}(\tau)). \quad (33)$$

図 3(a) は $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 1$ に対する, $F(\tau)$ を示している. この関数は奇関数であることに注意しよう. また, その $\alpha \rightarrow 0$ の収束の様子を図 3(b) に示す. 時間が $\tau \neq 0$ の時, エネルギー散逸率は $\alpha \rightarrow 0$ で, $\tau = 0$ でローカライズし, その最大値・最小値はそれぞれ正・負の無限大に発散している. 他の強さを持つ三体 α 点渦の運動に対しても, 同様の挙動が得られる. この関数の収束先は関数ではないので, 超関数の意味でその収束を考える. 関数 $F(\tau)$ は奇関数, つまり $F(\tau) + F(-\tau) = 0$ なので, 任意のコンパクトサポートを持つ C^∞ 関数 $\varphi(\tau)$ に対して, $\alpha \rightarrow 0$ に対して

$$\left\langle \mathcal{D}_E^{(\alpha)}, \varphi \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2} F \left(\frac{\tau}{\alpha^2} \right) \varphi(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} F(s) \varphi(\alpha^2 s) ds \rightarrow \varphi(0) \int_{-\infty}^{\infty} F(s) ds = 0,$$

を得る. したがって, 次を次を得る.

定理 1 条件 (18) と (19) が成り立つとき, 三体 α 点渦系に対するエネルギー散逸率 $\mathcal{D}_E^{(\alpha)}$ は超関数の意味でゼロに収束する. すなわち,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathcal{D}_E^{(\alpha)} = 0 \quad \text{in } \mathcal{D}'.$$

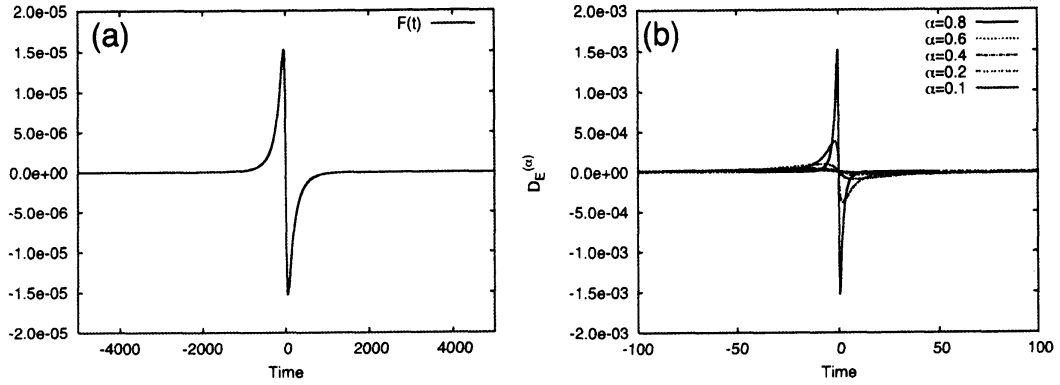


図 3: (a) $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 1$ に対する関数 $F(\tau)$ の様子. (b) これに対応したエネルギー散逸率 $D_E^{(\alpha)}(t)$ の $\alpha \rightarrow 0$ の収束の様子.

この事実は、エネルギー $E^{(\alpha)}$ の $\tau = 0$ における不連続変動が有限であり、超関数の意味では無視できることから自然な結果である。

二次元乱流との関連で考えると、エネルギー散逸率が超関数の意味でゼロであるという事実は自然なものである。というのも二次元乱流を特徴づけるのはエネルギー散逸ではなくエンストロフィーの散逸だからである。そこで、以下ではエンストロフィーの時間変動が $\alpha \rightarrow 0$ の極限においてどのようなになるかを調べることにする。エンストロフィー (6) は以下のように書ける。

$$Z^{(\alpha)}(\alpha^2 t) = \frac{1}{4\pi\alpha^2} \sum_{m=1}^3 \sum_{n=m+1}^3 \Gamma_n \Gamma_m L_{mn}(t) K_1(L_{mn}(t)).$$

したがって、 $\tau = \alpha^2 t$ に対して、以下を得る。

$$Z^{(\alpha)}(\tau) = \frac{1}{4\pi\alpha^2} \sum_{m=1}^3 \sum_{n=m+1}^3 \Gamma_m \Gamma_n L_{mn}\left(\frac{\tau}{\alpha^2}\right) K_1\left(L_{mn}\left(\frac{\tau}{\alpha^2}\right)\right) = -\frac{1}{\alpha^2} H_K\left(\frac{\tau}{\alpha^2}\right). \quad (34)$$

ここで、再びエネルギー変動の大きさを表すのに登場した関数 $H_K(\tau)$ が登場している。時間 $\tau \neq 0$ の時、この関数はゼロに収束する一方で $\tau = 0$ では発散するので、このエンストロフィーの時間変動 $Z^{(\alpha)}(\tau)$ の極限は通常の関数ではない。そこで、超関数の意味での収束を考えると次をえる。

定理 2 条件 (18) と (19) が成り立つとき、三体 α 点渦系に対するエンストロフィー $Z_E^{(\alpha)}$ は超関数の意味で以下のように収束する。

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} Z^{(\alpha)} = -z_0 \delta \quad \text{in } \mathcal{D}'.$$

ただし、 z_0 は以下で与えられる定数である。

$$z_0 = \int_{-\infty}^{\infty} H_K(s) ds.$$

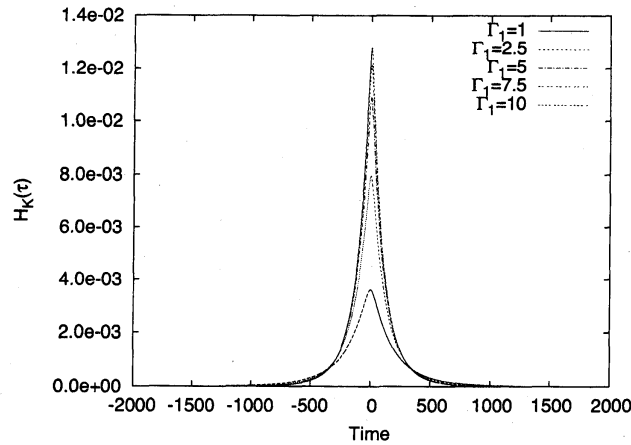


図 4: エンストロフィーの時間変動を表す関数 $H_K(\tau)$ を様々な強さ Γ_1, Γ_2 に対して数値計算したもの、ここでは α 点渦の強さは $\Gamma_1 = 1, 2.5, 5, 7.5, 10$ および $\Gamma_2 = 1$ を用いている。

証明は簡単で、任意のコンパクトサポートを持つ滑らかな関数 $\varphi(\tau)$ に対して、 $\alpha \rightarrow 0$ の時

$$\langle Z^{(\alpha)}, \varphi \rangle = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2} H_K \left(\frac{\tau}{\alpha^2} \right) \varphi(\tau) d\tau = - \int_{-\infty}^{\infty} H_K(s) \varphi(\alpha^2 s) ds \longrightarrow -z_0 \varphi(0).$$

より明らかである。なお、図4に見るように、関数 $H_K(t)$ が常に正であることから、 z_0 は正であることがわかる。したがって、エンストロフィーの時間変動の極限は負の重みをもつ δ 関数に収束することから、エンストロフィーが衝突時刻 $\tau=0$ において散逸することがわかる。別の表現を用いれば、エネルギーの全変動は以下のように収束している。

$$\int_{-\infty}^T Z^{(\alpha)}(\tau) d\tau \longrightarrow -z_0 \mathcal{H}.$$

ここで、 $\mathcal{H}$ は $\tau=0$ で値が不連続になる Heaviside 関数を表している。このことから、衝突が起こる直前まではエネルギーの全変動はゼロであるが、 $\tau=0$ の時間を超えると $-z_0$ だけその値を減ずることがわかる。これは三体衝突による超関数の意味でのエンストロフィーの散逸に他ならない。

4 今後の展望

我々は、二次元空間における Euler 方程式の正則化方程式としての Euler- α 方程式を考え、その正則化パラメータ α のゼロ極限を考えることにより二次元 Euler 方程式のエネルギーやエンストロフィーを散逸するような解を具体的に構成した。そのために、特異な渦度初期分布である δ 測度を初期値に持つ α 点渦系を導入し、その運動の中で得られる解の極限を考えた。もとの（正則化していない）点渦系において三点渦が有限時間で自己相似的に一点に衝突するような解が得られるのと同じ条件の下で三体 α 点渦の運動を求め、その極限を取った。その結果、自己相似衝突と自己相似拡大する三点渦運動が一つの解として衝突時刻を超えて接続できることがわかり、その軌道に沿ってエネルギーやエンストロフィーの変動を調べると、超関数の意

味でエネルギーは保存、エンストロフィーは衝突を経て散逸することがわかった。こうしたエンストロフィー散逸を伴うような解の具体的構成は初めて与えられたものである、以下、この事実を踏まえて今後の展望について書いておく。

乱流の数学理論における最終目的は乱れた流れ場をそのサポートに持つ(乱流)確率測度を構成することである。直接的にこのような確率測度が満たすべき方程式を求めて、それを解くことでこうした測度を構成することも考えられるが、そのような試みは今のところ成功していない。次に考えられる方法としては、こうした確率測度が存在すると仮定して、そのサポートにある流れ場がどのような性質を満たすかを記述していくことで、確率測度の性質を浮き上がらせようというものである。三次元一様等方乱流における Onsager 予想や Euler 方程式の散逸的弱解を巡る Duchon & Robert[9] や Eyink[11] の議論はこうした背景のもとで研究が行われているといってもよい。本研究でも、この方針に従って、二次元乱流を記述する特異な Euler 方程式の弱解があるか、あるとすればどのような流れがそれに対応するかを調べたものである。三次元とは違い二次元の場合には、エネルギー散逸弱解ではなくて、エンストロフィー散逸弱解が重要である。また、二次元 Euler 方程式では解の存在や一意性、さらにそれらの解の様々な性質も知られているため、それらの事実と矛盾しないような解の構成が必要であった。そこで、我々は二次元 Euler- α 方程式の点渦解の相当する時間大域的弱解を考えその $\alpha \rightarrow 0$ の極限を考えた。自己相似的に衝突する三体 α 点渦の挙動は、まさにこのようなエンストロフィー散逸を見せる特異な弱解の候補となっている。今後はこれ以外に、こうした弱解を考え、二次元乱流を記述する解の集合の性質を調べるのが重要であろう。

このような観点から α 点渦系をもっと系統的に調べるのが大切である。まずは、今回は 3 点 α 点渦系で自己相似的な挙動を持つ解を詳しく調べたが、より一般にある条件の下で N 点渦系にも自己相似的に一点衝突するような解が構成できることが木村 [20] によって示されており、これと同じ条件で N 点 α 点渦系の挙動を調べて $\alpha \rightarrow 0$ の極限がエンストロフィーを散逸するか調べることは重要であろう。特に、今回の三体問題では α 点渦系が可積分であるという事実を用いて厳密な解の構成に成功しているが、一般に四体以上の問題では可積分ではないので、その解析は難しくなる。また系の非可積分性により、こうした自己相似衝突解を摂動した場合カオス的な挙動が見られるかもしれない、こうした複雑挙動に対する $\alpha \rightarrow 0$ の極限がエンストロフィーを散逸するか？また散逸としたら、二次元乱流の性質とどのような関係を持つかを調べることは興味深い問題である。また、自己相似衝突は起こらないような一般の条件における α 点渦系の挙動に対する $\alpha \rightarrow 0$ の極限を考えることも大切である。しかし、この場合は一つだけ注意しなければならない点がある。標準方程式の解からスケーリング則 (11) に従って極限を取る際、もし標準方程式の解の軌道が相空間内の有界領域にとどまっている場合は、極限をとるとゼロ軌道に収束することに注意しよう。すなわち α 点渦系の有界軌道の集合は極限においては、あまり意味をなさない。そのため非有界な軌道を考える必要があり、今回得られた自己相似解はそうした非有界軌道の代表であり、さらにはスケーリング則 (11) に対して不変な軌道であることもわかる。

最後に、数学的な困難について触れておく。これまでに述べたように、 α 点渦系の軌道は二次元 Euler- α 方程式の弱解を与えている一方で、点渦系の軌道は二次元 Euler 方程式の弱解ではない。したがって、ここで得られた α 点渦の軌道の $\alpha \rightarrow 0$ の極限が二次元 Euler 方程式の弱解とどう関係するかを調べることは、上で述べた α 点渦系の挙動と二次元乱流の関係を探るためには避けて通れない数学的な問題である。一方で、同じラドン測度の渦度分布として渦度が線分布している渦層の場合は、Euler- α 方程式と Euler 方程式ともに弱解になっており、Bardos

ら [3] によれば, $\alpha \rightarrow 0$ の極限において α 渦層の解は渦層解に (その解が存在する限り) 収束することが示されている.

参考文献

- [1] AREF, H. 1979 Motion of three vortices. *Phys. Fluids* **22**(3), 393–400.
- [2] BATCHELOR, G. K. 1969 Computation of the energy spectrum in homogeneous two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids Suppl. II* **12**, 233–239.
- [3] BARDOS, C., LINSHIZ, J. S. AND TITI E. S. 2010 Global regularity and convergence of a Birkhoff-Rott- α approximation of the dynamics of vortex sheets of the two-dimensional Euler equations. *Comm. Pure Appl. Math.* **63**, 697–746.
- [4] CHEN, S., FOIAS, C., HOLM, D. D., OLSON, E., TITI, E. S. AND WYNNE, S. 1998 Camasa-Holm equations as a closure model for turbulent channel and pipe flow. *Phys. Rev. Lett.* **81**(24), 5338–5341.
- [5] CHEN, S., HOLM, D. D., MARGOLIN, L. G. AND ZHANG, R. 1999 Direct numerical simulations of the Navier-Stokes alpha model. *Phys. D* **133**, 66–83.
- [6] CONSTANTIN, P., E, W. & TITI, E. S. 1994 Onsager’s Conjecture on the Energy Conservation for Solutions of Euler’s Equation. *Comm. Math. Phys.* **165**, 207–209.
- [7] DIPERNA, R. J. & MAJDA, A. J. 1987 Concentrations in regularizations for 2-D incompressible flow. *Comm. Pure Appl. Math.* **40**, 301–345.
- [8] DELROIT, J. -M. 1991 Existence de nappe de tourbillon en dimension deux. *J. Amer. Math. Soc.* **4**, 553–586.
- [9] DUCHON, J. & ROBERT, R. 2000 Inertial energy dissipation for weak solutions of incompressible Euler and Navier–Stokes equations. *Nonlinearity* **13**, 249–255.
- [10] EYINK, G. L. 2001 Dissipation in turbulence solutions of 2D Euler equations. *Nonlinearity* **14**, 787–802.
- [11] EYINK, G. L. 2003 Local 4/5-law and energy dissipation anomaly in turbulence. *Nonlinearity* **21**, 1233–1252.
- [12] EYINK, G. L. & SREENIVASAN, K. R. 2006 Onsager and the theory of hydrodynamic turbulence. *Rev. Modern Phys.* **78**, 87–135.
- [13] FOIAS, C., HOLM, D. D. AND TITI, E. S. 2001 The Navier-Stokes-alpha model of fluid turbulence. *Physica D* **152–153**, 505–519.
- [14] FOIAS, C., HOLM, D. D. AND TITI, E. S. 2002 The three dimensional viscous Camassa-Holm equations, and their relation to the Navier-Stokes equations and turbulence theory. *J. Dyn. Diff. Eq.* **14**, 1–35.

- [15] HOU, T. Y. AND LI, C. 2006 On global well-posedness of the Lagrangian averaged Euler equations. *SIAM J. Math. Anal.* **38**(3), 782–794.
- [16] HOLM, D. D. 2002 Variational principles for Lagrangian-averaged fluid dynamics. *J. Phys. A* **35**, 679–688.
- [17] HOLM, D. D. AND MARSDEN, J. E. 1998 The Euler-Poincaré equations and semidirect products with applications to continuum theories. *Adv. Math.* **137**, 1–81.
- [18] HOLM, D. D., MARSDEN, J. E. AND RATIU T. S. 1998 Euler-Poincaré models of ideal fluids with nonlinear dispersion. *Phys. Rev. Lett.* **80**(19), 4173–4176.
- [19] HOLM, D. D. NITSCHKE, M. & PUTKARADZE V. 2006 Euler-alpha and vortex blob regularization of vortex filament and vortex sheet motion. *J. Fluid Mech.* **555**, 149–176.
- [20] KIMURA, Y. 1987 Similarity solution of two-dimensional point vortices. *J. Phys. Soc. Japan* **56**, 2024–2030.
- [21] KRAICHNAN, R. H. 1967 Inertial ranges in two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids* **10**, 1417–1423.
- [22] LEITH, C. E. 1968 Diffusion approximation for two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids* **11**, 671–672.
- [23] LINSHIZ, J. S. AND TITI, E. S. 2010 On the convergence rate of the Euler- α , an inviscid second-grade complex fluid, model to the Euler equations. *J. Stat. Phys.* **138**, 305–332. (doi:10.1007/s10955-009-9916-9)
- [24] LUNASIN, E., KURIEN, S., TAYLOR, M. A. AND TITI, E. S. 2007 A study of the Navier-Stokes- α model for two-dimensional turbulence. *J. Turbulence* **8**, 1–21. (doi:10.1080/14685240701439403)
- [25] MARSDEN, J. E. & SHKOLLER, S. 2003 The anisotropic Lagrangian averaged Euler and Navier-Stokes equations. *Arch. Ration. Mech. Anal.* **166**, 27–46.
- [26] MOHSENI, K., KOSOVIC, B., SHKOLLER, S. AND MARSDEN, J. E. 2003 Numerical simulations of the Lagrangian averaged Navier-Stokes equations for homogeneous isotropic turbulence. *Phys. Fluids* **15**(2), 524–544.
- [27] NEWTON, P. K. 2001 *The N-vortex problem, Analytical techniques*. Springer-Verlag.
- [28] NOVIKOV, E. A. 1976 Dynamics and statistics of a system of vortices. *Sov. Phys.-JETP* **41**, 937–943.
- [29] NOVIKOV, E. A. & SEDOV, Y. B. 1979 Vortex collapse. *Sov. Phys. JETP* **50**(2), 297–301.
- [30] OLIVER, S. & SHKOLLER, S. 2001 The vortex blob method as a second-grade non-Newtonian fluid. *Comm. Partial Diff. Eq.* **26**, 295–314.

- [31] ONSAGER, L. 1949 Statistical hydrodynamics. *Nuovo Cimento Suppl.* **6**, 279–289.
- [32] SAKAJO, T. 2012 Instantaneous energy and enstrophy variations in Euler-alpha point vortices via triple collapse. *J. Fluid Mech.* submitted.
- [33] SHKOLLER, S. 2001 Smooth global Lagrangian flow for the 2D Euler and second-grade fluid equations. *Appl. Math. Lett.* **14**, 539–543.
- [34] SYNGE, J. L. 1949 On the motion of three vortices. *Can. J. Math.* **1**, 257–270.
- [35] WATSON, G. N. 2008 *A treatise on the theory of Bessel functions*. Merchant Books.