

小林計量の凸性について

小林正史 (Masashi Kobayashi) *

$D \subset \mathbb{C}^m$ を taut な領域, つまり, 単位円板 $\Delta := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ から D への正則写像全体 $\mathcal{O}(\Delta, D)$ が正規族となるような領域とする. $TD \cong D \times \mathbb{C}^m$ と自然に思う. このとき, D 上の Kobayashi-Royden 計量 [5]

$$F_D(z; v) := \inf \{t > 0 \mid f \in \mathcal{O}(\Delta, D), tf'(0) = v, f(0) = z\}$$

は次の性質を満たす.

- (i) F_D は連続,
- (ii) $F_D(z; v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$,
- (iii) 任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ について,

$$F_D(z; \lambda v) = |\lambda| F_D(z; v).$$

後に例をあげるが $F_D(z; \cdot)$ は凸 (i.e. $F_D(z; \cdot)$ がノルム) とは限らないことに注意する.

F_D を用いて D 上の Kobayashi 距離 d_D を次のように定義する.

$$d_D(z, w) := \inf_c \int_c 2F_D(c(t), c'(t)) dt.$$

ここで, c は z と w を結ぶ D 内の曲線を動くとする.

S. Kobayashi は [3] で F_D が凸とは限らないことを克服するために F_D の再双対である Kobayashi-Busemann 計量 $\hat{F}_D$ を導入した. $\hat{F}_D$ は上の 3 つの性質を満たす. さらに,

*東京大学大学院数理科学研究科

$\hat{F}_D(z; \cdot)$ は凸であり

$$d_D(z, w) = \inf_c \int 2\hat{F}_D(c(t), c'(t)) dt$$

が成り立つ.

元来 d_D は次のように定義されていた.[2] p を Δ 上の Poincaré 距離とする. $D \times D$ 上の Lempert 関数 d_D^* を

$$d_D^*(z, w) := \inf \{p(a, b) | f \in \mathcal{O}(\Delta, D), z = f(a), w = f(b)\}$$

と定義する. これは一般には D 上の距離ではない. そこで

$$d_D(z, w) := \lim_{l \rightarrow \infty} d_D^{(l)}(z, w)$$

とする. ここで

$$d_D^{(l)}(z, w) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^l d_D^*(z_j, z_{j+1}) \mid z = z_1, z_2, \dots, z_l, z_{l+1} = w \in D \right\}$$

とした.

d_D は F_D または $\hat{F}_D$ の積分形でかけるわけだが, ここでは次のような問題を考える.

問題 1 d_D の方向微分は存在するのか? また存在するとしたら F_D または $\hat{F}_D$ のどちらになるのか? つまり

$$\lim_{\substack{z, w \rightarrow z_0 \\ z \neq w \\ \frac{z-w}{\|z-w\|} \rightarrow v}} \frac{d_D(z, w)}{\|z-w\|} = F_D(z_0; v) \quad \text{または} \quad \hat{F}_D(z_0; v)$$

が成り立つのか?

問題 2 F_D が凸になる必要十分条件は何か?

まず $F_D(z_0; \cdot)$ が凸でない例をあげておく. T. J. Barth は [1] で $D \subset \mathbb{C}^m$ が擬凸 Balanced 領域 (i.e. 任意の $\lambda \in \Delta$ について $\lambda D \subset D$ が成り立つ) のとき, $F_D(0; \cdot) = \rho(\cdot)$ であることを示した. ここで, $\rho(\cdot)$ は D の Minkowski 関数である. したがって, 例えば

$$D := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1| < 1, |z_2| < 1, |z_1 z_2| < 1/2\}$$

のとき, $F_D(0; \cdot)$ は凸でないことがわかる.

これらの問題に関連して M. Y. Pang は [4] で

$$\lim_{\substack{z, w \rightarrow z_0 \\ z \neq w \\ \frac{z-w}{\|z-w\|} \rightarrow v}} \frac{d_D^*(z, w)}{\|z-w\|} = \hat{F}_D(z_0; v)$$

であることと, z_0 が Kobayashi simple (i.e. z_0 の開近傍 U があって, 任意の $z \in U$ に対して $d_D(z_0, z) = d_D(z, z_0)$ が成り立つ) ならば $F_D(z_0; \cdot)$ が凸であることの2つを示した. また $F_D(z_0; \cdot)$ が凸であるならば z_0 が Kobayashi simple か? という問題を問題提起している.

問題の答えとして次を得た.

定理 $D \subset \mathbb{C}^m$ を taut 領域とし, $z_0 \in D$ とする.

(i) $l \geq 2m$ ならばすべての $v \in \mathbb{C}^m$ に対して

$$\lim_{\substack{z, w \rightarrow z_0 \\ z \neq w \\ \frac{z-w}{\|z-w\|} \rightarrow v}} \frac{d_D^{(l)}(z, w)}{\|z-w\|} = \hat{F}_D(z_0; v)$$

が成り立つ.

(ii) すべての $v \in \mathbb{C}^m$ に対して

$$\lim_{\substack{z, w \rightarrow z_0 \\ z \neq w \\ \frac{z-w}{\|z-w\|} \rightarrow v}} \frac{d_D(z, w)}{\|z-w\|} = \hat{F}_D(z_0; v)$$

つまり, d_D の方向微分は存在して $\hat{F}_D$ になるということである. この定理から, $F_D(z_0; \cdot)$ が凸となる必要十分条件を得た.

系 次の2条件は同値.

(i) $F_D(z_0; \cdot)$ は凸.

(ii) $\lim_{\substack{z, w \rightarrow z_0 \\ z \neq w}} \frac{d_D(z, w)}{d_D^{(1)}(z, w)} = 1.$

M. Y. Pang の結果と定理から系が成り立つことは明らかであろう. またこの系は z_0 が Kobayashi simple なら $F_D(z_0; \cdot)$ が凸, の別証明になっていることを注意しておく.

参考文献

- [1] T. J. Barth, *The Kobayashi indicatrix at the center of a circular domain*, Proc. Amer. Math. Soc. 88 (1983), pp. 527-530
- [2] S. Kobayashi, *Hyperbolic Manifolds and Holomorphic Mappings*, Pure and Appl. Math 2. M. Dekker, 1970.
- [3] S. Kobayashi, *A new invariant infinitesimal metric*, International Journ. Math. Sci. 58 (1990) pp. 357-416
- [4] M. Y. Pang, *On infinitesimal behavior of the Kobayashi distance*, Pacific Journ. Math. Vol. 162 No. 1 (1994) pp.121-141
- [5] H. L. Royden, *Remarks on the Kobayashi metric in "Several complex variables II"*, Lecture Notes in Math. 189, Springer Verlag 1971 pp.125-137