

E_7 型 Weyl group の Springer 表現

千葉大 理学部 村二徹

§ 1. 序論

根型代数群の表現論により、Springer 表現の重要な意味を持つ。ここでは、Springer 表現の Lusztig 流の approach である (Lusztig-Spaltenstein; 3.5) ([Ikeda-Springer; 1.4] の一般化) を紹介する。それを用いて、初等的考察により、 E_7 型の Springer 表現がある程度決定できる。(著者修士論文)

§ 2. Induced unipotent classes

$\mathfrak{g}$ は p 中 $\mathbb{C}$, $p, \mathfrak{g} + \mathfrak{a}$ とする。

G con. reductive alg. gr. defined over $\mathbb{F}_q$

B Borel subgroup

T max. torus

W Weyl group of T in G

P parabolic subgr., s.t. $P > B$

$P = L \cup P$ Levi decomposition

U_P unipotent radical of P

L Levi subgr. defined over $\mathbb{F}_q$, s.t. $L > T$

W' Weyl group of T in L

$\mathbb{F}$ 以下固定する. $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$,

C' unipotent class of L

とすると,

$\exists! C$ unipotent class of G

s.t. $C \cap C' U_P$ is dense in $C' U_P$

v を決める. $v \in C$ とし, C is induced by C' といふ.

$v \in C, u \in C'$ のとき, v is induced by u といふ.

Rem. C は P のとり方に $\mathbb{F}$ による制限をかける必要がある.

Prop (2.1)

v is induced by u のとき $\beta^L(u) = \beta^G(v)$.

但し, $\beta_v^G = \{gB \mid g \in G, v \in gBg^{-1}\}$

$$\beta^G(v) = \dim \beta_v^G$$

等とすると.

$\mathbb{F} = \mathbb{F}_q, \iota: \beta_v^G \rightarrow \beta = G/B$ inclusion

とすると,

Theorem (2.3) [H.-S.; 1.1]

$$c^* : H^*(G/B, \overline{\mathbb{Q}}_e) \rightarrow H^*(B_v^G, \overline{\mathbb{Q}}_e)$$

is Springer modules & is W -equivariant.

is (2,

$$\dim(c^*) \subset H^*(B_v^G)^{C(v)}$$

$$\text{if } C, C(v) = Z_G(v) / Z_G(v)^\circ$$

$$c^{2e} \text{ non zero if } C, e = \beta^G(v).$$

is (2,

$$c^{2e} : H^{2e}(G/B) \rightarrow H^{2e}(B_v^G)^{C(v)}$$

is surjective W -equivariant.

is (2,

$$V = \text{Hom}(\mathbb{F}_q^*, T) \otimes D$$

$$\mathcal{P}(V) = \text{Symmetric alg. of } \text{Hom}(V, D)$$

$$I = \langle W\text{-invariant polynomial in } \mathcal{P}(V) \\ \text{vanishing at } 0 \rangle$$

is (2,

Prop (2.4)

$$\mathcal{P}(V)/I \simeq H^*(G/B) \otimes \mathbb{E}_W \text{ as } W\text{-modules.}$$

is (1, W & W' の関係を見る.

$$V = V' \oplus V^{W'} \quad W'\text{-stable decomposition}$$

$$V^{W'} = \{ W'\text{-invariant vector in } V \}$$

$\pi: V \rightarrow V'$ canonical projection

$\pi^*: \mathcal{P}(V') \rightarrow \mathcal{P}(V)$ injection

2.7.3. $E_1 \in \hat{W}' = \mathbb{F}_2 \ltimes \mathbb{Z}$,

Def (2.5) E_1 has $(\tilde{B})$ on $\mathcal{P}(V')$

$$\Leftrightarrow \langle E_1, p_i(V') \rangle = \begin{cases} 1 & (i = a_{E_1}) \\ 0 & (i < a_{E_1}) \end{cases}.$$

$\pi^*(E_1) \subset \pi^{-1} \pi^* \pi^* \mathcal{P}_{a_{E_1}}(V)$ の W -submodule

を $E = j_{W'}^W(E_1)$ とする. $E = \mathbb{F}_2 \ltimes \mathbb{Z}$ 上, (2.5) と同様の定義をする.

Prop (2.6) E_1 has $(\tilde{B})$ on $\mathcal{P}(V')$ とする.

(i) $a_{E_1} = a_E$

(ii) E has $(\tilde{B})$ on $\mathcal{P}(V)$, 特には E は inv.

次に,

$I' = \langle W' \text{-invariant polynomial in } \mathcal{P}(V) \text{ vanishing at } 0 \rangle$

とする,

$\mathcal{P}(V') \rightarrow \mathcal{P}(V)/I'$

は surjective W' -equivariant 2.7.2

Prop (2.7)

$$\mathcal{P}(V)/I' \cong H^*(L/L \cap B) \otimes \varepsilon_{W'}$$

は Springer modules 2.2 W' -equivariant.

± 2 , v is induced by $u \pm 1$. (以下同.)

(2.1), (2.4), (2.7) $\in \mathbb{R} 2$,

W -modules $H^{2e}(\beta_v^G)^{C(v)}$ の $\varepsilon_w \in \rho_v^G$

W' -modules $H^{2e}(\beta_u^L)^{C(u)}$ の $\varepsilon_{w'} \in \rho_u^L$

± 1 . 但し, $C(u) = Z_L(u) / Z_L(u)^0 \pm 1$.

Def (2.8)

ρ_v^G has $(\hat{\beta})$ on $H^*(G/B)$ の ε_w

$$\Leftrightarrow \langle \rho_v^G, H^{2i}(G/B) \text{ の } \varepsilon_w \rangle = \begin{cases} 1 & (i = \beta^G(v)) \\ 0 & (i \neq \beta^G(v)) \end{cases}.$$

同様の定義 ρ_u^L にもできる.

Rem ρ_v^G has $(\hat{\beta})$ on $H^*(G/B)$ の ε_w "is" (T),

ρ_v^G has $(\hat{\beta})$ on $\mathcal{P}(V)$ ± 1 .

± 2 ,

ρ_u^L has $(\hat{\beta})$ on $H^*(L|L \cap B)$ の $\varepsilon_{w'} \pm 1$ ± 2

$\exists! E_1$ W' -submodule of $\mathcal{P}_e(V')$

s.t. $E_1 \sim \rho_u^L$

E_1 has $(\hat{\beta})$ on $\mathcal{P}(V')$.

従, 2 特に, $a_{E_1} = \rho^L(u)$.

Theorem (2.9) [L.-S.; 3.5]

v is induced by $u \in T_3$.

ρ_u^L has $(\hat{B})$ on $H^*(L/L \cap B) \otimes \varepsilon_W$ ("SS(I"),

$E = j_{W'}^W(E_1) \sim \rho_v^G$ as W -modules.

従って, $a_E = a_{E_1} = \beta^L(u) = \beta^G(v)$ (Prop (2.6)(i))

E has $(\hat{B})$ on $P(V)$ (Prop (2.6)(ii))

より, ρ_v^G has $(\hat{B})$ on $H^*(G/B) \otimes \varepsilon_W$.

Conjecture (B) (Lusztig, Shoji)

$\exists \wedge 2$ の unipotent elt $v \in G$ に $\exists \wedge 2$,

ρ_v^G has $(\hat{B})$ on $H^*(G/B) \otimes \varepsilon_W$ か?

§3. 補足

具体的な計算の仕方は著者の修論を見てください。

最後になりましたが、著者に発表の機会を下さり下さり、
岩堀先生、及びに法外な時間超過にもかかわらず伺い下さ
った御出席の方々に感謝します。

$W(E_6)$ の Springer 表現

0	$1'_p$	D_5	20_p
A_1	$6'_p$ *)	$E_6(a_1)$	6_p
$2A_1$	$20'_p$	E_6	2_p
$3A_1$	$15'_s$ *)		
A_2	$30'_p$		
$A_2 + A_1$	$64'_p$		
$A_2 + 2A_1$	$60'_p$ *)		
$2A_2$	$24'_p$		
$2A_2 + A_1$	10_s *)		
A_3	$81'_p$		
$A_3 + A_1$	60_s		
$D_4(a_1)$	80_s		
A_4	81_p		
$A_4 + A_1$	60_p		
D_4	24_p		
$D_5(a_1)$	64_p		
A_5	15_s		
$A_5 + A_1$	30_p		

Rem *) は 確定したものを.

References:

[Hatta - Springer] "A specialization theorem for certain Weyl group representations and an application to the Green polynomials of unitary groups" *Invent. math.*, 41 (1977), 113 - 127

[Lusztig - Spaltenstein] "Induced unipotent classes" *J. London Math. Soc.* (2), 19 (1979), 41 - 52

[Murakami] "Frobenius Weyl group の Springer 定理" 千葉大学修士論文