

高次元の extremal ray について

東大理 安藤哲哉

§ 0 序

以下基礎体 k は標数 0 の代数閉体とする。多様体はすべて射影的とする。今 X は非特異で、その canonical divisor K_X は not nef とする。すると extremal curve ℓ が存在する。(定義は §1 を見よ。) 任意の extremal curve ℓ を u と fix した時、森, III 又, Shokurov 等の理論により, extremal ray $R = \mathbb{R}_+[\ell]$ の contraction と呼ばれる射 $f: X \rightarrow Y$ が存在して次の性質をみたす。

- (i) X 内の curve Z につき, $f(Z)$ が一点 $\iff Z \in \mathbb{R}_+[\ell]$,
- (ii) Y は projective, normal で $f_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_Y$.
- (iii) $0 \rightarrow \text{Pic } Y \xrightarrow{f^*} \text{Pic } X \xrightarrow{(\cdot, \ell)} \mathbb{Z}$ は exact.

このような contraction $f: X \rightarrow Y$ の形は 3 次元以下の際は森 [1] によって分類されている。この小論では、4 次元以上の場合の f の構造を調べる。§1 では、定義と §2 以下の議論に必要な知られている結果を簡単に述べ、§2 では、 f が birational な場合の構造について、§3 では、 $\dim Y < \dim X$ の場合の構造について考察する。§4 では、§1 に述べる contraction theorem の 4 次元の場合への Riemann-Roch を用いた正しい証明を付記しておく。

§ 1. 定義と知られている結果.

k は標数 0 の閉体, X は k 上の非特異射影多様体とする。以下に述べる結果は、すべて高次元 canonical singularity をもつ多様体の場合には拡張されているが、これに關しては、本報告集の中の川又氏の論文を参照されたい。ここでは、最小限必要な

弱い形でも可なり。

Notation $N^1(X) := \{ \text{Cartier divisor on } X \} / \sim \otimes \mathbb{R}$

$N_1(X) := \{ 1\text{-cycle on } X \} / \sim \otimes \mathbb{R}$

ただし $\sim$ は numerical equivalence をあしなす。 $N^1(X)$ と $N_1(X)$ は、 intersection pairing によって互いに dual vector space になっている。これらには、自然に位相を入れたおく。

$\overline{NE}(X) := N_1(X)$ 内の effective 1-cycle で生成された convex cone の closure.

定義. Cartier divisor D が nef とは任意の curve Z に対し、
 $(D \cdot Z)_X \geq 0$ となること。

1-cycle Z が nef とは任意の effective Cartier divisor D に対し、
 $(D \cdot Z)_X \geq 0$ となること。

D が nef のとき、 D の numerical Kodaira dimension $\kappa_{\text{num}}(D)$ (これは $\sigma(D)$ と書く) とは、 $\kappa_{\text{num}}(D) := \max \{ d \mid D^d \neq 0 \}$ のこと。
 一般に、 $\kappa(D) \leq \kappa_{\text{num}}(D) \leq n$ ($n = \dim X$) が知られている。

D が big とは $\kappa(D) = n$ となること。

特に D が nef のとき、 D が big $\Leftrightarrow \kappa_{\text{num}}(D) = n$ である。

Linear system が free とは、 fixed component と base point ももたないことをいう。

$|mD|$ が free ($\exists m > 0$) ならば、 $\kappa(D) = \kappa_{\text{num}}(D)$ である。

定義. curve ℓ が extremal であるとは、

(i) $(K_X \cdot \ell)_X < 0$

(ii) $A, B \in \overline{NE}(X)$ が $A+B \in \mathbb{R}_+[\ell]$ をみたすとき、必ず $A, B \in \mathbb{R}_+[\ell]$ となることをいう。ただし $\mathbb{R}_+[\ell]$ は、 ℓ の numerical class $[\ell]$ が vector space $N_1(X)$ 内の張る半直線をあしなす。

定義. ℓ が extremal curve の時、 Cartier divisor H が、 ℓ の good supporting divisor であるとは

(i) H は nef,

(ii) 任意の $Z \in \overline{NE}(X)$ につき、 $(H \cdot Z)_X = 0 \Leftrightarrow Z \in \mathbb{R}_+[\ell]$.

以上の notation のもとに, 基本的な定理をいくつか述べる.

定理 1.1 (Base point free theorem: [1] 又, Shokurov)

H は nef, $aH - K_X$ は nef and big ($\exists a > 0$) とすると, 全ての十分大なる m について, $|mH|$ は free となる.

定理 1.2 (Cone theorem: [2]) $\overline{NE}(X)$ は $\{Z \in N_1(X) \mid (K_X \cdot Z) < 0\}$ なる半空間において, locally polyhedral である.

系 1.3 任意の extremal curve ℓ について, 必ず "good supporting divisor" H が存在して, 以下の性質もみえる.

(i) E を $(E \cdot \ell)_X > 0$ となる任意の Cartier divisor とすると, $\forall m \gg 0$ について, $mH + E$ は ample. 特に

$$H^i(X, mH + E) = 0 \quad (\text{for } i > 0, m \gg 0).$$

(ii) $H^i(X, mH) = 0 \quad (\text{for } i > 0, m \gg 0).$

(iii) m を十分大にとり, $f: X \dashrightarrow Y$ を $|mH|$ が定まる rational map とすると, f は morphism となり, f は $R_+[\ell]$ の contraction を定めた. すなわち,

(iii-1) X 内の curve Z に $\exists t \in \mathbb{R}$, $f(Z)$ が一点 $\Leftrightarrow Z \in R_+[\ell]$.

(iii-2) Y は projective, normal, $f_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_Y$, $R^i f_* \mathcal{O}_X = 0 \quad (i > 0)$.

(iii-3) $0 \rightarrow \text{Pic } Y \xrightarrow{f^*} \text{Pic } X \xrightarrow{(\cdot, \ell)} \mathbb{Z}$ は exact.

Rem 系 1.3 は (i) の中の vanishing と (iii-3) を除けば, X が, canonical singularity をもつ場合にも成り立つ.

系 1.3 は [1], Reid [4] の 3次元の場合の証明と全く同様であるので省略する.

prop 1.4 ℓ は extremal curve, $f: X \rightarrow Y$ は ℓ の contraction, H は ℓ の good supporting divisor とする. このとき,
 f が birational $\Leftrightarrow H$ が big $\Leftrightarrow \ell$ が not nef.

証明は [1] の 3次元の場合と同様にしてできるが, 念のため, 「 H が big $\Rightarrow \ell$ が not nef」の証明のみ書いておく.

$(H^n) > 0$ ($n = \dim X$) を仮定する.

H は nef and big であるから [1] 又 vanishing により $H^i(X, mH + K_X) = 0 \quad (i > 0)$.

$$\begin{aligned} \therefore h^0(X, mH + K_X) &= \chi(mH + K_X) = \frac{1}{m!} (mH + K_X)^n + \dots \\ &= \frac{m^n}{n!} (H)^n + m \text{ について 1 次の項} \rightarrow \infty \text{ as } m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

従って $m \gg 0$ に對し $|mH + K_X| \neq \emptyset$. $\lambda = 2$. $D \in |mH + K_X|$ とする.

$(D \cdot l) = m(H \cdot l) + (K_X \cdot l) = (K_X \cdot l) < 0$. 従って l は not nef.

□

§ 2 Birational case.

以下 X は非特異とし, extremal curve $l \in \pi$ と fix する. さらに, l は not nef と仮定する. すなわち, l の contraction $f: X \rightarrow Y$ は birational と仮定する. A を Y 上の任意の ample divisor とすると, $H := f^*A$ は l の good supporting divisor となる. $E \subset X$ を f の exceptional set とする. また $n := \dim X$ とする.

§ 2-1° 以下の sub section では $\dim E = n-1$ と仮定し, この場合を考察する. 今, l は not nef であるから $(D \cdot l) < 0$ となる irreducible divisor D が存在する.

lemma $D = E$. 特に D は unique であり, E は既約.

(i) 系 1.3 (i) より $mH - D$ は ample ($m \gg 0$). また $H^1(X, mH - D) = 0$ であり, $H^0(X, mH) \rightarrow H^0(D, mH)$. 従って $|mH|$ は D の外に ample. つまり, f は D の外に同型. $\therefore D \supset E$. 今 D は既約であり $\dim E = n-1$ であるから $D = E$. □

さて, $\kappa := \kappa_{\text{num}}(H|_D) = \kappa(D, H|_D) = \dim f(D)$ とする. まず, $\kappa = 0$ の場合を扱う.

prop 2.1. $\dim f(D) = 0$ とする. このとき, ある X 内の Cartier divisor L が存在して

(0) $L|_D$ は D 上 ample

(i) $\mathcal{O}_D(-K_X) \cong \mathcal{O}_D(pL)$, $\mathcal{O}_D(-D) \cong \mathcal{O}_D(qL)$ ($\exists p, q \in \mathbb{N}$).

特に $\omega_D \cong \mathcal{O}_D(-(p+q)L)$.

(ii) $H^i(D, tL) = 0$ ならば, i と t は (ア) $i > 0$, $t \geq -p$ あるいは,

(イ) $i < n-1$, $t \leq -q$ 又は (ウ) $n \leq 5$, $0 < i < n-1$, $\forall t \in \mathbb{Z}$.

(iii) $n=2 \Rightarrow D \cong \mathbb{P}^1, \mathcal{O}_D(D) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$.

$n=3 \Rightarrow D \cong \mathbb{P}^2, \mathcal{O}_D(D) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) \text{ 又は } \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2)$

又は $D \cong \mathbb{Q}^2, \mathcal{O}_D(D) \cong \mathcal{O}(-1)$. ただし $\mathbb{Q}^2$ は $\mathbb{P}^3$ 内の
singularity を許し $\mathbb{Q}^2$ hyper quadric. (以下 $n \geq 3$ 同様).

$n=4 \Rightarrow D \cong \mathbb{P}^3, \mathcal{O}_D(D) \cong \mathcal{O}(-1), \mathcal{O}(-2) \text{ 或 } \mathcal{O}(-3)$.

又は $D \cong \mathbb{Q}^3, \mathcal{O}_D(D) \cong \mathcal{O}(-1) \text{ 或 } \mathcal{O}(-2)$

又は D は Del Pezzo variety なら $\mathcal{O}_D(D) \cong \mathcal{O}(-1)$, とならば

$$\Delta(D, L) := \dim D + (L^{n-1})_D - h^0(D, L) = 1, \omega_D \cong \mathcal{O}_D(-2L),$$

$$H^i(D, tL) = 0 \text{ for } 0 < i < n-1, \forall t \in \mathbb{Z} \text{ となる variety.}$$

このとき, D は hypersurface singularity を許す.

$n=5 \Rightarrow D \cong \mathbb{P}^4, \mathcal{O}_D(D) \cong \mathcal{O}(-1), \mathcal{O}(-2), \mathcal{O}(-3) \text{ 或 } \mathcal{O}(-4)$.

又は $D \cong \mathbb{Q}^4, \mathcal{O}_D(D) \cong \mathcal{O}(-1), \mathcal{O}(-2), \mathcal{O}(-3)$.

又は D は Del Pezzo variety なら $\mathcal{O}_D(D) \cong \mathcal{O}(-1) \text{ 或 } \mathcal{O}(-2)$. とならば

$$\Delta(D, L) = 1, \omega_D \cong \mathcal{O}_D(-3L), H^i(D, tL) = 0 \text{ (} 0 < i < n-1, \forall t \in \mathbb{Z} \text{)}.$$

又は D は Mukai variety なら $\mathcal{O}_D(D) \cong \mathcal{O}(-1)$. とならば,

$$\Delta = \frac{d}{2} \text{ (ただし } d = (L^{n-1})_D \text{)}, \omega_D \cong \mathcal{O}(-2L) \text{ なら}$$

$$H^i(D, tL) = 0 \text{ (} 0 < i < n-1, \forall t \in \mathbb{Z} \text{)} \text{ となる variety.}$$

このようなタイプを $(E(n-1)-0)$ 型と呼ぶ.

proof $|mH|$ は free ($m \gg 0$) なら, $H|_D \cong 0$ なら $\mathcal{O}_D(H) \cong \mathcal{O}_D$ である.

D 内の任意の curve Z について, $(H \cdot Z)_X = 0$ なら $Z \in \mathbb{R} + [L]$.

とならば $\text{Im}(N_1(D) \rightarrow N_1(X)) \cong \mathbb{R}$. 双対的に $\text{Im}(N^1(D) \rightarrow N^1(X))$

$\cong \mathbb{R}$. 今 $I := \text{Im}(\text{Pic } X \rightarrow \text{Pic } D)$ とおき $I \cong \mathbb{Z}$ を示す.

$M \in \text{Pic } X$ を $M|_D \cong 0$ on D となるような任意の元とすると,

$$\mathcal{O}_D(M) \cong \mathcal{O}_D \text{ を示せばよい. } 0 \rightarrow \mathcal{O}_X(mH + M - D) \rightarrow \mathcal{O}_X(mH + M) \rightarrow \mathcal{O}_D(M) \rightarrow 0$$

は exact なら, $m \gg 0$ により $mH + M - D - K_X, mH + M - K_X$ は ample なら

小 $\bar{\mu}$ vanishing とこの exact sequence より, $H^i(D, \mathcal{O}_D(M)) = 0 \text{ (} i > 0 \text{)}.$

特に $M = 0$ として $n \geq 2$ と $H^i(D, \mathcal{O}_D) = 0 \text{ (} i > 0 \text{)} \text{ と } \chi(\mathcal{O}_D) = 1$ を得る.

より $h^0(\mathcal{O}_D(M)) = \chi(\mathcal{O}_D(M)) = \chi(\mathcal{O}_D) = 1$ となるから, $|M|_D| \neq \emptyset$.

$M|_D \cong 0$ であるから、このことは $\mathcal{O}_D(M) \cong \mathcal{O}_D$ を意味する。
 $\therefore I \cong \mathbb{Z}$.

さて、 $-K_X|_D \sim (mH - K_X)|_D$ は ample であるから、 I には ample な元がある。今 $L \in \text{Pic } X$ を $L|_D$ が I の ample generator となるようにとり、 $I \cong \mathbb{Z}$ であるから、 $-K_X|_D, -D|_D$ は ample であるから、
 $\mathcal{O}_D(-K_X) \cong \mathcal{O}_D(PL), \mathcal{O}_D(-D) \cong \mathcal{O}_D(qL)$ ($P, q \in \mathbb{N}$) とおける。
 更に $\omega_D \cong \mathcal{O}_D(K_X + D)$ より $\omega_D \cong \mathcal{O}_D(-(P+q)L)$.

次に (ii) を証明する。 $0 \rightarrow \mathcal{O}_X(mH + tL - D) \rightarrow \mathcal{O}_X(mH + tL) \rightarrow \mathcal{O}_D(tL) \rightarrow 0$ は exact で、 $t \geq -P$ のとき、 $m \gg 0$ により、 $mH + tL - D - K_X$ は ample、 $mH + tL - K_X$ は nef and big となる。再び vanishing とこの exact sequence から $H^i(\mathcal{O}_D(tL)) = 0$ ($i > 0, t \geq -P$) を得る。また Serre duality により、 $t \leq -P - q$ のとき、 $-t - P - q \geq -P$ であるから、
 $H^i(\mathcal{O}_D(tL)) \cong H^{m-i-1}(\mathcal{O}_D((-t-P-q)L)) = 0$ ($i < m-1, t \leq -P-q$)。
 最後の (v) の場合は (iii) の分類の結果からある。

(iii) を証明する。 $P(t) := \chi(\mathcal{O}_D(tL))$ とおくと $P(t)$ は t について $n-1$ 次の多項式になる。 $d := (L^{n-1})_D$ とし、Riemann-Roch により、

$$P(t) = \frac{d}{(n-1)!} t^{n-1} + \frac{Pd}{2(n-2)!} t^{n-2} + t^{\leq n-2}$$
 の形の項が加わる。

となる。また $P(0) = \chi(\mathcal{O}_D) = 1$ 。Serre duality により、
 $P(-t) = \chi(\mathcal{O}_D(-tL)) = (-1)^{n-1} \chi(\omega_D(tL)) = (-1)^{n-1} \chi(\mathcal{O}_D((t-P-q)L)) = (-1)^{n-1} P(t-a-b)$
 となる。 $-P \leq t \leq 0$ なる整数 t については、 $H^i(\mathcal{O}_D(tL)) = 0$ for $\forall i$ より $P(t) = 0$ 。以上の $P(t)$ に関する条件から

$$n=4 \text{ のとき } P(t) = \frac{d}{12} t(t+P+q)(2t+P+q) + \frac{2t}{P+q} + 1$$

$$n=5 \text{ のとき } P(t) = \frac{1}{24} \{ t^2(t+P+q)^2 d + t(t+P+q)(Pq d + \frac{24}{Pq}) \} + 1$$

が得られる。 $h^0(\mathcal{O}_D(L)) = P(1)$ により、Fujita の Δ -genus:
 $\Delta := \Delta(D, L) = \dim D + d - h^0(\mathcal{O}_D(L))$ を計算する。

$n=4$ のとき $P+q \leq 4$ となり ($\because P+q \geq 5$ とすると $\Delta < 0$ となるから、)
 である。

$(P, q) = (3, 1), (2, 2), (1, 3)$ なる $\Delta = 0, d = 1$ なる $D \cong \mathbb{P}^3$,

$(P, q) = (2, 1), (1, 2)$ なる $\Delta = 0, d = 2$ なる $D \cong \mathbb{Q}^3$,

$(P, q) = (1, 1)$ なる $\Delta = 1$ なる D は Del Pezzo variety となる。

$n = 5$ の時も同様なる略す。

□

次は $E = D$ なる $\dim f(D)$ なる一般の場合を扱う。

prop 2.2 $\dim f(D) = K$ とすると, $f_D: D \rightarrow f(D)$ の general fiber は $(E(n-K)-0)$ 型の exceptional divisor と同型である。(すなわち, prop 2.1 での $m = n-K$ とした時の D の分類にあてはめられるものと同一視できる。)

proof general point $p \in Y$ に対し, $A_1, \dots, A_K \subset Y$ を general な ample divisor なる $A_1 \cap \dots \cap A_K \ni p$, となるようにとれば, $H_i := f^* A_i$ ($1 \leq i \leq K$) とおくと, $\dim H_1 \cap \dots \cap H_K = n-K-1$ なる F なる $H_1 \cap \dots \cap H_K$ の連結成分となるようにできる。 $H_1, \dots, H_K$ は f の good supporting divisor である。 F 内の任意の curve Z に対し $(Z \cdot H)_x = 0$ である。これより prop 2.1 の証明と同様にして, $\text{Im}(\text{Pic } X \rightarrow \text{Pic } F) \cong \mathbb{Z}$ となる。 $L \in \text{Pic } X$ を $L|_F$ なる $\text{Im}(\text{Pic } X \rightarrow \text{Pic } F)$ の ample generator とする。 $\mathcal{O}_F(H_i) \cong \mathcal{O}_F$ なる $\omega_F \cong \mathcal{O}_F(K_X + 1)$ 。今 $\mathcal{O}_F(-K_X) \cong \mathcal{O}_F(PL)$, $\mathcal{O}_F(-D) \cong \mathcal{O}_F(\sum L)$ ($\sum p_i \in \mathbb{N}$) と置くと, 以下 prop 2.1 の証明と同様に $H^i(\mathcal{O}_F(tL)) = 0$ for $(P) > 0, t \geq -P$ or $(1) < n-K-1, t \leq -2$ となる。これより結論は容易に導かれる。

□

prop 2.3 $\dim f(D) = n-2$ なる $f_D: D \rightarrow f(D)$ なる equidimensional なる f_D は $\mathbb{P}^1$ -bundle なる $Y, f(D)$ は non-singular, f は $f(D)$ を center とした Y の blow up となる。

proof $S := f(D)$ とおく。 $C \in R_1[L]$ を任意の既約な curve とする。 $p = f(C) \in S$ は point。 Y の ample divisor $A_1, \dots, A_{n-2}$ なる $p \in A_1 \cap \dots \cap A_{n-2}$ $\dim A_1 \cap \dots \cap A_{n-2} \cap S = 0$ となるようなものがある。 f_D は equidimensional なる $H_i := f^* A_i$ ($1 \leq i \leq n-2$) とおくと $\dim H_1 \cap \dots \cap H_{n-2} \cap D = 1$ 。

今 C' は $(C')_{\text{red}} = C$ とする X 内の任意の scheme とする。 $a \gg 0$ を $I_{C'} \supset I_{H_1}^a + \cdots + I_{H_{n-2}}^a + I_D^a$ とする a にとる。 ここに $I_{C'}$ は C' の $\mathcal{O}_X$ での定義 ideal である。 standard exact sequence をいくつを書いた計算すると、 $H^1(\mathcal{O}_{D \cap H_1 \cap \cdots \cap H_{n-2}}(mH)) = 0$, $H^1(\mathcal{O}_{D \cap H_1 \cap \cdots \cap H_{n-2}}(mH + K_X)) = 0$ ($m \gg 0$) が容易に得られる。 したがって $H^1(\mathcal{O}_{C'}(mH)) = H^1(\mathcal{O}_{C'}(mH + K_X)) = 0$ が得られる。 ところで $\mathcal{O}_{C'}(H) \cong \mathcal{O}_{C'}$ より $H^1(\mathcal{O}_{C'}) = H^1(\mathcal{O}_{C'}(K_X)) = 0$ 。 故に $C \cong \mathbb{P}^1$ がわかる。 $0 \leq h^0(\mathcal{O}_C(K_X)) = \chi(\mathcal{O}_C(K_X)) = \chi(\mathcal{O}_C) + (K_X \cdot C)_X = 1 + (K_X \cdot C)_X$ 。 $(K_X \cdot C) < 0$ より $(K_X \cdot C)_X = -1$ がわかる。 f_D の general fiber は既約な K_X との intersection number は -1 である。 f_D の全ての fiber は既約な $\mathbb{P}^1$ に同型であることがわかる。 また $N_{C/X} \cong \mathcal{O}_C(-1) \oplus \mathcal{O}_C^{\oplus n-2}$ が、後述の通りようにしてわかるから、 deformation 理論により、 D は smooth な、 $f_D: D \rightarrow S$ は Zariski $\mathbb{P}^1$ -bundle であることがわかる。 ここでは影の contraction theorem を用いると f は S を center とした Y の blow up と同一視できることがわかる。

さて $N_{C/X} \cong \mathcal{O}_C(-1) \oplus \mathcal{O}_C^{\oplus n-2}$ を証明する。 $I_C/I_C^2 \cong \mathcal{O}_C(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_C(a_{n-1})$ ($a_1 \geq \cdots \geq a_{n-1}$) とおく。 I_C は locally complete intersection である。 $0 \rightarrow I_C/I_C^2 \rightarrow \Omega_X^1 \otimes \mathcal{O}_C \rightarrow \Omega_{C'}^1 \rightarrow 0$ は exact。 $\therefore a_1 + \cdots + a_{n-1} = \deg I_C/I_C^2 = \chi(I_C/I_C^2) - \text{rank}(I_C/I_C^2) = \{\chi(\mathcal{O}_C(\Omega_{C'}^1)) - \chi(\Omega_{\mathbb{P}^1}^1)\} - (n-1) = \{(K_X \cdot C)_X + n\} - (-1) - (n-1) = (K_X \cdot C)_X + 2 = 1$ 。 また $I_C \supset J \supset I_C^2$ を $I_C/J \cong \mathcal{O}_C(a_{n-1})$ とする J により $0 \rightarrow I_C/J \rightarrow \mathcal{O}_X/J \rightarrow \mathcal{O}_X/I_C \rightarrow 0$ (ie. $0 \rightarrow \mathcal{O}_C(a_{n-1}) \rightarrow \mathcal{O}_{C'} \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0$) より $\chi(\mathcal{O}_{C'}(K_X)) = \chi(\mathcal{O}_C(K_X)) + \chi(\mathcal{O}_C(a_{n-1}) \otimes \mathcal{O}_C(K_X)) = \{(K_X \cdot C) + \chi(\mathcal{O}_C)\} + \{(K_X \cdot C) + \chi(\mathcal{O}_C(a_{n-1}))\} = 2(K_X \cdot C) + \chi(\mathcal{O}_{C'}) = -2 + \chi(\mathcal{O}_{C'})$ $\therefore 2 \leq 2 + h^0(\mathcal{O}_{C'}(K_X)) = 2 + \chi(\mathcal{O}_{C'}(K_X)) = \chi(\mathcal{O}_{C'}) = \chi(\mathcal{O}_C) + \chi(\mathcal{O}_C(a_{n-1})) = 1 + (1 + a_{n-1}) = 2 + a_{n-1}$ 。 $\therefore a_{n-1} \geq 0$ 。 $\therefore a_1 = 1, a_2 = a_3 = \cdots = a_{n-1} = 0$ $\therefore N_{C/X} = (I_C/I_C^2)^\vee = \mathcal{O}_C(-1) \oplus \mathcal{O}_C^{\oplus n-2}$ □

§2-2° ここからは $\dim E < n-1$ と仮定する。 このようになるとは $n \leq 3$ ではないから $n=4$ のとき $E \cong \mathbb{P}^2$ の場合が考えられる。(→ M. Ried Decomposition of Toric morphism, Example (3.9)).

しかし具体的な E の分類に關しては $n=4$ の時ですらまだわかっていない。わかってゐるのは, $\dim E$, $\dim f(E)$ についてこの条件からいってある。ところで, $mH+K_X$ という形の divisor はいろいろの意味で大切な役割をはたす。例えば, $|mH+K_X|$ の一般の元 D は既約で $(D \cdot \mathcal{L})_X < 0$ となるから, $(D \cdot \mathcal{L})_X < 0$ となる既約な divisor D は無数に存在する。 $m \gg 0$ のとき $B_S |mH+K_X| = E$ である。さらに $|mH+K_X|$ は elementary transformation を定めておくと予想されている。

§ 3. Fiber case.

この section でも $X, \mathcal{L}, H, f: X \rightarrow Y$ は § 2 と同様とする。ただし $\mathcal{L}$ は nef と仮定する。すなわち $\dim X > \dim Y$ と仮定する。 $K := \dim Y = X(H) = K_{\text{num}}(H)$ とおく。

prop 3.1 f の general fiber は Fano $(n-K)$ -fold である。たゞし Fano 1-fold は $\mathbb{P}^1$, Fano 2-fold は Del Pezzo surface と解釈する。

proof $p \in Y$ を general point とする。Ample divisor $A_1, \dots, A_K \subset Y$ を $p \in A_1 \cap \dots \cap A_K$, $\dim A_1 \cap \dots \cap A_K = 0$ となるようにとる。 p は general だから, $F := f^{-1}(p)$ は非特異な $n-K$ 次元多様体としてよい。 F は $H_1 \cap \dots \cap H_K$ の連結成分 ($H_i := f^* A_i$) で, $H_1 \cap \dots \cap H_K$ は pure $n-K$ 次元としてよい。 F は locally complete intersection で, $\mathcal{O}_F(H_i) \cong \mathcal{O}_F$ だから $\mathcal{W}_F \cong \mathcal{O}_F(K_X)$ となる。 F 内の任意の curve は $\mathbb{R}_+[L]$ に属するから $-K_X|_F$ は F 上 ample. $\therefore \mathcal{W}_F^{-1}$ は ample となり F は Fano $(n-K)$ -fold. □

補 [1] $n=3$ の時 Y は必ず非特異である。たゞし, 一般次元では, $\dim Y = 1$ ならばもちろん Y は非特異であるが, それ以外の時は次のことしかわかっていない。しかし次の proposition の f が equidimensional という仮定は 3 次元では直観的に正しいので, $\dim X = 3$ の時の全ての結果は完全に定まってしまう。

prop 3.2 $\dim Y = \dim X - 1$ かつ $f: X \rightarrow Y$ equidimensional ならば, Y は非特異で, f は conic bundle となる.

証明にはまず次の lemma を用いる.

Lemma 3.3 X は non singular, C は X 内の irreducible curve.

$(K_X \cdot C) < 0$ かつ $(C')_{\text{red}} = C$ となる X 内の任意の scheme C' について $\chi(\mathcal{O}_{C'}) \geq 0$ とする. すると $C \cong \mathbb{P}^1$ である.

$N_{C/X} \cong \mathcal{O}_C^{\oplus n-1}$ or $\mathcal{O}_C(1) \oplus \mathcal{O}_C(-1)^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O}_C^{\oplus n-4}$ or $\mathcal{O}_C(1) \oplus \mathcal{O}_C(-2) \oplus \mathcal{O}_C^{\oplus n-3}$ or $\mathcal{O}_C(-1) \oplus \mathcal{O}_C^{\oplus n-2}$ となる. さらに, $N_{C/X} \cong \mathcal{O}_C(1) \oplus \mathcal{O}_C(-1)^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O}_C^{\oplus n-4}$ または $\mathcal{O}_C(1) \oplus \mathcal{O}_C(-2) \oplus \mathcal{O}_C^{\oplus n-3}$ の場合には $I_C \supset J \supset I_C^2$ を $I_C/J \cong \mathcal{O}_C(-1)$ となるような ideal とすると, $J/J^2 \cong (\mathcal{O}_X/J)^{\oplus n-1}$ となる. ことに I_C は X における C の定義 ideal.

proof $C \cong \mathbb{P}^1$ の証明は簡単である. おと必要としないので省略する. $I := I_C$ とおき, $I/I^2 \cong \mathcal{O}_C(P_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_C(P_{n-1})$ ($n-1$ 個 $P_1 \leq P_2 \leq \cdots \leq P_{n-1}$) とおく. C は locally complete intersection である. $0 \rightarrow I/I^2 \rightarrow \Omega_X^1 \otimes \mathcal{O}_C \rightarrow \Omega_C^1 \rightarrow 0$ は exact. prop 2.3 の証明と同様に $P_1 + \cdots + P_{n-1} = (K_X \cdot C) + 2 \leq 1$. 故に $0 \geq P_{n-2} \geq \cdots \geq P_1$. local には, $I = (X_1, \dots, X_{n-1})$ と書ける.

Case I. $P_1 = 0$ のとき: $\sum P_i \leq 1$ より $(P_1, \dots, P_{n-1}) = (0, \dots, 0)$ or $(0, \dots, 0, 1)$ となりおしまい.

Case II. $P_1 \leq -2$ のとき: $I \supset J \supset I^2$ を $I/J \cong \mathcal{O}_C(P_1)$ となるようにとり, $J/I^2 \cong \mathcal{O}_C(P_2) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_C(P_{n-1})$. また local には $J = (X_1^2, X_2, \dots, X_{n-1})$ と書ける. $C' = \text{Spec } \mathcal{O}_X/J$ とおく. $0 \rightarrow \mathcal{O}_C(P_1) \rightarrow \mathcal{O}_{C'} \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0$ は exact である. $0 \leq \chi(\mathcal{O}_{C'}) = \chi(\mathcal{O}_C) + \chi(\mathcal{O}_C(P_1)) = 1 + (1 + P_1) = 2 + P_1 \leq 0$ $\therefore P_1 = -2$. $0 \rightarrow I^2/IJ \rightarrow J/IJ \rightarrow J/I^2 \rightarrow 0$ かつ $I^2/IJ \cong S^2(I/J) \cong \mathcal{O}_C(2P_1)$ である. $J \supset IJ$ は quotient である $\mathcal{O}_C(2P_1), \mathcal{O}_C(P_2), \dots, \mathcal{O}_C(P_{n-1})$ となる filtration をもつ. $0 \rightarrow IJ/J^2 \rightarrow J/J^2 \rightarrow J/IJ \rightarrow 0$ かつ $IJ/J^2 \cong J/IJ \oplus I/J$ である. $J \supset J^2$ は quotient である $\mathcal{O}_C(2P_1), \mathcal{O}_C(P_2), \dots, \mathcal{O}_C(P_{n-1}), \mathcal{O}_C(3P_1), \mathcal{O}_C(P_1 + P_2), \dots, \mathcal{O}_C(P_1 + P_{n-1})$ となる filtration をもつ. 従って $\chi(J/J^2) = 2(n-1) + (n+1)P_1 + 2(P_2 + \cdots + P_{n-1})$ を得る. 2 行より,

$0 \leq \chi(\mathcal{O}_X/J^2) = 2M + (n+2)P_1 + 2(P_1 + \dots + P_{n-1}) \leq 2M + (n+2) \times (-2) + 2 \times 1$
 $= -2$ となり矛盾。 $\therefore P_1 \leq -2$ とはなり得ない。

Case IV. $P_1 = -1$ のとき: まず次の公式を証明する。

$$\chi(\mathcal{O}_X/J^r) = 2 \times nH_{r-1} + \left(1 + \frac{4(r-1)}{n}\right) nH_{r-1} \cdot P_1 + 2 \frac{r-1}{n} \cdot nH_{r-1} \cdot (P_2 + \dots + P_{n-1})$$

なお $nH_r = n+r-1 C_r$ 。 $\therefore I \supset H \supset I^2$ を $I/H \cong \mathcal{O}_C(P_1) \oplus \mathcal{O}_C(P_2)$,

$I^2/I^2 \cong \mathcal{O}_C(P_3) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_C(P_{n-1})$ と仮定する。 I は ideal とする。

$$\chi(\mathcal{O}_X/H^r) = (3 \cdot nH_{r-1} + nH_{r-2}) + \left(6 \frac{r-1}{n} \cdot nH_{r-1} + 2 \frac{r-2}{n} \cdot nH_{r-2} + nH_{r-1} + nH_{r-2}\right)(P_1 + P_2) + \left(3 \frac{r-1}{n} \cdot nH_{r-1} + \frac{r-2}{n} \cdot nH_{r-2}\right)(P_3 + \dots + P_{n-1})$$

よって $\chi(\mathcal{O}_X/J^r)$ の公式は local に $J = (X_1^2, X_2, \dots, X_{n-1})$ と置けること、 $\mathcal{O}_X/J$ の間の filtration をよく見ると、 $\mathcal{O}_X/J^r$ の間の filtration の quotient は $\mathcal{O}_C(1+rP_1 + \dots + r_{n-1}P_{n-1})$ (ただし $\frac{r}{2} + r_2 + \dots + r_{n-1} < r$) を含む 1 個ずつ出てくることから、

$$\chi(\mathcal{O}_X/J^r) = \sum_{\frac{r}{2} + r_2 + \dots + r_{n-1} < r} \chi(\mathcal{O}_C(1+rP_1 + \dots + r_{n-1}P_{n-1})) = \sum_{\frac{r}{2} + r_2 + \dots + r_{n-1} < r} (1+rP_1 + \dots + r_{n-1}P_{n-1})$$

となり前の公式を得る。 $\therefore \chi(\mathcal{O}_X/H^r)$ の公式は local に $H = (X_1^2, X_1X_2, X_2^2, X_3, \dots, X_{n-1})$ とおけることと $\mathcal{O}_X/H$ の filtration を J の場合と同様に構成すると、結局

$$\chi(\mathcal{O}_X/H^r) = \sum_{\frac{r}{2} + \frac{r}{2} + r_2 + \dots + r_{n-1} < r} \chi(\mathcal{O}_C(1+rP_1 + \dots + r_{n-1}P_{n-1})) \quad \text{となり、公式を得る。}$$

さて $r = \infty$ 、もし $P_2 = -1$ とすると $r \rightarrow \infty$ のとき $\chi(\mathcal{O}_X/H^r) \rightarrow -\infty$ となること矛盾。 $\therefore 0 \leq P_2 \leq \dots \leq P_{n-1}$ 。 $\therefore P_2 + \dots + P_{n-1} \leq 1$ とすると $r \rightarrow \infty$ のとき $\chi(\mathcal{O}_X/J^r) \rightarrow -\infty$ となりやはり矛盾。 $\therefore P_2 + \dots + P_{n-1} = 2$ から、 $(P_1, \dots, P_{n-1}) = (-1, 0, \dots, 0, 1, 1)$ 或 $(-1, 0, \dots, 0, 2)$ となり結論を得る。

さらに Case IV の場合 $I/J^2 \cong (\mathcal{O}_X/J)^{\oplus n-1}$ であることを証明する。
 $J \oplus \mathcal{O}_C = J/IJ \cong \mathcal{O}_C(q_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_C(q_{n-1})$ ($q_1 \leq \dots \leq q_{n-1}$) とおく。 $0 \rightarrow I^2/IJ \rightarrow J/IJ \rightarrow J/I^2 \rightarrow 0$ $\therefore I^2/IJ \cong S^2(I/J) \cong \mathcal{O}_C(2P_1)$, $J/I^2 \cong \mathcal{O}_C(P_2) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_C(P_{n-1})$ より $q_1 + \dots + q_{n-1} = \deg J/IJ = \deg I^2/IJ + \deg J/I^2 = 2P_1 + P_2 + \dots + P_{n-1} = 0$ 。

Case IV-1. $q_1 = 0$ のとき、 $0 \rightarrow IJ/J^2 \rightarrow J/J^2 \rightarrow J/IJ \rightarrow 0$ $\therefore q_1 = q_2 = \dots = q_{n-1} = 0$ $\therefore J/IJ \cong \mathcal{O}_C^{\oplus n-1}$, $IJ/J^2 \cong J/IJ \oplus I/J \cong \mathcal{O}_C(-1)^{\oplus n-1}$ 。

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_C(-1)^{\oplus n-1} & \longrightarrow & (\mathcal{O}_X/J)^{\oplus n-1} & \longrightarrow & \mathcal{O}_C^{\oplus n-1} \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & IJ/J^2 & \longrightarrow & J/J^2 & \longrightarrow & J/IJ \longrightarrow 0 \end{array}$$

また $H^0(J/J^2) \cong H^0(J/IJ) \cong \mathbb{A}^{n-1}$ であるからこの図型により上の図式の可換性をたもつ写像 $(\mathcal{O}_X/J)^{\oplus n-1} \rightarrow J/J^2$ を得る, five lemma よりこれは同型になった. $\therefore J/J^2 \cong (\mathcal{O}_X/J)^{\oplus n-1}$.

Case II-2. $g_1 \neq 0$ とする. $g_1 \leq -1$ とした. $\therefore J \supset L \supset IJ$ を $J/L \cong \mathcal{O}_C(g_1), L/IJ \cong \mathcal{O}_C(g_2) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_C(g_{n-1})$ とした. $I \supset J \supset L$ より $\chi(I/L) = \chi(\mathcal{O}_C(-1)) + \chi(\mathcal{O}_C(g_1)) = 1 + g_1 \leq 0$. さらに $0 \rightarrow L/IJ \rightarrow J/IJ \rightarrow J/L \rightarrow 0, 0 \rightarrow J^2/JL \rightarrow IJ/JL \rightarrow IJ/J^2 \rightarrow 0, 0 \rightarrow IJ/JL \rightarrow L/JL \rightarrow L/IJ \rightarrow 0, 0 \rightarrow JL/L^2 \rightarrow L/L^2 \rightarrow L/JL \rightarrow 0, J^2/JL \cong \mathcal{O}_C(2g_1), IJ/J^2 \cong J/IJ \oplus I/J \cong J/IJ \oplus \mathcal{O}_C(-1), JL/L^2 \cong L/JL \oplus J/L \cong L/JL \oplus \mathcal{O}_C(g_1)$ である. $\chi(\mathcal{O}_X/L^2) = 2ng_1 + g_1 + 2n < 0$ を得る. $\square$

prop 3.2 の証明 fiber F は $\mathbb{P}^2$ の conic に同型であることを見る. すなわち, (i) $F \cong \mathbb{P}^1$ $\therefore N_{F/X} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus n-1}$, $(-K_X \cdot F) = 2$ 又は (ii) $F = F_1 \cup F_2$ $\therefore F_1, F_2 \cong \mathbb{P}^1, F_1 \cap F_2 = -\text{点}$, $(-K_X \cdot F_1) = (-K_X \cdot F_2) = 1$ 又は (iii) $F = 2F_0$ (as 1-cycle) $\therefore F_0 \cong \mathbb{P}^1, N_{F_0/X} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus n-3}$ 又は $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus n-4}$ $\therefore (-K_X \cdot F_0) = 1$ かつ F の定義 ideal を $J \subset \mathcal{O}_X$ とすると $J/J^2 \cong (\mathcal{O}_X/J)^{\oplus n-1}$, $I/J \cong \mathcal{O}_F(-1)$. また L は F_0 の定義 ideal.

さて $F = F_1 \cup \cdots \cup F_t$ と既約な curve に分解する. $\therefore F$ から fiber なる fiber F は既約 $\therefore N_{F/X} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus n-1}$ であるから $(-K_X \cdot F) = 2 - \deg N_{F/X} = 2$.

また一般に $F = F_1 \cup \cdots \cup F_t$ には $(-K_X \cdot F) = 2, (-K_X \cdot F_i) > 0$ であるから, $t \leq 2$ である. $\therefore F$ は (i) 既約な conic on (ii) $F = F_1 \cup F_2$ on (iii) $F = 2F_0$.

Case (i) このとき既約な conic であることは Lemma 3.3 より明らか.

Case (ii) $0 \rightarrow \mathcal{O}_F \rightarrow \mathcal{O}_{F_1} \oplus \mathcal{O}_{F_2} \rightarrow \mathcal{O}_{F_1 \cap F_2} \rightarrow 0$ より $\chi(\mathcal{O}_{F_1 \cap F_2}) = 2 - \chi(\mathcal{O}_F)$ とする. $(-K_X \cdot F_i) = 1$ ($i=1, 2$) より $N_{F_i/X} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus n-2}$ である. $\therefore F$ は既約な conic から $\chi(\mathcal{O}_{F_1 \cap F_2}) \geq 1$. また $H^1(\mathcal{O}_X/I_F) = 0$ より $\chi(\mathcal{O}_F) \geq 1$. $\therefore \chi(\mathcal{O}_{F_1 \cap F_2}) = 1$. $\therefore F_1, F_2$ は一点である.

Case (iii) $I \supset J \supset I^2$ ($I = I_{F_0}, J = I_F$) は F_0 上の各点の local ring であるから $I = J$ である. $1 = \chi(\mathcal{O}_F) = \chi(\mathcal{O}_{F_0}) + \chi(I/J)$ より $0 \geq \chi(I/J) = \deg I/J + \text{rank } I/J$.

$\epsilon = 3$ なら Lemma 3.3 より $\deg I/J \geq -1$. しかより $\deg I/J = -1$. $\text{rank } I/J = 1$, $\chi(I/J) = 0$ を得た. $\therefore I/J \cong \mathcal{O}_{P^1}(-1)$. Lemma 3.3 より 結論を得た.

以上の F の分類により f は flat であることがわかる. 従って, Y は non singular. $\square$

§ 4 Appendix.

次に述べる proposition は Shokurov による定理の 1 つである結果を一般化させたものである. 以下のものを考える.

prop. 4.1 X は non singular, H は nef and big な Cartier divisor なら $aH - K_X$ ample なもの ($\exists a > 0$) を与え ϵ を十分大としたとき $m \geq m(\epsilon)$ なら $B_\epsilon(mH) \neq \emptyset$ となる.

proof. $a=1$ とし $\epsilon > 1$. $B_\epsilon(mH) \neq \emptyset$ を示す. $f: Y \rightarrow X$ を $B_\epsilon(mH)$ の resolution として以下の条件を満たすものとする.

(i) $\sum F_j$ は SNC (simple normal crossing)

(ii) $K_Y = f^*H + \sum a_j F_j$, $a_j \geq 0$. $\epsilon > 1$ なら $a_j > 0$ は F_j が exceptional な B_ϵ に限る.

(iii) $mf^*H \sim L + \sum v_j F_j$, $|L|$ は free なら $v_j \geq 0$. $\epsilon > 1$ なら v_j は整数.

(iv) $f^*H - \sum p_j F_j$ は $\mathbb{Q}$ -ample, $0 \leq p_j < 1$.

(v) ある index 0 なら $-c v_0 + a_0 - p_0 = -1$, $j \neq 0$ なら $-c v_j + a_j - p_j > -1$.

$$-c v_j + a_j - p_j > -1, \quad c > 0. \quad \text{よって} \quad \sum_j (-c v_j + a_j - p_j) F_j = A - B.$$

$$B = B_0 = F_0, \quad \Gamma \text{ は } \Gamma_0 \text{ に } \Gamma_1 \text{ を加えたものである.}$$

以上より可能なものは例として Reid [4] の証明と同様である.

$t \in \mathbb{Z}$ なら $N_t := t f^*H + \sum (-c v_j + a_j - p_j) F_j - K_Y \cong cL + f^*((t - cm)H - K_X) - \sum p_j F_j$. $M_t := N_t + f^*K_X \cong cL + f^*((t - cm)H) - \sum p_j F_j$ と $\mathbb{Q}$ -divisor N_t , M_t を定義する. $t > cm + 2$ のとき N_t, M_t は nef + ample の形になる. $\mathbb{Q}$ -ample となる. N_t, M_t の小数部分は SNC. 1) 又 Vanishing により $H^1(Y, t f^*H + A - B) = H^1(Y, N_t + K_Y) = 0$, $H^1(B, t f^*H + A) \cong H^1(B, N_t + K_B) = 0$ ($t > 0$), $H^1(B, f^*(tH + K_X) + A) = H^1(B, M_t + K_B) = 0$ ($t > 0$) となる. $\therefore H^0(B, t f^*H + A) \neq 0$ ($t > 0$) となる. $H^0(Y, t f^*H) = H^0(Y, t f^*H + A) \rightarrow H^0(B, t f^*H + A) \neq 0$ であるから $f(B) \notin B_\epsilon(mH)$

かわらず. 以下 Noetherian induction により $t \gg 0$ ならば $B_S/tH = \emptyset$ が得られた. $\therefore$ 以下 $H^0(B, tH^* + A) \neq 0 (t \gg 0)$ を証明する.

以下 $\mathcal{O}'$ により $\mathcal{O}|_B$, $f^*\mathcal{O}|_B$ をあらわす. 同様に $K_X := f^*K_X|_B$.

Case I. $H' \cong 0$ on B のとき: このときは $\forall t \in \mathbb{Z}$ に対し N'_t は ample となる. $H^1(B, tH' + A') = 0 (t \gg 0)$. $\therefore h^0(B, tH' + A') = \chi(\mathcal{O}_B(tH' + A')) = \chi(\mathcal{O}_B(A')) = h^0(B, A') > 0$ となり主張が成り立つ.

Case II. $H' \not\cong 0$ on B のとき: $t > cm + 2$ に対し

$$h^0(B, tH' + A') = \chi(\mathcal{O}_B(tH' + A')) = \frac{1}{6}t^3 H'^3 + \frac{1}{4}t^2 H'^2(2A' - K_B) + \frac{1}{2}ct + \text{const.}$$

(さらに $c := \{6H'A'(A' - K_B) + H'(K_B^2 + c_2(B))\}$) となる. $\therefore$ 以下,

Case II-1. $(H'^3)_B \neq 0$ のとき: このとき $t \rightarrow \infty$ とき $h^0(B, tH' + A') \rightarrow \infty$ となり主張は正しい.

Case II-2. $(H'^3)_B = 0$, $H'^2 \neq 0$ のとき: このときは $H'^2(2A' - K_B) = H'^2(A' + (\nu H' + A' - K'_Y - B')) = H'^2 A' + H'^2 N'_\nu + H'^2(\Gamma N'_\nu - N'_\nu)$ (さらに $\nu \gg 0$). $\therefore H'$ は nef, A' , $(\Gamma N'_\nu - N'_\nu)$ は effective, N'_ν は ample となる. $H'^2(2A' - K_B) \geq H'^2 N'_\nu > 0$. $\therefore$ 2次の係数は正となる. $t \rightarrow \infty$ のとき $h^0(B, tH' + A') \rightarrow \infty$.

Case II-3. $H'^2 \cong 0$, $c \neq 0$ のとき: このときは $h^0(B, tH' + A')$ に対し t は 3次と2次の項がなく, 1次の係数は正となり, $t \rightarrow \infty$ のとき $h^0(B, tH' + A') \rightarrow \infty$ が成り立つ.

Case II-4. $H'^2 \cong 0$, $c = 0$ のとき: $h^0(B, tH' + K'_X + A') = \chi(\mathcal{O}_B(tH' + K'_X + A')) = \frac{t}{12} \{6H'(K'_X + A')(K'_X + A' - K_B) + H'(K_B^2 + c_2(B))\} + \text{const.}$ となる. $\therefore$ このとき t の係数は正となる,

$0 \leq \{6H'(K'_X + A')(K'_X + A' - K_B) + H'(K_B^2 + c_2(B))\} - c = 6H'K'_X(K'_X + 2A' - K_B) = -6H'(H' - K'_Y)((\nu H' + K'_X + A' - K'_Y - B') + A') = -6H'(H' - K'_X)(M'_\nu + (\Gamma M'_\nu - M'_\nu) + A')$ (さらに $\nu \gg 0$). $\therefore$ 以下, $H' - K'_Y$, H' は nef, A' , $(\Gamma M'_\nu - M'_\nu)$ は effective, M'_ν は ample となる. 上の式の最後の項は 0 以下. すると $H'(H' - K'_X)(M'_\nu + (\Gamma M'_\nu - M'_\nu) + A') = 0$. さらに $H'(H' - K'_Y)M'_\nu = 0$. $\therefore$ $f_B = f|_B: B \rightarrow f(B)$ を考えた. $H' \not\cong 0$ となる $1 \leq \dim f(B) \leq 3$ となる.

Case II-4-i $\dim f(B) = 1$ のとき: $\deg_{f(B)} H > 0$ であるから,
 $h^0(f(B), tH) > 0$ ($t \gg 0$). $\therefore H^0(B, tH' + A') \neq 0$.

Case II-4-ii $\dim f(B) = 2$ のとき: $H(H - K_X)|_{f(B)}$ は positive degree
 の 0-cycle ($\because H - K_X$ は ample, $H|_{f(B)} \neq 0$). $\therefore H'(H' - K_X')$ は positive な B
 上の 1-cycle. $\therefore H'(H' - K_X') M_V' > 0$ となり矛盾。

Case II-4-iii $\dim f(B) = 3$ のとき: このときも上と同様に B 上
 $H'(H' - K_X') M_V' > 0$ が導かれ矛盾を生じる。 $\square$

文 献

- [1] S. Mori, Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective
 Ann. of Math., 116 (1982), 133-176.
- [2] Y. Kawamata, Cone of curves of algebraic varieties, Preprint.
- [3] V.V. Shokurov, Non-vanishing Theorem (Теорема о неоправлении из нуля),
 to appear in Известия Академии Наук СССР.
- [4] M. Reid, Projective morphisms according to Kawamata, Preprint.
- [5] T. Fujita, Classification of projective varieties of Δ -genus one,
 Proc. Japan Acad., 58 (1982), 113-116.
- [6] V.A. Iskovskih, Fano 3-fold I, II Math. USSR-Izv. 11 (1977) 485-527,
 12 (1978), 469-506
- [7] S. Nakano, On the inverse of monoidal transformations, Publ. Res.
 Inst. Math. Sci., 6 (1971), 483-502.