

Brown - Douglas - Fillmore 理論をめぐって

大阪教育大 藤井 正俊

竹鼻 裕昭

Brown - Douglas - Fillmore は、1970年 Atiyah - Singer の K-theory を背景にして、 C^* -algebra に extension という考えを導入し、extension を用いて K-theory を組み立てる (realize する) 方向に進んできたように思われます。ここでは extension の C^* -algebra への応用という方向で議論を進めたいと思います。

ところで、 C^* -algebra の extension は operator の unitary 同値性の問題から出発した考えです。この大きな問題は 1909 年の Weyl に始まると思われます。Weyl は、 a, b を self-adjoint とし $a \neq b$ (但し a は compact) ならば finite multiplicity の eigenvalue を除いて a と b のスペクトルが一致することを示した。1935 年に von Neumann は、この逆が成り立つこと、すなわち、finite multiplicity の eigenvalue を除いて a と b のスペクトルが一致しているならば、 a は $a + b$ (但し a は compact) に unitary 同値であることを示しました。これが Weyl - von Neumann の定理と呼ばれているものです。

さらに1970年のHalmosのten problems in Hilbert spaceの中の夕番目の問題を契機として、 a, b をnormalとした時にWeyl-von Neumannの定理が成立するかという問題に発展してきました。

そして、翌年の、1971年 Berg-Sikominiaにより、肯定的に解決されました。

一方、1981年 Calkin は separable Hilbert space $\mathcal{H}$ 上の bounded operatorsの全体を $B(\mathcal{H})$ とし、 $\mathcal{H}$ 上の compact operatorsの全体を $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ とした時、 $B(\mathcal{H})$ の 2-sided ideal である $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ を右開きし、quotient algebra $\mathcal{A}(\mathcal{H}) = B(\mathcal{H})/\mathcal{K}(\mathcal{H})$ を考察してゐます。

さて、 $B(\mathcal{H})$ から Calkin algebra $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ への自然な map. を π とします。今 a, b を normal とした時 finite multiplicity の eigenvalue を除いた $\mathcal{H}$ のスペクトルは、 $\pi(a)$ のスペクトル $Sp \pi(a)$ と一致してゐるので、Weyl-von Neumann - Berg-Sikominia の定理は

$$a \sim b \pmod{\mathcal{K}(\mathcal{H})} \iff Sp \pi(a) = Sp \pi(b)$$

と述べる事が出来ます。

ところで、 a を unilateral shift, b を bilateral shift とした時 $Sp \pi(a) = Sp \pi(b) = \mathbb{T}$ (但し $\mathbb{T}$ は複素平面のトーラス) と是れですが $a \sim b \pmod{\mathcal{K}(\mathcal{H})}$ とは是れしません。

一般に、 $\pi(c)$ が normal の時 c を eos. normal とは是れしますが、上の例は、eos. normal operator に対して、 $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ を法として unitary 同値を与えるには、スペクトル条件だけでは十分では是れことを

示しています。では、ess. normal operatorに対して、このスペクトル条件の他に、何を加えればよいかが問題となります（B.D.F.理論の一つの結果としてこの解答を後で述べます）
 のような、作用素論からの要請により、 C^* -algebraの extension theory は、始まりました。

さて、ここからは以後、 C^* -algebra は常に単位元を持つ、というものとし、
 又 C^* -algebras A, B に対して A から B への $*$ -homomorphism は、単位元を単位元に移すものとし、
 特に、1対1の $*$ -homo. を慣例に従って $*$ -monomorphism と呼ぶことにします。

Def. A : separable C^* -algebra とし

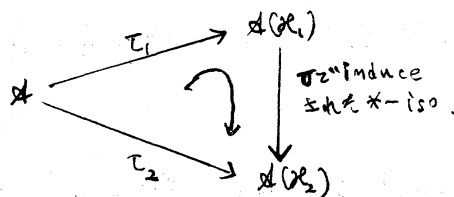
τ が extension for A by $C(X)$ とは、 A から $A(X)$ への $*$ -mono. のことをいいます。

そこで A の extension の全体を $\text{ext } A$ とかくことにします。

Def. $\tau_1, \tau_2 \in \text{ext } A$ に対して、

$\tau_1 \sim \tau_2$ とは、次の diagram を可換にする

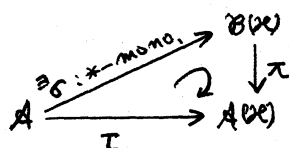
Hilbert spaces $\mathcal{H}_1$ から $\mathcal{H}_2$ への unitary U が存在する時をいいます。



そして、 $\text{Ext} A = \text{ext} A / \sim$ と書くことにします。

Def. $\tau \in \text{ext} A$ に対して、

τ が trivial extension とは、次の diagram を可換にする A から $B(A)$ への $*$ -mono. σ が存在する時をいいます。



Vaiculescu は次のことを示しました。

Theorem [15] すべての trivial extension は equivalent である。

複素平面の compact set X 上の連続関数の全体 $C(X)$ を、

C^* -algebra A とした時、この定理は、Weyl-von Neumann-Berg-Sikonia の定理に化ています。だから non-commutative Weyl-von Neumann の定理という見方ができます。

Def. $\tau_1, \tau_2 \in \text{Ext}(A)$ に対して、 $\tau_1 + \tau_2$ を

$$(\tau_1 + \tau_2)(a) = \begin{pmatrix} \tau_1(a) & 0 \\ 0 & \tau_2(a) \end{pmatrix} \in A \otimes \mathbb{C}^2 \quad (a \in A)$$

と定義します。

この和の定義は、同値類の代表元のとり方によりません。

Vaiculescu [15] によって、 $\text{Ext}(A)$ は trivial extension のなす類を単位元とする abelian semigroup とされます。

ところで Brown-Douglas-Fillmore は、 $A = C(\mathbb{T})$ を model に

して、彼等の理論を発展させています。そこでまず $\text{Ext}(\mathbb{C}(T))$ について考えてみたいと思います。このために、2, 3 の必要な結果を述べます。

Def. $a \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が Fredholm operator であるとは $\pi(a)$ が invertible であることをいいます。

Fredholm operator の全体を $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ とかくことにします。

歴史的には Fredholm operator とは, $\text{range } a$ が closed で, $\dim \ker a < +\infty$ しか $\dim \ker a^* < +\infty$ なる a のことですが, Atkinson によつて上での定義と同値であることが示されておられます。

そこで, $a \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$ に対し a の index を, $\text{ind } a = \dim \ker a - \dim \ker a^*$ で定義します。

次の index の性質は、よく知られております。

$$\textcircled{1} \quad a, b \in \mathcal{F}(\mathcal{H}) \implies ab \in \mathcal{F}(\mathcal{H}), \quad \text{ind}(ab) = \text{ind } a + \text{ind } b$$

$$\textcircled{2} \quad a \in \mathcal{F}(\mathcal{H}), \quad b \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \implies \text{ind}(a+b) = \text{ind } a$$

次の index の性質は定義からすぐわかるものです。

$$\textcircled{3} \quad \text{ind } a^* = -\text{ind } a$$

$$\textcircled{4} \quad \text{ind}(a \oplus b) = \text{ind } a + \text{ind } b$$

又、複素平面上の関数 f_n を, $f_n(z) = z^n$ で与え, $f_1 = f$ とかくことにします。通常のように、トーラス上の 2 乗可積分関数の全体を $L^2(\mathbb{T})$, Hardy space を $H^2(\mathbb{T})$, M_f を multiplication by f on $L^2(\mathbb{T})$ とし、

T_f を, Toeplitz operator defined on $H^2(\mathbb{T})$ とします。

B.D.F. 理論は、次の定理を出発点としてります。

Theorem [4] $\pi(a)$ を unitary とし, $\text{Ind } a = -n$ の時

$$a \sim \begin{cases} \text{(i)} T_{\mathcal{H}_n} + \text{compact } k & (n > 0) \\ \text{(ii)} U + k & (n = 0) \\ \text{(iii)} T_{\mathcal{H}_{|n|}}^* + k & (n < 0) \end{cases}$$

つまり, (i) は a が multiplicity n の shift + compact に unitary 同値であることを示しています。(ii) の U は unitary, (iii) の $T_{\mathcal{H}_{|n|}}^*$ は, multiplicity $|n|$ の shift の adjoint です。特に (ii) において,

$\text{Sp } \pi(a) = \mathbb{T}$ なる $U = M_{\mathcal{H}}$ かつ unitary U は bilateral shift $M_{\mathcal{H}}$ として取る ことが出来ます。このより k , ess. unitary operator a は, index によってその形が決定出来ます。

これだけの準備のもとに $\text{Ext } C(\mathbb{T})$ を決定します。

Example [4] $\text{Ext } C(\mathbb{T}) = \mathbb{Z}$

<proof> $n \neq 0$ の時 $T_n(f) = \pi(T_{f \otimes e_n})$ とすると T_n は $*$ -mono,

つまり $T_n \in \text{Ext } C(\mathbb{T})$ となることは, $\text{map } f \mapsto T_f \in \mathcal{B}(H^2(\mathbb{T}))$

(但し $f \in C(\mathbb{T})$) が $*$ -homo ($\text{mod } \mathcal{C}(H^2(\mathbb{T}))$) となることと, $\|f\| = \|T_f\| \equiv \|T_f + k\|$

(但し $f \in C(\mathbb{T}), k \in \mathcal{C}(H^2(\mathbb{T}))$) とおさわかります。

$n=0$ の時 $f \in C(\mathbb{T})$ に対して $T_0(f) = \pi(M_f) \in \mathcal{K}(L^2(\mathbb{T}))$ が $*$ -mono

つまり $T_0 \in \text{Ext } C(\mathbb{T})$ となることは明らかです。この $\{T_n\}$ が

$\text{Ext } C(\mathbb{T})$ の代表元の complete な system となっていることは、次

のように示すことが出来ます。 $m \neq n$ ならば $T_m \not\sim T_n$ は index の方がわかりやすいので、任意の $T \in \text{ext}(C(\mathbb{T}))$ に対して $T \sim T_m$ なる T_m が存在することを示せばよいことになります。この m は、 $\text{ind } T(A) = -m$ なる m としとる事が出来ます。まず、 $T(A) = \pi(A)$ なる A をとて置きます、

(i) $m > 0$ の時 $A \sim_u T_{A_m} \pmod{\text{compact}}$ なる unitary u が、
 上で述べた定理から取ることが出来ます。ここで $C(\mathbb{T})$ は $\mathbb{C}$ で生成されているので、 $T(A) = \pi(A) = \pi(u T_{A_m} u^*)$ と
 $T_m(A) = \pi(T_{A_m})$ とから、 $T \sim T_m$ がわかります。

(ii) $m < 0$ の時は adjoint をとって同様に出来ます。

(iii) $m = 0$ の時は、上で述べた定理と $\text{Sp } T(A) = \mathbb{T}$ があることから
 $A \sim M_n$ となり $T \sim T_0$ となります。

以上より、 $\{T_m\}$ は、 $\text{Ext } C(\mathbb{T})$ の代表元の complete な system となっていることがわかりました。ここで、extensions の和の定義は、Toeplitz operators の直和で、定義していることと、直和の index はそれぞれの index の和となることから、 $\text{Ext } C(\mathbb{T})$ と $\mathbb{Z}$ は、group として同型になります。

$\mathcal{A} = C(\mathbb{T})$ に対して、 $\text{Ext } \mathcal{A}$ は trivial extension T_0 を単位元とする group となることを示しました。

一般に、

Theorem [5] X を compact metric space とした時

$\text{Ext } C(X)$ は group となる。

この定理を証明するにあたり、trivial extension を単位元とする abelian semi-group とすることは、Voiculescu によ、て一般の separable C^* -algebra でわか、ております。もともとの Brown - Douglas - Fillmore の論文では、逆元の存在というところで大変手まど、た証明をしておりますが、ここでは、逆元の存在について、Arveson の考えにもとづき positive map の lifting を利用する簡単な証明を紹介します。

このために、positive map の lifting に関する定理と Maimark の dilation theorem が必要です。

Lifting theorem [5] B を C^* -algebra, I を B の closed 2-sided ideal

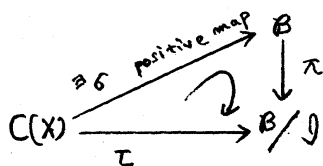
とし、 π を B から B/I への natural map, τ を $C(X)$ から

B/I への $\tau(1)=1$ なる positive linear map とします。

ただし、 X は compact metric space としておきます。

この時 次の diagram を可換にする $C(X)$ から B への unital

($\phi(1)=1$) なる positive linear map ϕ が存在します。



Neimark's dilation theorem [5]

σ を $C(X)$ から $B(\mathcal{H})$ への unital 正 positive map とすると

これを含む Hilbert space $\mathcal{H}'$ と, $C(X)$ から $B(\mathcal{H}')$ への unital $*$ -homo.

φ が存在して, $\sigma(a) = P_{\mathcal{H}} \varphi(a)|_{\mathcal{H}} \quad (a \in C(X))$

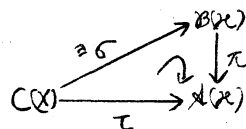
となる。但し $P_{\mathcal{H}}$ は $\mathcal{H}'$ から $\mathcal{H}$ への projection とします。

さて、この 2 つの theorem を用いて Arveson に基づく theorem の証明を与えます。

<proof> 任意の $\tau \in \text{Ext } C(X)$ に対して Lifting theorem より

左の diagram を可換にする

positive map σ がとれます。次に



dilation theorem より $C(X)$ から $B(\mathcal{H}')$ への $*$ -homo. φ が次の

matrix 表示で与えられます。 $\varphi(a) = \begin{pmatrix} \sigma(a) & K_a \\ L_a & M_a \end{pmatrix}$ on $\mathcal{H}' = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^\perp$

ここで φ が $*$ -homo. であるから K_a と L_a も compact となる。

そこで $a \in C(X)$ に対して $\tau(a) = \pi(M_a)$ とおくと、

τ' は $*$ -homo. となり、しかも作り方から、 $\tau \oplus \tau' = \pi \circ \varphi$

となります。ここで τ_0 を trivial extension とし

$\tau_1 = \tau' \oplus \tau_0$ とおくと、 τ_1 は $*$ -homo. となり $\tau_1 \in \text{Ext } C(X)$

となり、 $\tau \oplus \tau_1 = \tau \oplus \tau' \oplus \tau_0 = \pi \circ \varphi \oplus \tau_0 \sim \pi \circ \varphi$

であるので、 τ_1 が、 τ の逆元ということになる。

以上より $\text{Ext } C(X)$ は group となる。 //

このことから Ext は, compact metric space の族の $\mathcal{T}$ -ゴリ
から abelian group の族の $\mathcal{T}$ -ゴリへの対応を与えることが
わかりましたが、更に homotopy invariant な covariant
functor になることがわかっています。つまり $f, g: X \rightarrow Y$ に対して
 f と g が homotopic ならば $f_* = g_*: \text{Ext } C(X) \rightarrow \text{Ext } C(Y)$

$$\left(\begin{array}{l} \text{但し、} \tau \in \text{Ext } C(X), h \in C(Y) \text{ に対して } f^*: C(Y) \rightarrow C(X), \\ f_*: \text{Ext } C(X) \rightarrow \text{Ext } C(Y) \text{ を } (f^*(h))(x) = h(f(x)), f_*\tau = (\tau \circ f^*) \oplus \tau. \\ \text{とそれぞれ定義してあります。ここでの } \tau \text{ は trivial extension for } C(Y) \text{ です。} \end{array} \right)$$

又 covariant とは ① $(\text{id}_X)_* = \text{id}_{\text{Ext } C(X)}$ ② $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ の時
 $(gf)_* = g_* \circ f_*$ と表すことを示しています。

さて、特に $X \subset \mathbb{C}$ とすると、対応 γ により $\text{Ext } C(X) = \text{Hom}(\pi^1(X), \mathbb{Z})$
と表すこともわかっています。ここでの $\pi^1(X)$ は first cohomotopy
group of X であり、対応 γ は

$$\gamma(\tau)(a) = \text{ind } \tau(a) \quad (a \in \pi^1(X), \tau \in \text{Ext } C(X))$$

で与えられます。

ここで、 $N(X) = \{a \in B(X); \pi(a): \text{normal}, \text{Sp } \pi(a) = X\}$ とし、とき

$a \in N(X)$ に対して $T_a(a) = \pi(a)$ と表す extension T_a を対応
させることにより、 $N(X) = \text{Ext } C(X)$ と表ります。特に、

normal + compact に対応する extension が trivial extension
になる、といます。さらに $a, b \in N(X)$ に対して

$$a \sim b \pmod{e(X)} \iff \tau_a \sim \tau_b$$

と成りますので、 $N(X)/\sim = \text{Ext } C(X)$ が成り立ちます。このことと、上の対応を使うことにより、essential spectrum を X に持つ ess. normal operator の classification が可能になります。

Theorem [4] $a, b \in N(X)$ に対して

$$a \sim b \pmod{e(X)} \iff \text{ind}(a-\lambda) = \text{ind}(b-\lambda) \quad (\lambda \notin X)$$

<proof>

($\Rightarrow$) index の性質から明らかです

($\Leftarrow$) operator a, b に対応する extension を τ_a, τ_b とする

と、 $a \sim b \pmod{e(X)}$ を示すには、 $\tau_a \sim \tau_b$ をしめせばよい。多、 γ は 1 対 1 ですので、 $\gamma(\tau_a) = \gamma(\tau_b)$

を示せばよいでしょう。つまり任意の $f \in \pi^1(X)$ に

対して $\text{ind } \tau_a(f) = \text{ind } \tau_b(f)$ をしめせばよいことになります。

ところが $\pi^1(X)$ は $\lambda - \lambda$ ($\lambda \notin X$) で生成されておるので

$\text{ind } \tau_a(\lambda - \lambda) = \text{ind } \tau_b(\lambda - \lambda)$ をしめせばよいことになります。

それは、

それは、

$$\text{ind } \tau_a(\lambda - \lambda) = \text{ind}(a - \lambda) = \text{ind}(b - \lambda) = \text{ind } \tau_b(\lambda - \lambda)$$

がいえませう。

この定理を用いて、operator a が normal + compact とわかる

かを決定することが出来ます。

Corollary (4) essential normal operator a に対して

$$a = \text{normal} + \text{compact} \iff \text{ind}(a - \lambda) = 0 \quad (\lambda \notin \text{Sp}\pi(a))$$

と明らかに、index で決定されることがわかりました。

これが commutative C^* -algebra $C(X)$ の extension group の operator の classification への応用であります。次に、non-commutative

C^* -algebra A の extension の応用について述べ

てみたいと思います。まず、いつ non-commutative C^* -algebra A の $\text{Ext}(A)$ が group になるかということが問題です。

$\text{Ext}(C(X))$ が group になることの証明の

キーポイントは次の2点にあります。

① positive map の lifting が出来るかどうか

② Naimark の dilation theorem が成立するかどうか

①については、abelian C^* -algebra の positive map は completely positive map であることが、Choi と Effros [6], 更に Arveson [1] により separable nuclear C^* -algebra A なる positive map における completely positive map の lifting が成立することがわかり、ています。

又、②については、Stinespring [13] により completely positive map なる dilation theorem が成立することが示されています。

結局、次の定理が成立することになります。

Theorem (1) A を separable nuclear C^* -algebra とした時

$\text{Ext}(A)$ は group となる.

さて、この nuclear C^* -algebra の extension のなす group を用いて、 C^* -algebra の classification における、新しい simple C^* -algebra である Cuntz algebra の同型問題が、最近解決されました。それを次に紹介します。

まず、 $\text{Cuntz}[n]$ は、 $n \geq 2$ に対して、 $S_i \in B(\ell^2)$ ($i=1, 2, \dots, n$) を

$\sum_{i=1}^n S_i S_i^* = I$ なる isometry としますと、次のことが成立することを示しました。

$$\textcircled{1} \quad S_i^* S_j = \delta_{i,j} I$$

$\textcircled{2} \quad V_i \in B(\ell^2)$: isometry で $\sum_{i=1}^n V_i V_i^* = I$ なるは

$$C^*(S_1, S_2, \dots, S_n) \cong C^*(V_1, V_2, \dots, V_n)$$

ただし $C^*(S_1, \dots, S_n)$ は $S_1, \dots, S_n$ から生成された C^* -algebra を意味します。

このことから $C^*(S_1, \dots, S_n)$ を O_n と呼んで、Cuntz algebra といいことにします。

$\textcircled{3} \quad O_n$ は simple nuclear C^* -algebra となります。

故に上で述べた定理より $\text{Ext } O_n$ は group となります。

最近、この O_n の同型問題、つまり $\mathbb{F}_m$ と $\mathbb{F}_n$ が互いに同型ならば $O_m \cong O_n$ が、成立することを、extension group のある商群を用いて示されました。その Paschke — Salinas [9] と Pimsner — Popa [11] の証明を次に紹介します。まず最初に次の結果を証明します。

Theorem [9] $\text{Ext } O_n = \mathbb{Z}$

この Theorem は、2つの lemma によって証明が完成されます。

まず、 $\tau \in \text{Ext } O_n$ に対して

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \in B(\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^n)^{\text{proj.}}$$

$$v_\tau = \begin{pmatrix} \tau(s_1) & \cdots & \tau(s_n) \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in A(\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^n)^{\text{iso.}}$$

この v_τ は $v_\tau v_\tau^* = \pi(P_1)$, $v_\tau^* v_\tau = 1$ なる Calkin algebra の isometry となっています。この時、次の (1), (2) を示す、 $v_\tau \in B(\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^n)^{p.\text{iso}}$ が存在します。

$$(1) \pi(v_\tau) = v_\tau \quad (2) 1 - v_\tau^* v_\tau \text{ も } P_1 - v_\tau v_\tau^* \text{ も共に、}$$

finite rank projection である。

なぜなら、 $\pi(T) = v_\tau$ なる $T \in B(\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^n)$ をとり、 $P_1 T = V |P_1 T|$ を $P_1 T$ の polar 分解とすると、この V が求れる v_τ があります。また

$$(P_1 T)^*(P_1 T) = T^* P_1 T \text{ に } \pi \text{ を作用させることにより } \pi(P_1 T) = 1,$$

故に $v_\tau = v_\tau v_\tau^* v_\tau = \pi(p_\tau) = \pi(v) \pi(1_{p_\tau}) = \pi(v)$

又 ② の方は 作り 方 から 明 白 だ け だ。

さて、② より $\dim(1 - v_\tau^* v_\tau) = \dim(p_1 - v_\tau v_\tau^*)$ を 考 へ る こ と が 出 来 ます。この値は、 v_τ と p_1 つまり τ と p_1 によ、 τ の 方 を 考 へ る こ と が わ か り ます の で、 $m(\tau)$ と 考 へ る こ と に し ます。実 際、

$P_1(\mathcal{K} \otimes \mathbb{C}^n)$ から $\mathcal{K}$ へ の unitary を W と する と $m(\tau)$ は $\begin{pmatrix} 0 & v_\tau \\ W & 0 \end{pmatrix}$

の index に 等 し く 左 右 同 値 だ け だ と わ か り ます。

関数 m は 次の 性 質 を 持 っ て い る こ と は すぐ に わ か り ます。

$$\textcircled{1} \quad \tau_1 \sim \tau_2 \implies m(\tau_1) = m(\tau_2)$$

$$\textcircled{2} \quad m(\tau_1 \oplus \tau_2) = m(\tau_1) + m(\tau_2)$$

① の 方 は m は、 $\text{Ext}_0 \mathcal{K}$ の 各 同 値 類 で は 同 じ 値 を と る こ と を 示 し て い る の で、 $\text{Ext}_0 \mathcal{K}$ 上 の 関 数 と し て 考 へ る こ と が 出 来 ます。又 ② から m は $\text{Ext}_0 \mathcal{K}$ から 整 数 の 左 右 加 群 $\mathbb{Z}$ の 中 へ の 和 を 和 に 移 す 関 数 と な っ て い ます。そ こ で Theorem を 示 す に は、単 位 元 を 単 位 元 に 移 し て い る こ と と、onto を 示 せ ば よ い こ と に な り ます。

Lemma $m(\tau) = 0 \iff \tau : \text{trivial extension}$

<proof> ($\Leftarrow$) $\tau_0: \mathcal{O}_n \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{B}(\mathcal{H}) \xrightarrow{\pi} \mathcal{K}(\mathcal{H})$ と する と、

τ_0 は trivial extension だ け だ。

さ て 任 意 の trivial extension τ に 対 し て、

Uicallescu より $\tau \sim \tau_0$, 故に τ の性質 ϕ から

$$m(\tau) = m(\tau_0) = \dim(1 - v_{\tau_0}^* v_{\tau_0}) - \dim(p_1 - v_{\tau_0} v_{\tau_0}^*) = 0$$

ここで最後の等号は, $v_{\tau_0} = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_m \\ 0 & & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$ としとれる

ことから出てきます。

($\Rightarrow$) $m(\tau) = 0$ とします。そこで v_{τ} に, $1 - v_{\tau}^* v_{\tau}$ を $p_1 - v_{\tau} v_{\tau}^*$ に

移す finite rank の partial isometry を, 加えて, v_{τ} を range が p_1 とする isometry にとりなおすことにします。

この isometry を同じく v_{τ} とかくことにします。ところ

が, v_{τ} の range は p_1 であるから, $v_{\tau} = \begin{pmatrix} T_1 & \cdots & T_m \\ 0 & & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$ の

形と変わります。更に $v_{\tau}^* v_{\tau} = 1$ より $T_{\lambda}^* T_{\lambda} = 1$ ($\lambda = 1, 2, \dots, m$)

$$v_{\tau} v_{\tau}^* = p_1 \text{ より } \sum_{\lambda=1}^m T_{\lambda} T_{\lambda}^* = 1$$

故に, $\{T_{\lambda} : \lambda = 1, \dots, m\}$ は Guntz algebra の generator の性質を

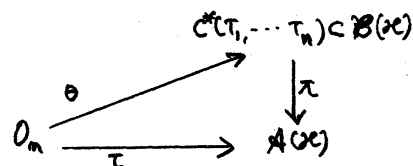
持つ m 個の isometry であることに変わりました。このこ

と, $\pi(v_{\tau}) = v_{\tau}$ から $\pi(T_{\lambda}) = \pi(s_{\lambda})$ ($\lambda = 1, 2, \dots, m$)

が成立することから, 次の diagram を可換にする

O_m から $C^*(T_1, \dots, T_m) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ への $*$ -isomorphism θ がとれ

ます。



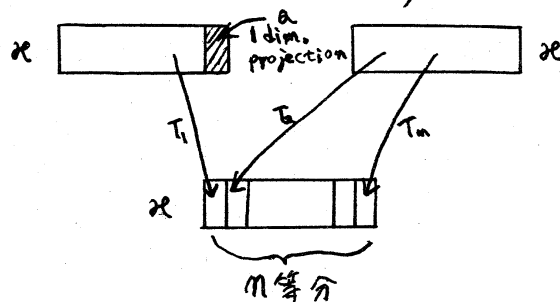
故に τ は trivial extension であることを示しました。 //

Lemma

m は onto である。

<proof> m は、和を和に移していいことと、単位元は単位元に移していいことがわかっています。

故に、 $m(\sigma)=1$ となる $\sigma \in \text{ext } O_m$ の存在を示せばよいでしょう。今下の図に示すような、partial isometry T_1 と $(n-1)$ 個の isometry を作ります。



ここで $1 - T_1^* T_1 = Q$ とおき Q は 1 次元 projection であるとします。

上のようにつくると $\{\pi(T_i) : i=1, 2, \dots, m\}$ は Cuntz algebra

の generator の性質を持つ m 個の isometry であるこ

とは、明らかです。そこで O_m から $C^*(\pi(T_1), \dots, \pi(T_m))$

への isomorphism ϕ がとれます。この ϕ が求める

extension とあります。実際、
$$V_\phi = \begin{pmatrix} T_1 & \dots & T_m \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

としてとれますので

$$m(\sigma) = \dim(1 - \nabla_\sigma^* \nabla_\sigma) - \dim(P_1 - \nabla_\sigma \nabla_\sigma^*) = \dim Q = 1$$

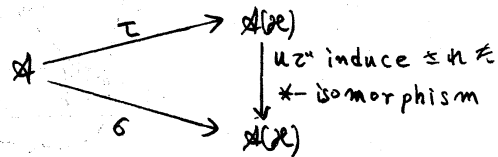
から, Lemmaが証明出来たことに左ります。 //

これで, $\text{Ext } Q_n = \mathbb{Z}$ が示せたわけですが, このままでは, Q_n は同型かどうか判定出来ません。そこで $\text{Ext } Q_n$ の商群を考へることにします。そのためには今まで考へてきた同値関係より弱い同値関係を、導入する必要があります。

Def.

$\mathcal{A}$ を C^* algebra とし $\tau, \sigma \in \text{ext } \mathcal{A}$ に対して

τ と σ が weakly equivalent とは, 次の diagram を可換にする Calkin algebra $\mathcal{A}(H)$ の unitary u が存在する時を, //



この時 $\tau \sim_w \sigma$ とかくことにします。更に $\text{Ext } \mathcal{A}$ と同様に, $\text{Ext}^w(\mathcal{A}) = \text{ext } \mathcal{A} / \sim_w$ とかくことにします。

以上の notation のもとに, 次の Corollary が成立します。

Corollary [9]

$$\text{Ext}^w(Q_n) = \mathbb{Z}/(n-1)$$

<proof> σ_1 を $\mathcal{A}$ 上の multiplicity が 1 の unilateral shift とします。そして, τ_i を, $\tau_i(s_i) = \pi(\sigma_1 s_i \sigma_1^*)$ ($i=1, 2, \dots, n$) で定義される Q_n から $\mathcal{A}(H)$ への $*$ -mono. つまり $\tau_i \in \text{ext } Q_n$ とし, τ_0 を同様に $\tau_0(s_i) = \pi(s_i)$ ($i=1, 2, \dots, n$) なる trivial

extension とします。ここで $\tau \in \text{Ext } \mathcal{O}_n$ に対して, $\text{Ext } \mathcal{O}_n$ と $\text{Ext}^w \mathcal{O}_n$ の中で τ の類を, それぞれ $[\tau]$, $[\tau]_w$ とかくことにします。さて $[\tau_0]_w$ は, $\text{Ext}^w \mathcal{O}_n$ の単位元でありますが, τ で

生成された $\text{Ext } \mathcal{O}_n$ の subgroup と仮定していることをまず示しましょう。 $\tau \in [\tau_0]_w$ に対して $\tau = u\tau_0 u^*$ とする unitary $u \in A(X)$ がとれます。 $\text{ind } u = -m$ とおき, Brown-P Douglas-Fillmore 理論の出発点となる, essentially unitary の特徴付けの定理から, u は次の3つの場合に分れます。

① $m > 0$ の時 $u = \pi(\varphi^m)$ ② $m = 0$ の時 $u = \pi(\varphi)$ (但し φ は unitary)

③ $m < 0$ の時 $u = \pi(\varphi^{*-m})$

まず①の時ですが $\tau(\cdot) = \pi(\varphi^m) \pi(\cdot) \pi(\varphi^{*m}) = \pi(\varphi^m \cdot \varphi^{*m}) \sim_w m\tau_1$

となることから, $[\tau_0]_w$ の元 τ と, τ で生成された group の元 $m\tau_1$ との対応がつかえます。②, ③の時も同様に出来ます。

これで $[\tau_0]_w$ と $[\tau]$ で生成された $\text{Ext } \mathcal{O}_n$ の subgroup は一致することがわかりました。

さて $\text{Ext } \mathcal{O}_n$ から $\text{Ext}^w \mathcal{O}_n$ への homomorphism π を $\pi([\tau]) = [\tau]_w$

で定義します。すると $\pi \circ m^1$ は π から $\text{Ext}^w \mathcal{O}_n$ への onto homo.

となりますから, Corollary を示すには, $\ker \pi \circ m^1 = (n-1)$ を

示せばよいでしょう。ところが $\ker \pi \circ m^1 = m([\tau_0]_w)$ ですから

上で示したことを用いると, $m(\tau_1) = m-1$ を示せばよいことになります。

これが成立することは、次のことからわかります。

$$V_{\tau_1} = \begin{pmatrix} \pi_1 s_1 \pi_1^* & \pi_1 s_2 \pi_1^* & \cdots & \pi_1 s_m \pi_1^* \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{とおきます。}$$

$\pi(V_{\tau_1}) = v_{\tau_1}$ となることは τ_1 の定義から明らかです。

$$\text{故に } m(\tau_1) = \dim(1 - V_{\tau_1}^* V_{\tau_1}) - \dim(P_1 - V_{\tau_1} V_{\tau_1}^*) = m-1$$

以上より $\text{Ext}^w_{O_m} = \mathbb{Z}/(m-1)$ となります。 //

引き続き、Paschke-Salinas [10] は、 G を 2 つの cyclic group の free product とし、 G の left regular representation により、 C^* -algebra $C_r^*(G)$ とし、

$$C_r^*(G) \otimes M_n \not\cong C_r^*(G) \otimes M_m \quad (n \neq m)$$

を、trivial extension を利用して、示しています。

References.

- [1] W. Arveson, A note on essentially normal operators, Proc. Royal Irish Acad., Ser. A, 74(1974), 143-146.
- [2] ———, Notes on extensions of C^* -algebras, Duke Math.J., 44(1977), 329-355.
- [3] I.D.Berg, An extension of the Weyl-von Neumann theorem to normal operators, Trans. Amer. Math. Soc., 160(1971), 365-371.
- [4] L.G.Brown, R.G.Douglas and P.A.Fillmore, Unitary equivalence modulo the compact operators and extensions of C^* -algebras, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, New York, 345(1973), 58-128.
- [5] ———, ——— and ———, Extensions of C^* -algebras and K-homology, Ann. Math., 105(1977), 265-324.
- [6] M.-D. Choi and E.G.Effros, The completely positive lifting problem for C^* -algebras, Ann. Math., 104(1976), 585-609.
- [7] J.Cuntz, Simple C^* -algebras generated by isometries, Comm.Math.Phys., 57(1977), 173-185.
- [8] P.R.Halmos, Ten problems in Hilbert space, Bull. Amer. Math. Soc., 76(1970), 887-933.
- [9] W.L.Paschke and N.Salinas, Matrix algebras over O_n , Preprint.
- [10] ——— and ———, C^* -algebras associated with free products of groups, Notices Amer. Math. Soc., 26(1979), A-105, # 763-47-5.
- [11] M.V.Pimsner and S.T.Popa, The Ext-groups of some C^* -algebras considered by J.Cuntz, Rev.Roum.Math.Pures et Appl., 23(1978), 1069-1076.
- [12] W.Sikonia, The von Neumann converse of Weyl's theorem, Indiana Univ. Math. J., 21(1971), 121-124.
- [13] W.F.Stinespring, Positive functions on C^* -algebras, Proc.Amer.Math.Soc., 6(1955), 211-216.

[14] J.Tomiyama, C^* -環の拡大について, RIMS 講究録, 320(1978), 135-150.

[15] D.Voiculescu, A non-commutative Weyl-von Neumann theorem, Rev.Roum. Math.Pures et Appl., 21(1976), 97-113.