

## 2次元 $K(\pi, 1)$ について

東大 理 大川哲介

2次元  $K(\pi, 1)$  に関する未解決問題の一つに, Whitehead の問題 [4]:

Problem 2次元  $K(\pi, 1)$  complex の subcomplex は  
やはり  $K(\pi', 1)$  であるか?

(注. complex は CW complex の意味にとる)

がある. 2次元 complex  $K$  に対し, これが  $K(\pi, 1)$  となるための必要十分条件は,  $\pi_2(K) = 0$  なることであるから, 易しそうに見えるが, 簡単にはいかない. 難しさの原因として,

- i)  $\pi_i(K)$  ( $i=1, 2$ ) は (直観的な意味で) 計算不能である.
- ii)  $\pi_i(K)$  ( $i=1, 2$ ) の良い filtration が知られていない.
- iii)  $K$  が有限であっても,  $\pi_2(K)$  は  $\pi_1(K)$  上の module として, 一般に有限生成でない (Stallings [3]).

等がある. 御利益の一例として

$$\bullet K = S^{n+2} - S^n \vee S^n \vee \dots \vee S^n \quad \text{とすると,}$$

$K$  が 2 次元 complex にホモトピー同値ならば, (特に  $K = S^3 - S^1$  (knotted) ならば),  $K = K(\pi, 1)$  である. が直接の系として出る. 部分的解決については Adams [3], 還元定理については, Papakyriakopoulos [2] を見よ. ここでは Whitehead の問題の対偶命題の部分的解決となっている次の定理の略証を与えることを目的とする.

定理  $K$  を closed 3-mf.d.  $M$  の 2-skeleton とし,  $K$  はまた, 2 次元  $K(\pi, 1)$  complex  $L$  の subcomplex にもなっているとする. このとき  $H_*(M) \cong H_*(S^3)$ .

(但し, 2-skeleton の意味として,  $M$  を 0-cell 及び 3-cell が 1 個宛になるように PL CW 分割の 2-skeleton の意味にとる. したとき)

この定理の意味として, 例えば  $M$  を lens space に取ると,  $K \subset L$ ,  $\pi_2(L) = 0$ ,  $\dim L \leq 2$  の仮定のもとに,  $\pi_1(K)$  は見かけの torsion を含まぬことが分る.

Key lemma.  $M$  を closed 3-mf.d.;  $K$  を  $M$  の勝手な PL CW 分割 (tame な CW 分割の意) の 2-skeleton,  $L$  は  $K$  を含む 2-dim CW complex,  $i: K \hookrightarrow L$  は inclusion とする. このとき  $i_*: \pi_2(K) \rightarrow \pi_2(L)$  が zero map. ならば  $i_*: \pi_1(K) \rightarrow \pi_1(L)$  も zero map. となる.

証明.

① Hurewicz 写像  $\Xi: \pi_2(K) \rightarrow H_2(K)$  は, 零写像として  
 良い. 右図に於いて  $f = i_*$  は  
 零写像で,  $g = i_*$  は単射だから.

$$\begin{array}{ccc} \pi_2(K) & \xrightarrow{f} & \pi_2(L) \\ \Xi \downarrow & & \Xi \downarrow \\ H_2(K) & \xrightarrow{g} & H_2(L) \end{array}$$

②  $K$  は  $M$  を 0-cell, 3-cell が 1 個宛になる様な PL CW  
 分割の 2-skeleton として良い. 3-cell が 2 個以上あると  
 その attaching map. の Hurewicz image が  $\neq 0$  となり,  
 ① に反する. 0-cell が 2 個以上あれば, 1-cell をつづし  
 て行けば良い. 以下この意味の  $K$  を  $K = (M)^2$  と記す.

③  $(M_1 \# M_2)^2 = (M_1)^2 \vee (M_2)^2$

但し  $M_i$  ( $i=1, 2$ ) は closed 3-mfds,  $\#$  は connected sum

④  $M$ : prime として良い ( $\because$  ③),  $M \neq S^1 \times S^2$  として良  
 い ( $\because (S^1 \times S^2)^2 = S^1 \vee S^2$ , and ①)

⑤  $K \ni *$  に於ける (local な意味での) link は連結とし  
 て良い. ( $\because$  Kneser conjecture, ①) 但し  $*$  =  $K$  の 0-cell

⑥  $K$  の  $M$  に於ける正則近傍を  $N$ ,  $f: N \rightarrow K$  を retraction  
 $g: S^2 \xrightarrow{\sim} \partial N$  を homeo,  $P$  を  $S^2$  の cell 分割で  $f \circ g$  が  
 $P$  の各 cell 上で homeo を導く様な cellular map. となる様  
 なものとし,  $\alpha = [f \circ g] \in \pi_2(K)$  とする.  $\tilde{\phantom{x}}$  を  $L$  の  
 univ. covering space,  $h: S^2 \rightarrow \tilde{\phantom{x}}$  を, 次の図式が可換

となるような cellular map,

$$\beta = [h] \in \pi_2(\tilde{L}) = H_2(\tilde{L}) = Z_2(\tilde{L})$$

$Z_2(\tilde{L})$  は CW complex としての

2-cycle の群. このとき仮定により,

$$\beta = 0 \text{ となる.}$$

$$\begin{array}{ccc} S^2 & \xrightarrow{h} & \tilde{L} \\ \text{fog} \downarrow & & \downarrow \pi \\ K & \xleftarrow{i} & L \end{array}$$

⑦  $P$  ( $|P| = S^2$ ) の 0-cell  $a_i$  ( $i=1, 2$ ) が 共役であるとは,

$P$  の  $\exists$  2-cell  $p_i: D^2 \rightarrow S^2$  と  $\exists a_0 \in \partial D^2$  で ( $i=1, 2$ )

$\text{fog} \circ p_1 = \text{fog} \circ p_2$ ,  $a_i = p_i(a_0)$  ( $i=1, 2$ ) なるものが存在するときに云う.  $a_1, a_2$  を結ぶ  $S^2$  の path  $l$  を

$\text{fog}$  により  $K$  上へ落としたものを  $\bar{l}: S^1 \rightarrow K$  とすると,  $[\bar{l}] = 1 \in \pi_1(L)$  となる. ( $\because$ )  $\text{fop}_1(D^2)$  を  $\text{fop}_2(D^2)$  へ写す covering transf. が  $[\bar{l}]$  だから  $[\bar{l}] \neq 1$  とすると,

$\beta \neq 0 \in Z_2(\tilde{L})$  となり矛盾.

⑧  $P$  の任意の 2 つの 0-cell  $a, b$  に対し,  $P$  の 0-cell

$a_0, a_1, \dots, a_n$  で,  $a_0 = a$ ,  $a_n = b$ ,  $a_{i-1}$  と  $a_i$  は 共役

( $i=1, 2, \dots, n$ ) なるものが存在する ( $\because$  ⑤)

⑨  $P$  の任意の 2 つの 0-cell  $a, b$  に対し,  $a$  と  $b$  を結ぶ  $S^2$  上

の path を  $l$ ,  $\bar{l} = \text{fog} \circ l: S^1 \rightarrow K$  とすると  $[\bar{l}]$

$= 1 \in \pi_1(L)$  ( $\because$  ⑧)

⑩  $K$  の任意の 1-cell は  $P$  のある 1-cell から homeo で写って来ている.

⑪  $\gamma: \pi_1(K) \rightarrow \pi_1(L)$  は零写像 (∵ ⑨ ⑩) *g. e. d*

定理の証. 定理の仮定の下に下図の  $\partial$  は同型である.

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_1(L) & \xleftarrow{\quad} & \pi_1(K) & \xleftarrow{\partial} & \pi_2(L, K) & \xleftarrow{\quad} & \pi_2(L) = 0 \\ & & \circ & & & & (\because \text{lemma}) \end{array}$$

$K$  の各 1-cell  $\alpha$  に対し,  $\partial^{-1}[\alpha] \in \pi_2(L, K)$  を cellular map.  $f_\alpha: (D^2, S^1) \rightarrow (L, K)$  で実現し,  $f_\alpha$  は各 2-cell 及び  $S^1$  上で homeo を導くものとする. すると  $f_\alpha$  は  $C_2(L) = C_2(K) \oplus C_2(L-K)$  の元を表わすと考えられ, そのうちの  $C_2(K)$ -成分を  $\bar{f}_\alpha$  で表わし,  $\bar{f}: C_1(K) \rightarrow C_2(K)$  を  $\bar{f}(\alpha) = \bar{f}_\alpha$  で定義する. また  $K$  の各 2-cell  $\alpha: (D^2, S^1) \rightarrow (L, K)$  に対し,  $S^1$  の cone  $C(S^1)$  上の値を, 各 1-cell  $a \subset S^1$  の cone 上での値を  $f_a$  で与えて拡張すれば,  $\alpha$  は  $\bar{\alpha}: S^2 \rightarrow L$  へ拡張される.  $\pi_2(L) = 0$  より,  $H([\bar{\alpha}]) = 0 \in H_2(L)$ .  $\bar{\alpha}$  はその作り方より  $\bar{\alpha} = (\bar{f} \circ \partial + id)\alpha = 0$  ( $\partial: C_2(K) \rightarrow C_1(K)$ ,  $id: C_2(K) \rightarrow C_2(K)$ )  
 $\therefore \bar{f} \circ \partial = -id$ , これは  $\partial: C_2(K) \rightarrow C_1(K)$  が split することを示し, 任意の Abe | 群  $A$  に対し,  $H_2(K, A) = 0$

とすると  $H_2(M, A) = H_2(K, A) = 0$  だから  $M$  は orientable,  
 $H_1(M)$  は torsionfree,  $b_2(M) = 0$  となり,  $H_*(M) =$   
 $H_*(S^3)$  が導かれる. g. e. d

### 参考文献

- [1] J. F. Adams, A new proof of a theorem of W. H. Cockcroft  
 J. London Math. Soc. 30 (1955)
- [2] C. D. Papakyriakopoulos, Attaching 2-cells to a  
 complex. Ann. of Math. 78 (1963)
- [3] J. R. Stallings, A finitely presented group  
 whose 3-dimensional integral homology group is  
 not finitely generated, Am. J. Math. 85 (1963)
- [4] J. H. C. Whitehead, On adding relation to  
 homotopy groups Ann. of Math. 42 (1941)